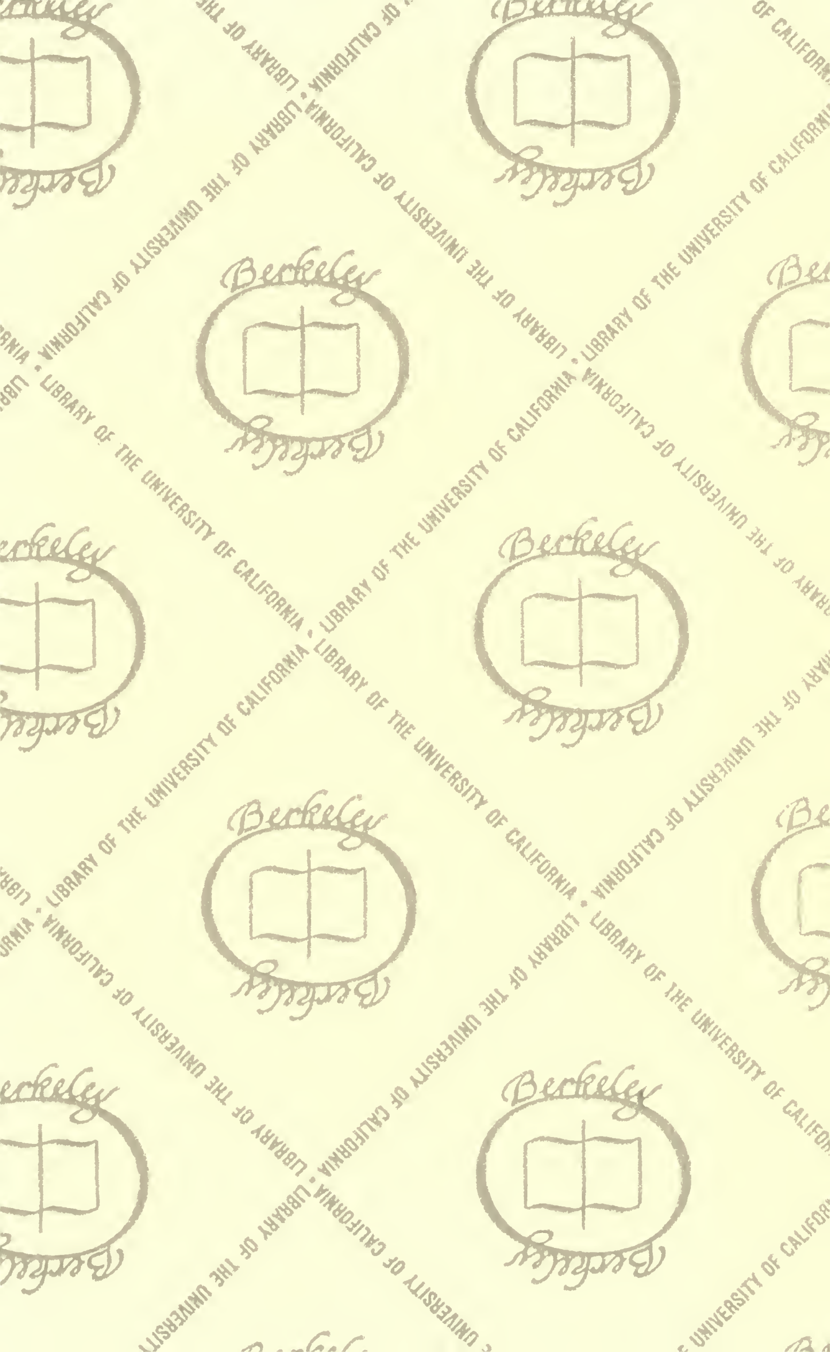
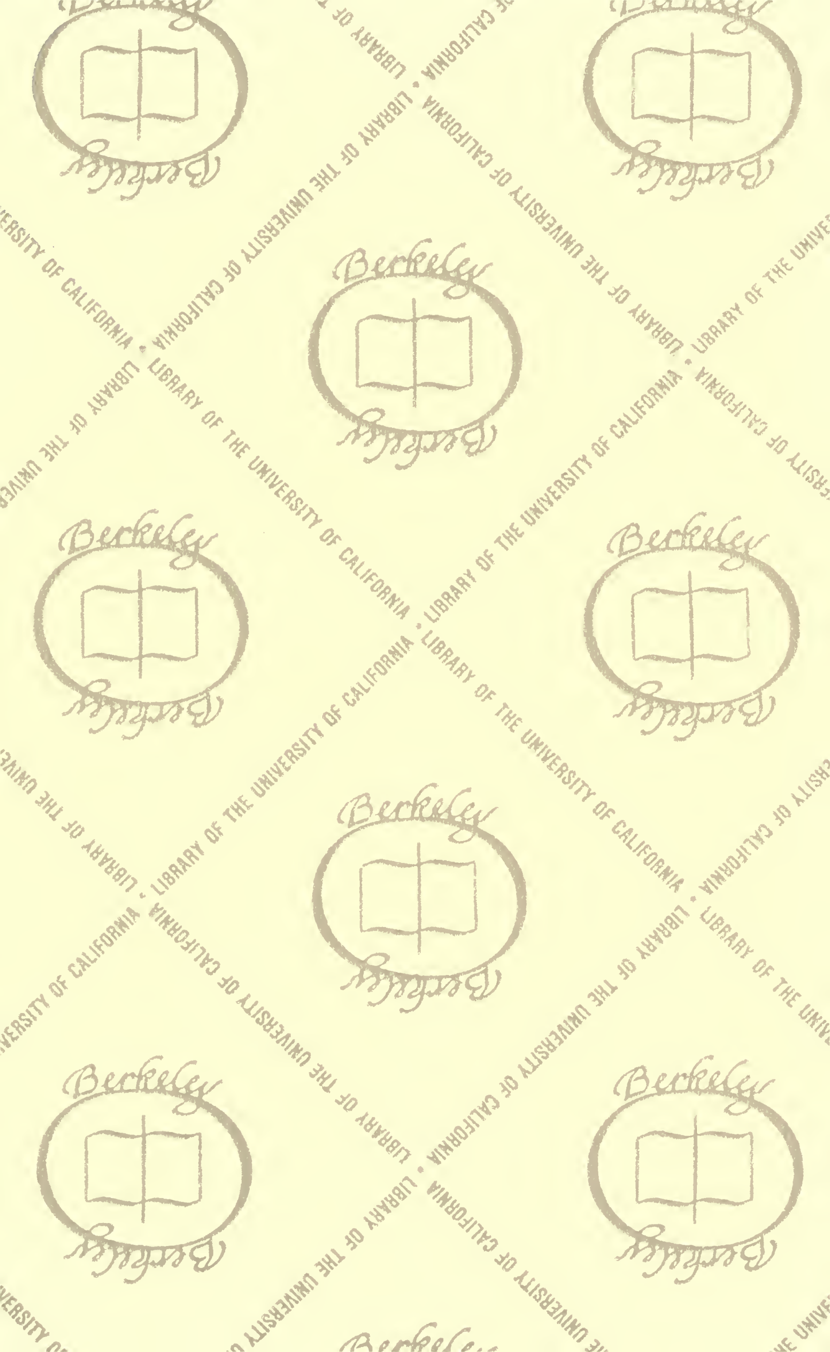

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
Berkeley


Berkeley
LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Sammlung Schubert LVI

Spezielle
Ebene Kurven

von

Dr. Heinrich Wieleitner
Gymnasiallehrer am hum. Gymnasium Speyer

Mit 189 Figuren im Text



Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1908



Spamersche Buchdruckerei in Leipzig

VORWORT.

Noch bis vor wenigen Jahren gab es weder in Deutschland noch anderswo eine zusammenfassende Darstellung der unzähligen, zerstreuten Arbeiten über spezielle Kurven. Das Bedürfnis einer solchen veranlaßte die Akademie der Wissenschaften zu Madrid im Jahre 1892 und wiederholt im Jahre 1895, die Herstellung eines Kataloges der speziellen Kurven, mit Angaben über deren Eigenschaften, Entdecker und Bearbeiter, als Preisaufgabe auszuschreiben. Dieser Anregung verdanken die beiden Werke von Gino Loria (*Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Leipzig, Teubner, 1902, XXI u. 744 S., gr. 8^0 mit 146 Fig. auf 17 Tafeln) und von F. Gomes Teixeira (*Tratado de las curvas especiales notables*, Mem. Acad. cienc. Madrid, tomo XXII, Madrid 1905, IX u. 632 S., gr. 8^0) ihre Entstehung. Das letztere Werk enthält auch zwei größere Kapitel über Raumkurven. Der Verfasser ist daran, von dem *Tratado* als Teil seiner *Gesammelten Werke* eine zweibändige französische Ausgabe zu veranstalten, deren erster Band, der die algebraischen ebenen Kurven behandelt, bereits erschienen ist (s. d. Zitat S. 108).

Die beiden Werke von Loria und Teixeira sind in ihrer Anlage ganz verschieden. Für Loria bildet das historische Moment den Hintergrund der Darstellung, Teixeira hält sich mehr an die Forderung eines Kurvenkataloges. Das vorliegende Büchlein möchte nun einen dritten Standpunkt einnehmen. Es will die Kurven zusammenstellen, ohne Rücksicht auf Ordnung und etwaige Transzendenz, nach ihrer Erzeugungsweise oder Definition. Freilich wird niemand annehmen dürfen, daß sich so eine Kette bilden ließe, wo logisch ein Glied aus dem andern hervorgeht. Es ist ein viel-

I*

verzweigtes Netzwerk geworden, in dem hoffentlich die Hauptfäden noch deutlich genug sich abheben. Denn um zusammenhanglose Sonderkapitel zu vermeiden, mußte ich zu jeder Hauptfamilie diejenigen Kurven hinzunehmen, die sich aus den ursprünglichen durch einfache Ableitungsverfahren (Inversion, Fußpunktskonstruktion usw.) ergaben.

Dabei habe ich noch zwei Behandlungsmethoden besonderes Augenmerk geschenkt und ihre Theorie von Grund aus, soweit ich sie nötig hatte, entwickelt: der Methode der kinematischen Geometrie und der Methode der natürlichen Koordinaten. Dieser Umstand dürfte, da sonst ja der Stoff vielfach mit dem der genannten Werke übereinstimmen muß, meinem Buche doch mehr den Charakter eines Lehrbuches geben.

Bezüglich der Literaturangaben und der historischen Hinweise konnte ich bei dem beschränkten Umfange, der andererseits für den Studierenden vielleicht auch wieder ein Vorteil ist, keine Vollständigkeit erstreben. Wer sich eingehender unterrichten will, wird immer auf die Hauptwerke zurückgreifen müssen. An den Stellen, wo ein Hinweis auf ein Werk über algebraische Kurven erwünscht schien, habe ich mir erlaubt, mein eigenes in dieser Sammlung erschienenes Buch unter *Alg. K.* zu zitieren.

Ich möchte an diesem Orte noch allen herzlich danken, die mich durch Zusendungen oder Auskünfte, deren ich leider eine Anzahl unbenützt lassen mußte, unterstützt haben. Insbesondere gebührt dieser Dank Herrn Prof. Dr. Doehlemann, der wieder mein Manuskript und Herrn Oberreallehrer Dr. E. Köstlin (Schw.-Gmünd), der eine Korrektur las. Beiden Herren, sowie Herrn Dr. P. Ernst (Wien) verdanke ich eine Reihe wertvoller Bemerkungen.

Speyer, Ende September 1908.

H. WIELEITNER.

INHALTS-VERZEICHNIS.

Die Abschnitt- und Paragraphenüberschriften sind in den Kolumnentiteln, die Nummern (halbfett) an der Bundstegseite angegeben. Ein Hinweis auf die Seitenzahlen konnte deshalb erübrigt werden.

I. Abschnitt.

Kissoiden.

§ 1. Begriff und allgemeine Eigenschaften.

§ 2. Die Fußpunktskurven der Mittelpunktkegelschnitte im allgemeinen.

§ 3. Die Lemniskaten von Booth und Bernoulli.

§ 4. Quartiken mit drei Inflexionsknoten.

II. Abschnitt.

Konchoiden.

§ 9. Gewöhnliche und schiefe Konchoiden. Grundbegriffe der kinematischen Geometrie.

§ 10. Konchoiden der Geraden.

§ 11. Die Schleifschieberbewegung und ihre Unterfälle.

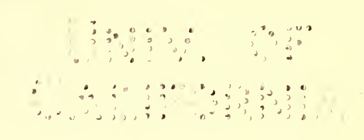
§ 12. Eine Familie von rationalen Quartiken mit unendlich fernem Doppelpunkt.

§ 13. Konchoiden des Kreises.

§ 25. **Die trochoidalen Kurven.**

§ 31. **Arcuiden.**

§ 32. **Einteilung der transzendenten Kurven.**



Es ist eine wahre Freude, den Eifer der alten Geometer anzusehen, mit dem sie diesen Eigenschaften der Linien dieser Art nachforschten, ohne sich durch die Frage eingeschränkter Köpfe irre machen zu lassen, wozu denn diese Kenntnis nützen sollte?

I. Kant.

I. ABSCHNITT.

KISSOIDEN.

§ 1. Begriff und allgemeine Eigenschaften.

1. Unter einer ebenen Kurve verstehen wir im folgenden den Inbegriff aller Bildpunkte (x, y) einer »gewöhnlichen« Funktion $y = f(x)$, d. h. einer Funktion, die nicht bloß stetig, sondern auch endlich oft differenzierbar und abteilungsweise monoton gegen jede als Abszissenachse genommene Richtung ist. Nur dann entsteht ein Gebilde, das dem gewöhnlichen Begriff der Kurve, als einer mit dem Stift zu zeichnenden Linie, entspricht. Die Kurve heißt »algebraisch« oder »transzendent«, je nachdem die Funktion $f(x)$ algebraisch oder transzendent ist. Die sogenannten »außerordentlichen« Kurven, die z. B. Funktionen entsprechen, welche, obwohl stetig, doch nirgends einen Differentialquotienten haben, oder die jeden Punkt eines endlichen Flächenstückes erreichen, gehören der Analysis und Funktionentheorie, bzw. Mengenlehre an.

Um Kurven zu erzeugen, verwendeten schon die Alten wesentlich zweierlei Methoden: geometrische und kinematische[1]). Die geometrischen Methoden können

---

[1]) S. die Abhdlg. von A. v. Braunmühl *„Hist. Studie über die organische Erzeugung eb. K. von d. ältesten Zeiten bis z. Ende d. 18. Jahrh.*, Katalog der math. Ausstellung, Nürnberg 1892, 54—88. Vgl. auch die beiden Bände von K. Doehlemann *„Geom. Transformationen“*, S. S. XXVII u. XXVIII, Leipzig 1902 u. 1908, bes. Bd. II.

wir in ebene und räumliche scheiden. Die Kurve wird entweder erzeugt durch Konstruktion aus gegebenen einfacheren Elementen (Punkten, Geraden, Kreisen usw.) oder als Schnitt bekannter Flächen gewonnen, wie die Kegelschnitte aus dem Kreiskegel. Bei der kinematischen Erzeugung wird die Bewegung eines Punktes (einer Geraden usw.) definiert und der Ort (die Einhüllende) des Elementes bestimmt. Dazu können wir, als mehr der neueren Zeit angehörig, eine dritte Erzeugungsart fügen: die analytische. Man legt der definierenden Funktion gewisse Bedingungen auf oder verlangt die Erfüllung bestimmter Beziehungen zwischen irgendwelchen Elementen der Kurve. Diese Forderungen führen, analytisch formuliert, entweder direkt zur Gleichung der Kurve oder zunächst zu einer Differentialgleichung, aus der sich die Kurvengleichung durch Integration ergibt. Die drei genannten Methoden sind natürlich nicht scharf getrennt, d. h. man kann gegebenenfalls etwa eine kinematische Methode oder eine analytische Forderung geometrisch deuten und umgekehrt.

2. Wir beginnen mit einer sehr einfachen Konstruktion, durch die eine große Familie von Kurven erzeugt werden kann. Es seien zwei beliebige Kurven Γ und Γ', sowie ein irgendwo liegender Punkt O gegeben. Man ziehe durch O eine Gerade G, die Γ in P, Γ' in P' schneide. Auf G mache man dann $OQ = OP' - OP$ für alle Schnittpunkte P bzw. P'. Dreht sich nun G um O, so beschreibt Q eine Kurve C, die wir die »Kissoide« von Γ und Γ' in bezug auf O nennen[2]). *Diese »kissoidale« Konstruktion besteht also, kurz gesagt, in der Subtraktion der Radienvektoren zweier gegebenen Kurven.* Natürlich ist hierin die Addition einbegriffen. Man brauchte ja nur die in bezug auf O zu Γ symmetrische Kurve Γ_0 zu verwenden. Doch ist die Subtraktion zur Diskussion bequemer. Insbesondere sieht man sofort die Richtigkeit

[2]) Nach L. C. Schulz von Strasznicki, Zeitschr. Phys. Math. Wien **8**, 1830, 179—188; G. Peano, *Appl. geom. del calc. inf.*, Turin (Bocca) 1887, S. 85/86. Der Name wird in Nr. 27 erklärt werden. — Andere Autoren, wie Ch. Wiener, J. Sobotka, sagen »verallgemeinerte Konchoiden«. Diese Bezeichnung reservieren wir für eine speziellere Kurvenfamilie (II. Abschnitt).

des Satzes ein: *Verbindet man die im Endlichen liegenden Schnittpunkte R von Γ und Γ′ mit O, so sind die Geraden OR Tangenten in O an die Kissoide C.* Sind demnach Γ bzw. Γ′ algebraische Kurven der m^{ten} bzw. n^{ten} Ordnung, so hat C in O im allgemeinen einen mn-fachen Punkt. Von dieser Zahl mn kommt die Zahl α in Abzug, wenn α der Schnittpunkte im Unendlichen liegen. Geht ferner Γ β-mal, Γ′ γ-mal durch O, so kommt auch noch die Zahl $\beta\gamma$ in Abrechnung. Der Punkt O ist also unter diesen Voraussetzungen für C ein $(mn-\beta\gamma-\alpha)$-facher. Um die Ordnung von C festzustellen, bestimmen wir zunächst die Anzahl der Punkte Q, die außerhalb O auf G liegen. Deren sind so viele, als es zwischen den $(m-\beta)$ Schnittpunkten P mit Γ und den $(n-\gamma)$ Schnittpunkten P' mit Γ′ Kombinationen gibt, d. i. $(m-\beta)(n-\gamma)$. Zählen wir hierzu die Ordnung der Vielfachheit des Punktes O, so ergibt sich die Ordnung ν von C. Daher haben wir den Satz:

Die Kissoide C zweier Kurven Γ, Γ′ m^{ter} bzw. n^{ter} Ordnung, die bzw. β- und γ-mal durch den Pol gehen und im Unendlichen α Schnittpunkte haben, ist von der Ordnung $\nu = [2mn - (\beta n + \gamma m + \alpha)]$.

3. Es gibt ein sehr einfaches Verfahren, an C die Tangente zu ziehen, wenn die Tangenten von Γ und Γ′ bekannt sind. Es seien nämlich Γ und Γ′ durch ihre Polargleichungen gegeben (in ϱ und θ), so sind die bezüglichen Polarsubnormalen

$$(\Gamma)\quad \mathcal{S}_n = d\varrho_1/d\theta\,, \qquad (\Gamma')\quad \mathcal{S}_n' = d\varrho_2/d\theta\,,$$

dann ist für C : $\varrho = \varrho_2 - \varrho_1$ und daher

$$\bar{\mathcal{S}}_n = d\varrho/d\theta = \varrho_2' - \varrho_1' = \mathcal{S}_n' - \mathcal{S}_n\,.$$

Für die Kissoide zweier Kurven ist also die Polarsubnormale gleich der Differenz der Polarsubnormalen in den entsprechenden Punkten der beiden Grundkurven.

Dadurch ist die Normale und somit auch die Tangente an C leicht zu konstruieren.

Auch das Krümmungszentrum von C läßt sich konstruktiv bestimmen, wenn die Krümmungszentren von Γ und Γ′ bekannt sind. Dazu ist nur nötig, daß man aus

$\mathcal{R}$ (Krümmungsradius) ϱ'', und umgekehrt, konstruieren könne. Nun ist aber bekanntlich

$$(1) \qquad \mathcal{R} = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''},$$

also

$$(1^*) \qquad \varrho'' = \varrho + \frac{2\varrho'^2}{\varrho} - \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho\mathcal{R}}.$$

Sei OP (Fig. 1) $= \varrho$, $OM = \varrho'$, dann ist $MP = (\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{1}{2}} = a$. Fällt man $MB \perp MP$, so ist $OB = \varrho'^2/\varrho$, $BP = (\varrho^2 + \varrho'^2)/\varrho = b$. Dann läßt sich (1*) schreiben

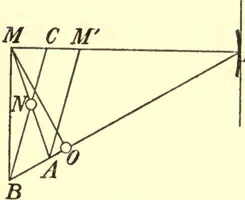


Fig. 1.

$$(2) \qquad \varrho'' = \frac{\varrho'^2}{\varrho} - b \cdot \frac{a - \mathcal{R}}{\mathcal{R}}.$$

Ist nun $CP = \mathcal{R}$, $CM' = MC$ und $M'A \parallel CB$, so wird $AB = b(a - \mathcal{R})/\mathcal{R}$ und $OA = \varrho''$ [3]).

Ist umgekehrt ϱ'' gegeben, so braucht man nur B mit dem Mittelpunkt N von MA zu verbinden, um den Krümmungsmittelpunkt C zu erhalten.

Da für die Kissoide $\varrho'' = \varrho_2'' - \varrho_1''$ ist, diese Strecken aber aus den Krümmungsradien $\mathcal{R}_2$ und $\mathcal{R}_1$ von Γ' und Γ konstruiert werden können, so läßt sich auch $\mathcal{R}$ konstruieren.

§ 2. Die Fußpunktskurven der Mittelpunktkegelschnitte im allgemeinen.

4. Um spezielle Kurven zu erhalten, nehmen wir zunächst als Grundkurven zwei Kreise K und K' mit den Radien r und R, den Pol O auf K. Da die beiden Kreise

---

[3]) Nach H. de Rhéville, Nouv. Ann. math. (3) **10**, 1891, 411/16. Dieselbe Konstruktion wurde von M. d'Ocagne auf anderem Wege abgeleitet und etwas ausgebaut. S. Journ. math. spéc. (4) **4**, 1895 3—7, 25/6; auch dess. Verf. „*Cours de geóm. descript. et infinit.*" Paris (Gauthier-Villars) 1896, 279—289. — Andere Konstruktionen bei J. Sobotka, *Beitr. z. inf. Geom. d. Integralkurven*, Stzgsb. Ak. Wien (math.-nat.) **107**, Abt. II a, Mai 1898 u. *Zur inf. Geom. einiger Plankurven*, Stzgsb. böhm. Ges. W. Prag 1898, XXVI; ferner bei Ch. Wiener, *Darst. Geom.* II. Bd., Leipzig (Teubner) 1887, S. 223.

zwei unendlich ferne Punkte, die imaginären Kreispunkte, gemein haben, wird die Ordnung von C nach Nr. 2 gleich $2 \cdot 2 \cdot 2 - (2 + 2) = 4$, O ein Doppelpunkt. Die Mittelpunkte M, M' der beiden Kreise mögen die Koordinaten $(\frac{1}{2} p, \frac{1}{2} q)$ und $(m, 0)$ haben (Fig. 2). Dann ist

$$\text{(K)} \quad \varrho_1 = p \cos\theta + q \sin\theta ,$$

$$\text{(K')} \quad \varrho_2 = m \cos\theta \pm \sqrt{R^2 - m^2 \sin^2\theta} .$$

Demnach

$$\text{(C)} \quad \varrho = (m - p) \cos\theta - q \sin\theta \pm \sqrt{R^2 - m^2 \sin^2\theta} .$$

Sei nun

$$\mathsf{E} \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

die Gleichung eines Mittelpunktkegelschnittes, wo für die Hyperbel im folgenden immer nur $i b$ statt b zu setzen wäre, und fällen wir von einem Punkte $O(\alpha, \beta)$ auf sämtliche Tangenten von E die Lote, so beschreiben die Fußpunkte dieser Lote die »Fußpunktskurve« F von E in bezug auf O. Ist u die exzentrische Anomalie der Ellipse, so läßt sich die Tangentengleichung schreiben

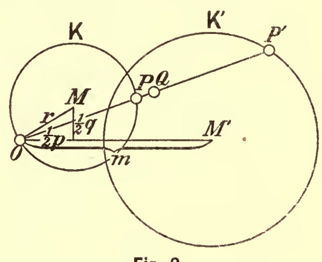


Fig. 2.

$$\text{(1)} \qquad \frac{x \cos u}{a} + \frac{y \sin u}{b} - 1 = 0 .$$

Die Gleichung der Senkrechten aus O lautet dann

$$\text{(2)} \qquad \frac{x - \alpha}{b} \sin u - \frac{y - \beta}{a} \cos u = 0 .$$

Die Elimination von u aus (1) und (2) gibt

$$\text{(3)} \quad \mathsf{F} \equiv [x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y)]^2 - a^2 (x - \alpha)^2 - b^2 (y - \beta)^2 = 0$$

als Gleichung der gesuchten Fußpunktskurve. Verlegt man den Koordinatenanfangspunkt nach O, so wird die Gleichung von F

$$\text{(3*)} \quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2 + y^2)^2 + 2(\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) + (\alpha^2 - a^2) x^2 \\ &\qquad + 2 \alpha \beta x y + (\beta^2 - b^2) y^2 = 0 . \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung gibt zu Polarkoordinaten transformiert

$$(4)\qquad \varrho = -(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) \pm \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\theta}\,.$$

F ist also mit C zu identifizieren, wenn man setzt

$$(\text{IV})\quad \begin{cases} \alpha = p - m \\ \beta = q \end{cases} \left| \begin{array}{l} a = R \\ b = \sqrt{R^2 - m^2} \end{array} \right| \begin{array}{l} p = \alpha \pm e \\ q = \beta \end{array} \left| \begin{array}{l} R = a \\ m = \pm e\,. \end{array} \right.$$

Daher können wir sagen: *Jede Fußpunktskurve einer Ellipse oder Hyperbel kann betrachtet werden als Kissoide zweier verschiedenen reellen Kreispaare mit dem Pol auf einem der beiden Kreise.*

5. Daß die Kissoide zweier Kreise, von einem Punkte des einen Kreises aus genommen, eine Fußpunktskurve eines Kegelschnittes gibt, hat einen tieferen Grund. Vor allem ist aus der Erzeugung klar, und die Gleichung (3) zeigt es, daß die Kissoide in den imaginären Kreispunkten Doppelpunkte hat. Sie ist also eine »bizirkulare rationale Quartik« Q. Eine solche entsteht aber aus einem Kegelschnitt E′ durch zirkulare Inversion (Transformation durch reziproke Radien) von dem dritten Doppelpunkt O aus. Es sei A ein Punkt von E′, A' der konjugierte auf OA in bezug auf den Inversionskreis M, so beschreibt A' die Quartik Q. Ist T die Polare von A in bezug auf M, so geht T durch A' und steht senkrecht auf OA. T umhüllt aber den polarreziproken Kegelschnitt E von E′ in bezug auf M. Daher ist Q Fußpunktskurve von E[4]).

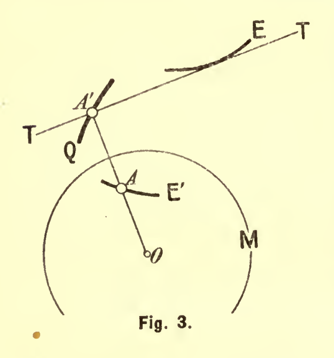


Fig. 3.

[4]) Vgl. *Algebr. K.* § 40. — Daß jede biz. rat. Quartik sich in der angegebenen Weise erzeugen lasse, wurde zuerst von G. Teixeira, Ann. di mat. (3) **11**, 1905, 9—28 angegeben. Teixeira findet noch zwei weitere imaginäre Grundkreispaare, die bei unserer Behandlung nicht ersichtlich werden, da wir von vornherein das Achsenkreuz so um O drehten, daß es dem Kreuz der Hauptachsen des Kegelschnittes parallel lag. Die folgende geom. Herleitung ist nach der von V. Retali im Interméd. math. **14**, 1907, 118/9 gegebenen etwas vereinfacht.

Das eben Gesagte läßt eine Verallgemeinerung zu, die wir später oft benutzen werden. Wir haben nach Fig. 3 sofort den Satz: *Die Fußpunktskurve* Q *irgend einer Kurve* E *in bezug auf einen Pol O ist die Inverse der Polarreziproken* E′ *von* E *in bezug auf einen Kreis* M *um O*.

Wir geben ferner noch eine direkte geometrische Herleitung der kissoidalen Erzeugung der Fußpunktskurve eines Kegelschnittes. Auch diese geht aus einer allgemeineren Betrachtung hervor, die uns später (Nr. 109) wieder von Nutzen sein wird. Es sei E irgend eine Kurve (Fig. 4) und P beschreibe die Fußpunktskurve F des Poles F in bezug auf E. Ist dann O ein anderer Pol, Q der P entsprechende Fußpunkt auf derselben Tangente und fällen wir $OA \perp FP$, so ist immer

$$OQ = FP - FA,$$

während A auf dem Kreise läuft, der OF zum Durchmesser hat. Also können wir sagen: *Die Fußpunktskurve* Φ *eines Poles O in bezug auf eine Kurve* E *ist die Kissoide der Fußpunktskurve* F *in bezug auf den Pol F und des Kreises mit dem Durchmesser OF*. Ist nun E ein Kegelschnitt, F ein Brennpunkt desselben, so ist bekanntlich F der Scheitelkreis über der großen Achse von E, und wir haben sofort die kissoidale Erzeugung von Φ aus zwei Kreisen. Soll Φ gleich die richtige Lage haben, so müssen wir nur beide Kreise um die Strecke FO der Größe und Richtung nach verschieben.

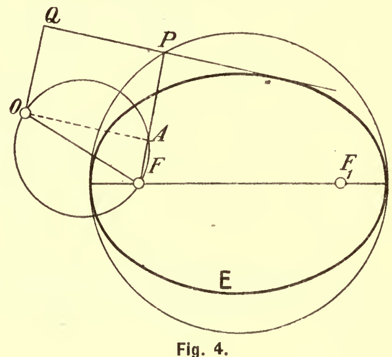


Fig. 4.

Zus. Setzt man in (3*) $\alpha = e$, $\beta = 0$, so trennt sich der Faktor $(x^2 + y^2)$ ab und es ergibt sich wirklich die Gleichung des Scheitelkreises. Setzt man aber $\alpha = 0$, $\beta = ei$, nimmt also einen der imaginären Brennpunkte des Kegelschnittes als Pol, so trennt sich wieder $(x^2 + y^2)$ ab und es kommt als Fußpunktskurve der (im Falle der Ellipse reelle) Scheitelkreis über der kleinen Achse als Durchmesser. Dies scheint bisher unbeachtet geblieben zu sein. Wir werden aber später davon Gebrauch machen (Nr. 155).

6. Es ist leicht nach (IV) oder mittels der geometrischen Herleitung, deren Resultate sich mit (IV) decken, zu irgend einem Kreispaar und Pol den zugehörigen Kegelschnitt, und umgekehrt, anzugeben. Liegt der Pol innerhalb des einen Kreises, so entsteht die Fußpunktskurve einer Ellipse, liegt er außerhalb, die einer Hyperbel. Ein eingehenderes Studium der Figuren 5 und 6 wird alle Einzelheiten klarstellen. Die Kreise sind dort so gewählt, daß sie sich reell schneiden, also Knoten auftreten. Die

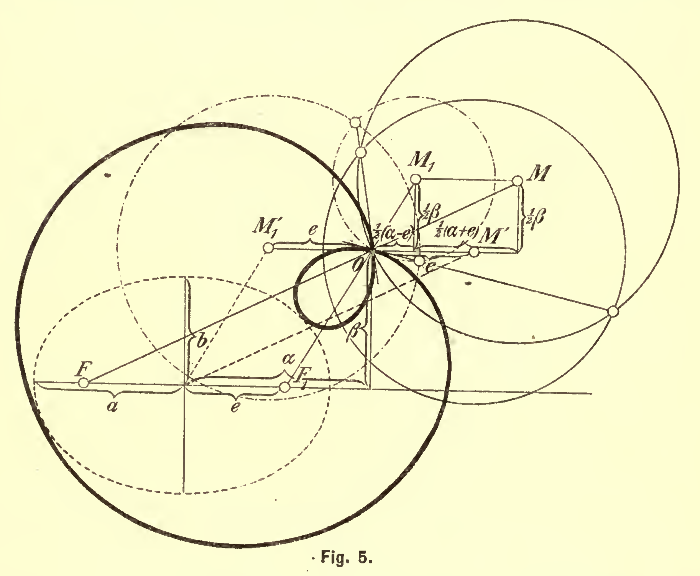


Fig. 5.

analytische Bedingung hierfür ist, daß die Diskriminante Δ des Ausdruckes $(\alpha^2 - a^2)\,x^2 + 2\,\alpha\,\beta\,x\,y + (\beta^2 - b^2)\,y^2$ positiv sei. Nun ist $\Delta \equiv a^2 b^2 (\alpha^2/a^2 + \beta^2/b^2 - 1)$. Es kommt also darauf an, daß $O(\alpha\,,\,\beta)$ nicht im Inneren von E liege. Berühren sich die Kreise, so entsteht eine Spitze, die bei der Ellipse nach innen, bei der Hyperbel nach außen gerichtet ist. Die Formen mit isoliertem Punkt sind in den Figuren 76, 77 der Nrn. 116/17 gegeben.

7. Die in Rede stehenden Kurven haben eine Eigenschaft, die eine Erweiterung des Sekantensatzes am Kreise darstellt. Nämlich:

Zieht man durch irgend einen Punkt A beliebige Strahlen, so hat das Produkt der auf einem Strahl gemessenen von A ausgehenden vier Radienvektoren einen konstanten Wert.

Um dies zu beweisen, lege man das Achsenkreuz nach A. Dann habe die Kurve die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2+\dots+\Pi=0\,.$$

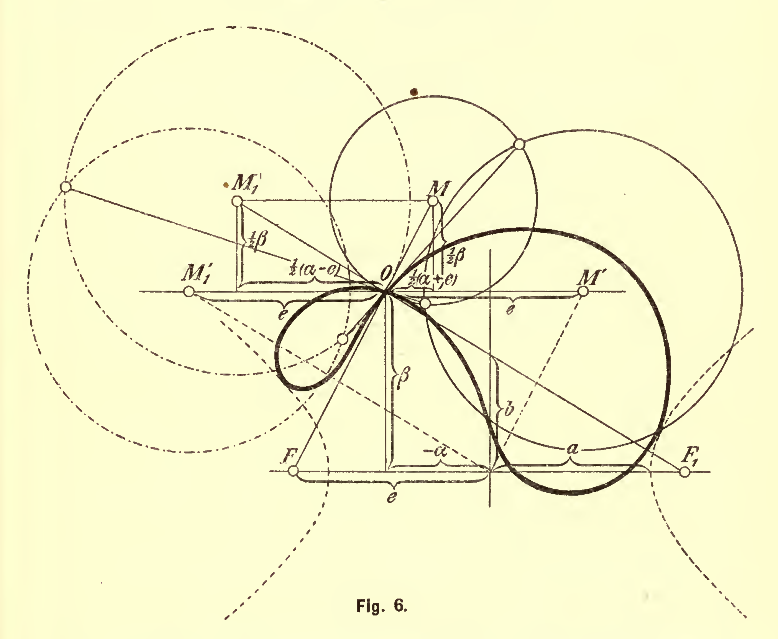


Fig. 6.

Schneidet man sie nun mit $y=x\operatorname{tg}\theta$, so erhält man für die Abszissen der Schnittpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 eine Gleichung, die $x_1 x_2 x_3 x_4 = \Pi/(1+\operatorname{tg}^2\theta)^2 = \Pi\cos^4\theta$ liefert. Nun ist aber $x_i = AS_i\cos\theta$ und also

$$AS_1\cdot AS_2\cdot AS_3\cdot AS_4=\Pi$$

unabhängig von θ.

Es ist sofort ersichtlich, daß derselbe Satz auf alle Kurven ausgedehnt werden kann, deren höchste Glieder in x, y $(x^2+y^2)^n$ sind, die also, sofern nicht die unendlich ferne Gerade selbst (Doppel-) Tangente ist, in jedem Kreispunkt einen n-fachen Punkt haben. Wir wollen

solche Kurven »Potenzkurven« nennen. Ihre charakteristische Eigenschaft fassen wir in den Satz:

Alle Kurven $2n^{ter}$ Ordnung, die keine anderen unendlich fernen Punkte besitzen als die Kreispunkte, haben eine Potenz in bezug auf alle Punkte der Ebene[5]).

Ist $F(x, y) = 0$ die Gleichung der Potenzkurve, so ist der Wert der Potenz eines Punktes $A(\mu, \nu)$ offenbar $F(\mu, \nu) = \Pi$. Die Gleichung $F(x, y) = \Pi$ stellt daher den Ort gleicher Potenz Π für die Kurve $F(x, y) = 0$ dar. Beim Kreise ist dies einfach ein konzentrischer Kreis. Überhaupt haben diese »Kurven gleicher Potenz« mit der Grundkurve und untereinander keinerlei im Endlichen liegenden Schnittpunkte gemein (vgl. *Alg. K.* § 24). In den imaginären Kreispunkten verhalten sie sich aber wie die Grundkurve. Genauer: Auf jedem Zweig durch einen Kreispunkt liegen $2n$ konsekutive, koinzidierende Schnittpunkte. Das gibt für die $2n$ Zweige in der Tat $(2n)^2$ Schnittpunkte. Für die Fußpunktskurven der Kegelschnitte sind demnach die Kurven gleicher Potenz allgemeine bizirkulare Quartiken.

8. Bevor wir zu ausgezeichneten Typen unserer Fußpunktskurven übergehen, sei noch ein Wort über ihre Fläche gesagt. *Als Fläche einer Kurve faßt man ganz allgemein die algebraische Summe aller Flächenelemente auf, die der Radiusvektor überstreicht, wenn sein Endpunkt den geschlossenen, im übrigen sich beliebig selbst durchsetzenden Linienzug beschreibt*[6]). In diesem Sinne erhalten wir bei den Formen mit Knoten im Falle der Ellipse die Summe der beiden Blätter, im Falle der Hyperbel die Differenz derselben. In den Fällen mit Spitze und isoliertem Punkt ergeben sich Flächen im eigentlichen Sinne.

Heißt man die zwei Radienvektoren, die den beiden Zeichen der Wurzel entsprechen, ϱ_1 und ϱ_2, so ist nach (4)

---

[5]) J. Petersen, Tidsskr. Math. (2) **5**, 1869; später ausführl. Unters. über d. Gegst. von F. P. Ruffini, Mem. Acc. Bologna (4) **10**, 1890; neuerdings hat das Problem gestellt S. Gundelfinger, Arch. Math. Phys. (3) **2**, 1902, 356 [Antworten s. ebd. **3**, 84, 172, 309; **4**, 352]. Auch der Name »isotropische Kurven« ist in Gebrauch.

[6]) Gauss in Schumachers Übersetzung von Carnots *Géom. de pos.* II, S. 362; Möbius, *Baryz. Kalkül* 165, Anm.; *Statik* 45.

A) für die elliptische Fußpunktskurve:

$$\mathcal{F}_E = \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\varrho_1^2 + \varrho_2^2)\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)\cos^2\theta + 2\alpha\beta\sin\theta\cos\theta + (b^2 + \beta^2)]\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\tfrac{1}{2}(a^2 - b^2 + \alpha^2 - \beta^2)(1 + \cos 2\theta) + \alpha\beta\sin 2\theta + (b^2 + \beta^2)]\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2)\,d\theta \quad \left\{ \begin{array}{l}\text{(denn die anderen In-}\\ \text{tegrale verschwinden)}\end{array}\right.$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2)\,.$$

Man hat ferner

B) für die hyperbolische Fußpunktskurve:

$$\mathcal{F}_H = \tfrac{1}{2}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\,d\theta \quad \left(\text{wobei} \quad \sin\theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

$$= 2\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)\sqrt{a^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= 4\alpha\int_0^{\theta_0}\cos\theta\sqrt{a^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\theta}\,d\theta \quad \left\{ \begin{array}{l}\text{(das andere Inte-}\\ \text{gral verschwindet)}\end{array}\right.$$

$$= 2\alpha\left\{\sin\theta\sqrt{a^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\theta} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\sin\theta\right)\right\}_0^{\theta_0}$$

$$= \frac{a^2\alpha\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ {}^{7)}\,.$$

Fragen wir nach dem Orte des Punktes $O(\alpha, \beta)$ bei konstanter Fläche $\mathcal{F}$ der Fußpunktskurve, so sehen wir, daß

[7]) Dieses Resultat wurde wohl zuerst von E. Malo (Interméd. math. **12**, 1905, 187/9) angegeben, aber auf einem umständlicheren und nur für die Hyperbel passenden Wege, durch Infinitesimalbetrachtungen später von demselben Arch. Math. (3) **12**, 1907, 345/8; auf dem obigen Weg vom Verfasser, Ann. Ac. Polyt. Porto **2**, 1907.

dieser für die Ellipse ein Kreis um O[8]) mit dem Radius $[2\mathcal{F}/\pi-(a^2+b^2)]^{\frac{1}{2}}$, für die Hyperbel eine Parallele zur Nebenachse im Abstande $\mathcal{F}\sqrt{a^2+b^2}/a^2\pi$ ist. Für die Punkte der Nebenachse selbst ist $\mathcal{F}=0$ wegen der Symmetrie.

§ 3. Die Lemniskaten von Booth und Bernoulli.

9. Ausgezeichnete Typen unserer Fußpunktskurven ergeben sich, wenn wir 1. dem Pol spezielle Lagen erteilen, 2. spezielle Kegelschnitte zugrunde legen. Wir fassen zunächst die erste Möglichkeit ins Auge und betrachten den besonderen Fall, daß der Pol mit dem Mittelpunkt des Kegelschnittes zusammenfällt. Die Kurve ist dann zu beiden Achsen symmetrisch und heißt »Boothsche Lemniskate«[9]). Ihre Gleichung ist $[\alpha=\beta=0]$



(1) $$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2\,.$$

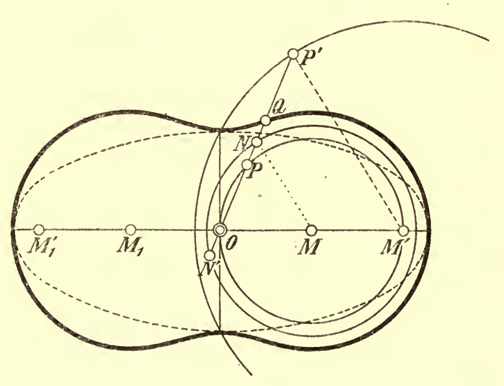


Fig. 7.

Da $p=m=\pm e$, $q=0$, $R=a$, $r=\frac{1}{2}e$ wird, so liegt der Mittelpunkt des einen erzeugenden Kreises M in der halben Brennweite, der andere fällt mit dem Brenn-

[8]) Wir erwähnen nur, daß dieser Satz überhaupt für geschlossene Kurven gilt. O ist im allgemeinen der sog. Krümmungsschwerpunkt. S. Loria, S. 677/9.

[9]) J. Booth, *A treatise on some new geometrical methods* I, London 1873, S. 162ff.

punkte M' zusammen (Fig. 7 u. 8). Das zweite Kreispaar ist zum ersten in bezug auf die Nebenachse symmetrisch. Macht man nun auf irgend einem Strahl $OQ = OP' - OP$, so kann man bemerken, daß der Mittelpunkt N von PQ von M die konstante Entfernung $\frac{1}{2} P'M' = \frac{1}{2} a$ hat. Beschreibt man den Kreis um M mit $\frac{1}{2} a$ als Radius und nennt man den zweiten Schnittpunkt von ON mit diesem Kreis N', so ist $N'O = PN = NQ$. Daher wird $OQ = ON - ON' = N'N$ (in beiden Fig. 7. u. 8).

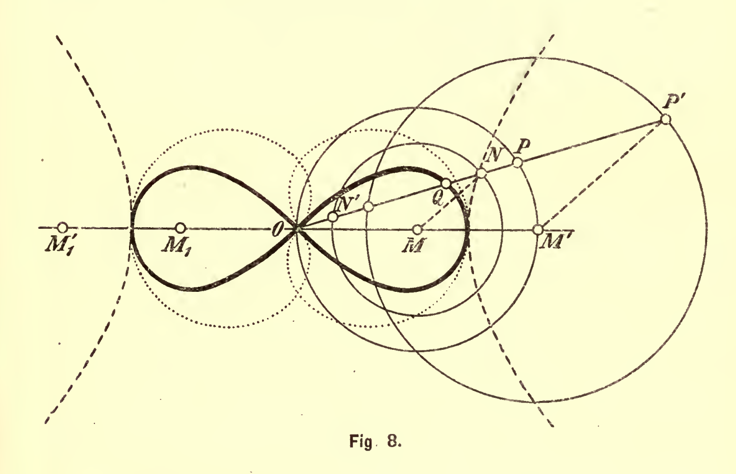


Fig. 8.

Man erhält also eine Boothsche Lemniskate, wenn man die auf den Strahlen durch einen festen Punkt liegenden Sehnen eines Kreises von diesem Punkt aus als Radienvektoren anträgt.

10. Die Tangenten des Doppelpunktes O sind gegeben durch $a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0$, liegen also so zur Nebenachse, wie die Asymptoten $[x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0]$ des Kegelschnittes zur Hauptachse. Sie sind reell im Falle der Hyperbel, imaginär bei der Ellipse. Immer aber ist O ein »Inflexionsknoten«, d. h. beide Zweige haben in ihm einen Wendepunkt. Denn jede der beiden Doppelpunktstangenten $[a x \pm i b y = 0]$ schneidet in vier koinzidierenden Punkten, da die Glieder dritter Ordnung in der Gleichung fehlen; jede berührt also dreipunktig, weil ein Schnittpunkt durch den zweiten Zweig veranlaßt wird.

Um auch die zwei anderen Doppelpunkte in den imaginären Kreispunkten J und J' näher zu untersuchen, transformieren wir die Gleichung (1) auf das Koordinatendreieck OJJ', d. h. wir setzen

$$(OJ)\ x + iy = \xi, \quad (OJ')\ x - iy = \eta, \quad (JJ')\ z = \zeta (=1).$$

Dann wird aus (1)

$$(1^*) \qquad 4\,\xi^2\eta^2 - a^2\zeta^2(\xi+\eta)^2 + b^2\zeta^2(\xi-\eta)^2 = 0\,.$$

Die niedrigsten Glieder in ξ, ζ und η, ζ, d. h. die Koeffizienten der höchsten Potenz von η bzw. ξ geben die Doppelpunktstangenten in J und J'. Diese sind also: $4\,\xi^2 - (a^2 - b^2) = 0$ und $4\,\eta^2 - (a^2 - b^2) = 0$ oder

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi = x + iy = \pm\frac{1}{2}e \\ \eta = x - iy = \pm\frac{1}{2}e\,. \end{cases}$$

Spitzen wären also in J und J' nur dann, wenn $a^2 = b^2$ wäre (Kreis). Dann läßt sich aber von (1) der Faktor $(x^2 + y^2)$ abscheiden. Setzt man ferner in (1*) etwa $\xi = \pm\frac{1}{2}e\,\zeta$, so trennt sich naturgemäß der Faktor ζ dreimal ab. Für den vierten Schnittpunkt der Doppelpunktstangente mit der Kurve bleibt aber die Gleichung $e(a^2 - b^2)\zeta \pm 4(a^2 + b^2)\eta = 0$, die nur dann auch mit $\zeta = 0$ zusammenfällt, wenn $a^2 = -b^2$ (gleichseitige Hyperbel). Dann sind also auch die Kreispunkte Inflexionsknoten. *Die Fußpunktskurve der gleichseitigen Hyperbel mit der Gleichung*

$$(3) \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

oder in Polarkoordinaten

$$(3^*) \qquad \varrho = a\sqrt{\cos 2\,\theta}$$

hat drei Inflexionsknoten, wovon zwei in den imaginären Kreispunkten liegen. Sie ist die bekannte Bernoullische Lemniskate (Fig. 8)[10].

Die Inverse in bezug auf einen Kreis vom Radius l um O, deren Aufstellung im allgemeinen Falle wir dem Leser über-

[10]) Jak. Bernoulli, Act. Erud. Sept. 1694. — Zu ihrer Erzeugung als Kissoide aus einem Kreise um M mit Radius $MN = r = \frac{1}{2}a$ ist der feste Punkt O im Abstande $OM = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ von M zu nehmen. Diese Konstr. wird C. Maclaurin zugeschrieben. Die Gleichung in ξ, η, ζ lautet: $2\,\xi^2\eta^2 - a^2\xi^2\zeta^2 - a^2\eta^2\zeta^2 = 0$.

lassen, ist für (3*) $\varrho = l^2/a\sqrt{\cos 2\theta}$ oder $x^2 - y^2 = l^4/a^2$. Das ist eine zur ursprünglichen gleichseitigen Hyperbel homothetische gleichseitige Hyperbel; sie ist nach Nr. 5 zur ursprünglichen auch polarreziprok und für $l = a$ mit ihr sogar identisch.

11. Nach J. PLÜCKERS Definition nennt man ganz allgemein »Brennpunkte« einer Kurve die Schnittpunkte der an die Kurve von den imaginären Kreispunkten zu legenden Tangenten. Diese Punkte erfüllen oft wichtige metrische Relationen. In unserem Falle interessieren uns besonders die »außerordentlichen Brennpunkte«, die Schnittpunkte der vier Doppelpunktstangenten in J und J'. Aus (2) erhalten wir für deren Koordinaten

$$(3^\dagger) \qquad \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2}e \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = \pm\frac{1}{2}e\,i\,. \end{vmatrix}$$

Die vier außerordentlichen Brennpunkte einer Boothschen Lemniskate liegen also auf den Achsen in der halben Entfernung der Brennpunkte des Grundkegelschnittes. Sie sind die Mittelpunkte der erzeugenden Kreise, die nicht durch O gehen. Dies für die zwei imaginären nachzuweisen, sowie die Aufsuchung der gewöhnlichen Brennpunkte und der Brennpunkte der allgemeinen Fußpunktskurve eines Kegelschnittes überlassen wir dem Leser.

Wir verbinden die zwei reellen Brennpunkte M und M_1 mit einem Punkte $Q(x, y)$ der Kurve. Dann ist

$$\overline{MQ}^2 \cdot \overline{M_1Q}^2 = [(x - \tfrac{1}{2}e)^2 + y^2] \cdot [(x + \tfrac{1}{2}e)^2 + y^2]$$
$$= (x^2 + y^2)^2 + \tfrac{1}{2}e^2(x^2 + y^2) - e^2x^2 + \tfrac{1}{16}e^4$$

und wegen (1)

$$= \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) + \tfrac{1}{16}e^4\,.$$

Die Boothschen Lemniskaten genügen also folgender Relation

$$(4) \qquad \overline{MQ}^2 \cdot \overline{M_1Q}^2 = \overline{OM}^4 + \Lambda \cdot \overline{OQ}^2\,.$$

Im Falle der Bernoullischen Lemniskate ist $\Lambda = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 0$ und man erhält die bekannteste Eigenschaft dieser Kurve

$$(5) \qquad MQ \cdot M_1Q = \overline{OM}^2\,.$$

12. Die Fläche der Boothschen Lemniskate ist im elliptischen Falle $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2)$[11], im hyperbolischen Falle Null. Will man bei einer Kurve der letzteren Art die Fläche eines einzelnen Blattes, so hat man $\int \varrho^2 \, d\theta$ zwischen den Grenzen 0 und $\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$ zu nehmen. Es ergibt sich

$$\mathcal{F} = \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} (a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \left\{\tfrac{1}{2}(a^2 - b^2) + \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)\sin 2\,\theta\right\}_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} = \tfrac{1}{2}(a^2 + a\,b - b^2)\,.$$

Die hyperbolische Boothsche Lemniskate ist also elementargeometrisch quadrierbar. Ein Blatt der Bernoullischen Lemniskate hat die Fläche $\frac{1}{2}a^2$.

13. Aus Gleichung (3*) erhält man $\varrho' = -a\sin 2\,\theta/\sqrt{\cos 2\,\theta}$. Nennt man μ (μ') den Winkel zwischen Tangente (Normale) und Radiusvektor, ν den Winkel der Normale mit der Achse, so ist

$$\operatorname{tg}\mu = \varrho/\varrho' = -\operatorname{ctg} 2\,\theta\,,$$

aber $\mu = \mu' + \frac{1}{2}\pi$ und folglich $\mu' = 2\theta$, woraus sofort

$$\nu = 3\,\theta \tag{6}$$

sich ergibt. *Bei der Bernoullischen Lemniskate ist also der Winkel der Normale gegen die Achse das Dreifache des Polarwinkels*[12].

Da ferner

$$ds = a\,d\theta/\sqrt{\cos 2\,\theta} \tag{7}$$

und $\mathcal{R}\,d\nu = ds$, so ergibt sich

$$\mathcal{R} = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2\,\theta}} = \frac{a^2}{3\,\varrho}\,. \tag{8}$$

Das Produkt $\mathcal{R}\varrho$ hat also den konstanten Wert $\frac{1}{3}a^2$. Die Gleichungen (6) und (8) geben eine sehr einfache Kon-

---

11) Allgemein gilt der Satz: *Die Fläche der Fußpunktskurve in bezug auf einen beliebigen Punkt O ist gleich der Fläche der Fußp.-K. in bezug auf den Krümmungsschwerpunkt S, vermehrt um die Fläche des Halbkreises über OS* (Loria S. 679).

12) Vechtmann, *Diss. inaug. phil. de curvis lemniscatae,* Göttingen 1843.

struktion von Tangente und Krümmungsradius speziell für die Bernoullische Lemniskate. Wir wollen aber hier gleich die zwischen $\mathcal{R}$ und s bestehende Relation ableiten, indem wir aus (7) und (8) θ eliminieren. Diese Relation heißt man die »natürliche Gleichung« der Kurve. Sie wird später, besonders bei transzendenten Kurven eine wichtige Rolle spielen, weil sie eine von jedem Koordinatensystem unabhängige Definition der Kurve gibt (vgl. Nr. 122). Man erhält aus (8)

$$d\theta = \frac{a^2\, d\mathcal{R}}{\mathcal{R}\sqrt{81\,\mathcal{R}^4 - a^4}}$$

und dann schließlich

$$s = 3\int \frac{d\mathcal{R}}{\sqrt{\left(\frac{\mathcal{R}}{\frac{1}{3}a}\right)^4 - 1}}\,. \tag{9}$$

Der Wert $\mathcal{R} = \frac{1}{3}a$ ist das Minimum für den Krümmungsradius in den Scheiteln. Allgemein findet man, daß

$$\mathcal{R}\cos\mu' = \mathcal{R}\cos 2\,\theta = \tfrac{1}{3}\,\varrho$$

ist. D. h. *die Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvektor ist gleich dem dritten Teil des Radiusvektors.* Diese Eigenschaft, sowie die durch Gleichung (6) gegebene, charakterisiert die Kurve als eine spezielle »Sinusspirale« (vgl. Nr. 92).

Zusätze. 1. Für den Polarwinkel des Radiusvektors, der ein halbes Blatt einer Bernoullischen Lemniskate im Verhältnis $\lambda : \mu$ teilt, ist $\sin 2\,\theta = \lambda/(\lambda + \mu)$[13]. Die Teilung ist also, wie die Quadratur, mit Zirkel und Lineal ausführbar.

2. Zieht man ein System von Parallelen zur Hauptachse der Bernoullischen Lemniskate und seien E, F irgend zwei nicht zur Nebenachse symmetrische Schnittpunkte, so liegen die Mittelpunkte aller Kreise (EOF) auf dem Kreise um O durch die Brennpunkte. Daraus fließt folgende Konstruktion[14]) der Lemniskate: In einem Kreise über MM_1 als Durchmesser ziehe man alle zu MM_1 senkrechten Sehnen AA_1 und über ihnen als Durchmesser die Kreise. Diese bringe man zum Schnitt mit den Kreisen um A (bzw. A_1), die durch den Mittelpunkt O von MM_1 gehen. Die Schnittpunkte E, F beschreiben die Lemniskate.

---

[13]) Bierens de Haan, *Diss. inaug. de Lemniscata Bernoulliana,* Amsterdam 1874.

[14]) S. die vom Verfasser gestellte Aufgabe nebst Lösungen im Arch. Math. (3) **12,** 1907, 277/81.

§ 4. **Quartiken mit drei Inflexionsknoten.**

14. Die Bernoullische Lemniskate legt es nahe, nach allen Kurven vierter Ordnung zu fragen, die wie sie mit drei Inflexionsknoten ausgestattet sind. Diese Kurvenfamilie besitzt eine Reihe allgemeiner Eigenschaften, auf deren Darlegung wir jedoch verzichten müssen[15]. Wir begnügen uns hier eine gemeinsame projektive Erzeugung dieser Quatriken zu geben und werden aus ihr einige Typen, denen eine besonders einfache metrische Erzeugung zukommt, herleiten.

Das Dreieck der Inflexionsknoten $O_1 O_2 O_3$ sei das Fundamentaldreieck für homogene Punkt- und Linienkoordinaten $(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3)$. Es sei ein Polardreieck eines Kegelschnittes Φ, dessen Gleichung in Linien- bzw. Punktkoordinaten dann lauten muß

$$(1) \qquad \Phi \equiv \begin{cases} \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0 \\ \alpha_1^{-1} x_1^2 + \alpha_2^{-1} x_2^2 + \alpha_3^{-1} x_3^2 = 0 . \end{cases}$$

Wir bestimmen zu jeder Tangente T von Φ den Pol P in bezug auf das Grunddreieck. Dieser Pol[16] beschreibt dann eine Kurve der verlangten Art.

Hat T die Koordinaten v_1, v_2, v_3 und betrachten wir das Grunddreieck als Kurve dritter Klasse mit der Gleichung $\Delta \equiv u_1 u_2 u_3 = 0$, so sind die Koordinaten von P durch $(\partial \Delta / \partial u_i)_{u_i = v_i}$ gegeben:

$$(2) \qquad \vartheta x_1 = v_2 v_3 , \quad \vartheta x_2 = v_3 v_1 , \quad \vartheta x_3 = v_1 v_2 .$$

Hieraus erhält man umgekehrt

$$(3) \qquad v_1^2 = \vartheta x_1^{-1} x_2 x_3 , \quad v_2^2 = \vartheta x_1 x_2^{-1} x_3 , \quad v_3^2 = \vartheta x_1 x_2 x_3^{-1} .$$

Setzt man diese Werte in (1), so ergibt sich die Gleichung der von P beschriebenen Kurve

$$(4) \qquad \mathsf{Q} \equiv \alpha_1 x_2^2 x_3^2 + \alpha_2 x_3^2 x_1^2 + \alpha_3 x_1^2 x_2^2 = 0 .$$

Diese Kurve Q hat in der Tat z. B. in der Ecke O_3 einen Doppelpunkt mit dem Tangentenpaare $\alpha_1 x_2^2 + \alpha_2 x_1^2 = 0$,

---

[15]) S. Laguerre, Nouv. Ann. math. (2) **17**, 1878 und vor allem Schoute, Arch. Math. Phys. (2) **2**, **3**, **4**, **6**, 1885/7.

[16]) Schneidet T $O_1 O_2$ in S_3, so liegt P auf dem zu $O_3 O_1$, $O_3 O_2$, $O_3 S_3$ harmonischen Strahl. Ebenso für die übrigen Ecken.

das die Kurve in keinem weiteren Punkte mehr trifft. Jede Tangente ist also Wendetangente. Ebenso ist es in den beiden anderen Ecken.

Die Gleichung der Kurve Q zeigt, besonders wenn man sie in der Form

$$(4^*) \qquad \mathsf{Q} \equiv \alpha_1 x_1^{-2} + \alpha_2 x_2^{-2} + \alpha_3 x_3^{-2} = 0$$

schreibt, daß sie durch quadratische Transformation $[\varsigma x_i' = x_i^{-1}]$ aus dem Kegelschnitte

$$(5) \qquad \Psi \equiv \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 0$$

hervorgeht. Dieser Kegelschnitt Ψ, der das Grunddreieck ebenfalls zum Polardreieck hat, ist aber zu Φ polarreziprok in bezug auf einen dritten Kegelschnitt X derselben Art, der die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ hat. Man hat dann in Ψ nur zu setzen $\sigma x_i = u_i$, um Φ zu erhalten. Die Kurve Q hat vier Doppeltangenten; bezüglich dieser, sowie bezüglich einer tangentialen Erzeugung sehe man Nr. 86, deren Ergebnisse nur dualistisch umzuwerten sind.

15. Für die Betrachtungen der vorigen Nummer ist es ganz gleichgültig, ob das Grunddreieck und die Koeffizienten α_1, α_2, α_3 reell waren oder nicht. Damit nun Q reell sei, ist es bei reellem Grunddreieck nötig, daß auch die Koeffizienten reell und nicht alle von gleichem Vorzeichen seien. Dann sieht man aber, daß nur immer zwei Inflexionsknoten reelle Zweige haben können. Der dritte ist notwendig isoliert.

Es seien nun $x_1 = x = 0$, $x_2 = y = 0$ zwei rechtwinklige (oder auch schiefwinklige) Achsen, $x_3 = z = 0$ die unendlich ferne Gerade. Der Kegelschnitt sei die Ellipse

$$(6) \qquad \mathsf{E} \equiv x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0\,,$$

so daß

$$\alpha_1 = a^2\,, \quad \alpha_2 = b^2\,, \quad \alpha_3 = -1\,.$$

Macht dann eine Tangente T von E auf den Achsen bzw. die Abschnitte p, q, so hat der Pol P seiner Definition nach die Koordinaten $-p$, $-q$. Die von ihm beschriebene Kurve heißt »Kreuzkurve«. Sie hat die Gleichung

$$(7) \qquad x^2 y^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2\,.$$

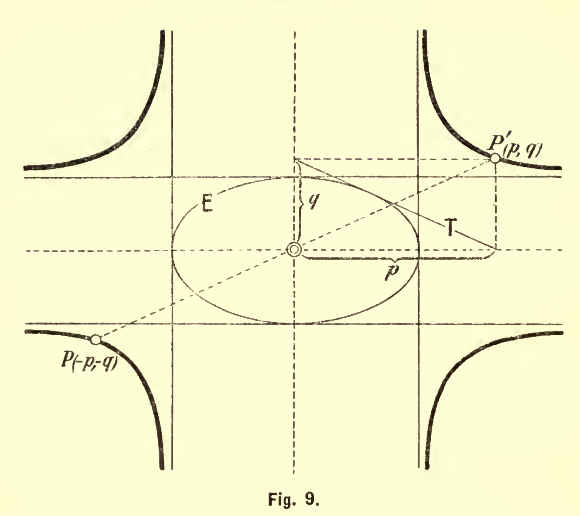


Fig. 9.

Diese sowohl, wie die Konstruktion selbst zeigen, daß sie in den unendlich fernen Doppelpunkten die (Wende-)Asymptoten $x = \pm a$, $y = \pm b$ hat. Im Anfangspunkte ist der isolierte Inflexionsknoten mit den Asymptoten von E als Tangenten (Fig. 9).

Nimmt man dasselbe Achsenkreuz, aber die Hyperbel

(8) $$\mathsf{H} \equiv x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$$

als Grundkegelschnitt, so entsteht eine Kurve, die »Kohlenspitzenkurve« genannt wird (Fig. 10). Sie hat in dem einen unendlich fernen Doppelpunkte die beiden (Wende-) Asymptoten $x = \pm a$, im Anfangspunkte die Asymptoten der Hyperbel zu Tangenten, während der unendlich ferne Punkt der x-Achse isolierter Inflexionsknoten ist (Tangenten $y = \pm i\,b$). Ihre Gleichung ist

(9) $$x^2 y^2 = a^2 y^2 - b^2 x^2 .$$

Da wegen der zentrischen Symmetrie jedem Punkte $P(-p, -q)$ ein Punkt $P'(p, q)$ entspricht, lassen sich die Konstruktionen der beiden behandelten Kurven wie folgt ausdrücken:

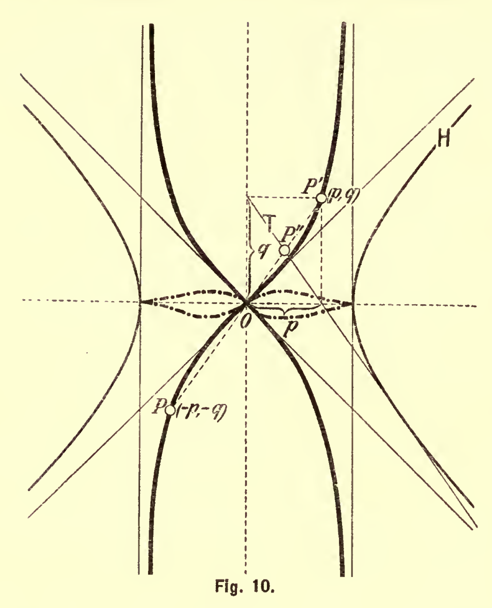


Fig. 10.

Durch die Schnittpunkte irgend einer Tangente eines Kegelschnittes mit den Achsen ziehe man die Parallelen zu den Achsen. Der Schnittpunkt P′ dieser beiden Parallelen beschreibt eine K r e u z k u r v e, *wenn der Kegelschnitt eine Ellipse, eine* K o h l e n s p i t z e n k u r v e, *wenn er eine Hyperbel ist.*

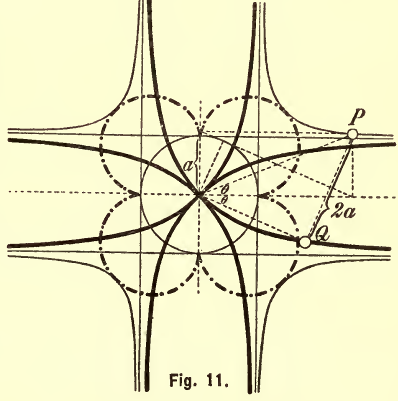


Fig. 11.

Zusätze. 1. Für die Kreuzkurve hat man die Parameterdarstellung

$$x = a/\cos u\,,\quad y = b/\sin u\,;$$

für die Kohlenspitzenkurve

$$x = a\cos u\,,\quad y = b\operatorname{ctg} u\,.$$

Mittels dieser Parameterdarstellung läßt sich für die K r e u z k u r v e die F u ß p u n k t s k u r v e ähnlich wie bei der Ellipse aufstellen. Wir wollen dies jedoch nur für den Fall $a = b$ tun, den die Fig. 11 wiedergibt (»gleich-

seitige« Kreuzkurve). Man erhält als Gleichung der Tangente $x\cos^3 u + y\sin^3 u = a$, als Gleichung der Senkrechten vom Anfangspunkt aus $x\sin^3 u - y\cos^3 u = 0$. Die Elimination von u ergibt

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 27\,a^4 x^2 y^2 .$$

Die Kurve ist eine Potenzkurve 8. Ordg. und hat im Ursprung einen isolierten Punkt (Tangenten $x^2 + y^2 = 0$); für $x = 0$, bzw. $y = 0$ ergibt sich $(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 0$, d. h. in den Punkten $x = \pm a$, $y = 0$; $y = \pm a$, $x = 0$ sind Spitzen. Die interessant gestaltete Kurve ist in der Figur wiedergegeben.

2. Ganz ebenso erhält man für die Tangente der »gleichseitigen« Kohlenspitzenkurve $x/\cos^3 u - y\,\mathrm{tg}^3 u = a$ und schließlich als Gleichung der Fußpunktskurve

$$[(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2)]^3 = 27\,a^4 x^2 y^2 (x^2 + y^2)^2 .$$

Das ist eine Potenzkurve 12. Ordg. mit einem 6-fachen Punkte [Tangenten $(x^2 - y^2)^3 = 0$] im Ursprung. Außerdem sind noch reelle Spitzen in $x = \pm a$, $y = 0$, wie man aus der Gleichung erkennt, wenn man $y = 0$ setzt. Auf der y-Achse sind imaginäre Spitzen; auf den Tangenten des Anfangspunktes liegen isolierte Punkte. Hierauf wollen wir aber nicht genauer eingehen. Die Kurve ist in Fig. 10 angedeutet.

3. Geht man von einem Punkte P der gleichseitigen Kreuzkurve senkrecht zu der zugehörigen Kreistangente um $2a$ nach rückwärts, so erhält man einen Punkt Q (Fig. 11). Dieser beschreibt, wenn P die Kreuzkurve durchläuft, eine andere Kurve, die »Windmühle« genannt wurde[17]). Ihre Gleichung in Polarkoordinaten findet man leicht. Sie ist $\varrho = 2a\,\mathrm{ctg}\,2\theta$; in rechtwinkligen Koordinaten

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2) = a^2 (x^2 - y^2)^2 .$$

Die Polargleichung der gleichseitigen Kreuzkurve ist $\varrho = 2a/\sin 2\theta$. Ihre Inverse hat also die Gleichung $\varrho_1 = a\sin 2\theta$, wo $\varrho\varrho_1 = 2a^2$ gesetzt wurde. Dies ist das sog. regelmäßige Vierblatt, eine bestimmte Rosenkurve (s. Nr. 82).

Die Inverse der Windmühle hat die Polargleichung $\varrho = a\,\mathrm{tg}\,2\theta$. Sie ist also mit der Grundkurve kongruent, nur um 45° gedreht. Mit den polarreziproken Kurven der Kreuz- und Kohlenspitzenkurve werden wir uns noch ausführlicher zu beschäftigen haben (§ 17).

16. Die Kreuzkurve und Kohlenspitzenkurve haben den Nachteil, daß mindestens einer ihrer reellen Inflexionsknoten im Unendlichen liegt. Wir wollen daher noch

---

[17]) G. de Longchamps, *Cours de problèmes* I., Paris (Delagrave) 1898, S. 137.

eine Kurve aufstellen, bei der nur der isolierte unendlich fern ist. Dazu nehmen wir als Seiten des Polardreiecks die Geraden $x = 0$, $y = b$, $y = -b$. Als Kegelschnitt können wir dann eine Hyperbel $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ zugrunde legen, bei beliebigem a. Denn diese Hyperbelgleichung läßt sich schreiben

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{2\,b^2}(y+b)^2 - \frac{1}{2\,b^2}(y-b)^2 = 0\,,$$

so daß $\alpha_1 = a^2$, $\alpha_2 = \alpha_3 = -2\,b^2$. Die Quartik wird dann

$$a^2(y^2 - b^2)^2 - 4\,b^2 x^2(y^2 + b^2) = 0\,.$$

Die Konstruktion dieser Kurve, die wir wegen ihrer Gestalt »Sanduhrkurve« nennen wollen, läßt sich folgendermaßen formulieren: *Gegeben eine Hyperbel und die beiden Parallelen zur Hauptachse in einem Abstande gleich der reellen Länge der halben Nebenachse. Irgend eine Tangente der Hyperbel bildet mit den beiden Parallelen und der Nebenachse ein Trapez. Dessen Diagonalschnittpunkt beschreibt die Sanduhrkurve.*

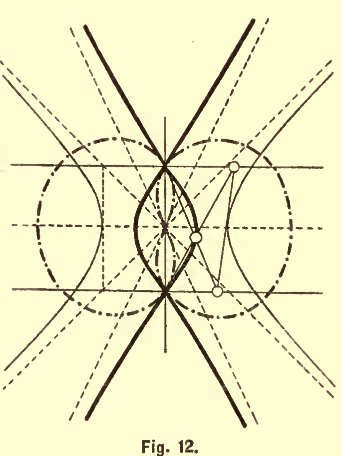


Fig. 12.

Aus dieser Konstruktion sowohl (s. Fig. 12) wie aus der Gleichung läßt sich ersehen, daß die Tangenten der Hyperbel in ihren Schnittpunkten mit den beiden Parallelen die Inflexionstangenten der Kurve sind, daß ferner ihre Asymptoten die Gleichungen $y = \pm 2\,b\,x/a$ haben, während die der Hyperbel durch $y = \pm b\,x/a$ gegeben werden. Der isolierte Inflexionsknoten in $y = 0$, $z = 0$ hat die Tangenten $y^2 + b^2 = 0$.

17. Um nun schließlich aus unserer allgemeinen Konstruktion die Bernoullische Lemniskate herzuleiten, setzen wir $x_1 = x + i\,y$, $x_2 = x - i\,y$, $x_3 = z = 1$ und legen die gleichseitige Hyperbel

$$\alpha_1^{-1}(x + i\,y)^2 + \alpha_1^{-1}(x - i\,y)^2 + \alpha_3^{-1} \equiv 2\,\alpha_1^{-1}(x^2 - y^2) + \alpha_3^{-1} = 0$$

zugrunde. Dann wird die Kurvengleichung

$$\alpha_1(x - iy)^2 + \alpha_1(x + iy)^2 + \alpha_3(x^2 + y^2)^2 = 0$$

oder

$$2\alpha_1(x^2 - y^2) + \alpha_3(x^2 + y^2)^2 = 0 .$$

Wir müssen demnach $\alpha_3 = -1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}a^2$ nehmen, um Gleichung (3) zu erhalten. Dann lautet die Gleichung der Hyperbel $4(x^2 - y^2) - a^2 = 0$. Dies ist demnach nicht die Hyperbel, als deren Fußpunktskurve die Lemniskate ursprünglich erschien, sondern eine zu ihr homothetische von halb so großen Dimensionen.

Betrachten wir aber etwa die Kohlenspitzenkurve (Fig. 10). Dort beschreibt der Punkt P' die Kurve, während der Punkt P'', der auf der Tangente T und auf dem nämlichen Radiusvektor liegt, eine Kohlenspitzenkurve von den halben Dimensionen beschriebe. Wenn nun die Achsen nach den imaginären Kreispunkten gehen, so steht OP' senkrecht auf T, da der Radiusvektor nach dem Punkte gehen muß, der auf der unendlich fernen Geraden zu dem unendlich fernen Punkte der Tangente in bezug auf die Kreispunkte harmonisch konjugiert ist. Wenn wir aber in P' eine Parallele zu T ziehen, so umhüllt diese eine Hyperbel von den doppelten Dimensionen der gegebenen, und die Lemniskate erscheint als Fußpunktskurve dieser letzteren Hyperbel.

Zusätze. 1. Wir nennen auch die Sanduhrkurve »gleichseitig«, wenn $a = b$. Dann ist ihre Gleichung $(y^2 - a^2)^2 - 4x^2(y^2 + a^2) = 0$. Die Inverse dieser gleichseitigen Sanduhrkurve in bezug auf den Kreis mit Radius a ist eine Potenzkurve 8. Ordg. mit der Gleichung

$$[(x^2 + y^2)^2 - a^2y^2]^2 = 4a^2x^2[(x^2 + y^2)^2 + a^2y^2] .$$

Diese Kurve hat im Anfangspunkt einen vierfachen Punkt besonderer Art; man sieht aber nur einen Knoten mit den Asymptoten der Sanduhrkurve als Tangenten. Die x-Achse schneidet außerdem nur noch in den Punkten $x = \pm 2a$. In den Inflexionsknoten ($x = 0$, $y = \pm a$) der Sanduhrkurve hat sie Knoten mit denselben Tangenten (Fig. 12).

2. Vermittels der in Nr. 13, Gleichung (6) bewiesenen Eigenschaft erhält man auch sofort die Polargleichung der Fußpunktskurve der Bernoullischen Lemniskate in der Form

$$\varrho^3 = a^3 \cos^2 \tfrac{2}{3}\theta .$$

Wir haben sie in Fig. 8 angedeutet. Dem Aussehen nach ähnlich wie die eben betrachtete Inverse der Sanduhrkurve, ist sie doch von dieser völlig verschieden. Denn sie ist eine Potenzkurve 26. Ordg. und hat den Ursprung als 8-fachen Punkt mit denselben Tangenten wie die Lemniskate. Ihre Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten ist nämlich

$$(x^2+y^2)^7[16(x^2+y^2)^3+9a^6]^2=[24a^3(x^2+y^2)^5+a^9(x^2-y^2)^2]^2 .$$

Wie die Lemniskate selbst, ist sie eine spezielle Sinusspirale (Nr. 92).

§ 5. **Die spirischen Linien des Perseus.**

18. Wie in Nr. 7 angedeutet, wollen wir jetzt aus der ersten speziellen Kurvenklasse, die wir erhielten, den Boothschen Lemniskaten, eine allgemeinere Familie herleiten, indem wir für sie die Kurven gleicher Potenz suchen. Die Gleichung einer Boothschen Lemniskate war

(1) $$(x^2+y^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2)=0 .$$

Ein Punkt $P(x, y)$, der in bezug auf (1) die Potenz Π hat, bewegt sich dann auf der Kurve

(2) $$(x^2+y^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2)-\Pi=0 .$$

Eine solche Kurve hat, wie in der angezogenen Nr. 7 schon ausgeführt, in den Kreispunkten dasselbe Verhalten wie die zugehörige Boothsche Lemniskate; sie hat daher vor allem auch dieselben außerordentlichen Brennpunkte wie diese, auf den beiden Achsen in den Abständen $\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$, $\pm\frac{1}{2}i\sqrt{a^2-b^2}$. Sind wieder M und M_1 die beiden reellen auf der x-Achse, O der Mittelpunkt, Q ein Punkt der Kurve, so wird aus der Relation (4) der Nr. 11 die folgende

(3) $$\overline{MQ}^2\cdot\overline{M_1Q}^2=\overline{OM}^4+\Pi+\Lambda\cdot\overline{OQ}^2 .$$

Bedeuten also Λ und Λ_1 zwei beliebige Konstanten, so können wir unsere neuen Kurven definieren durch die Relation

(3*) $$\overline{MQ}^2\cdot\overline{M_1Q}^2=\Lambda\cdot\overline{OQ}^2+\Lambda_1 .$$

Diese Kurven heißen »spirische Linien« aus einem Grunde, der in Nr. 20 ersichtlich werden wird. Nach dem Zeugnis des Proklus wurden sie von einem sonst wenig bekannten Geometer Perseus (ca. 130 v. Chr.) zuerst betrachtet.

Abgesehen von den Boothschen Lemniskaten, für die $A_1 = (\frac{1}{2} M M_1)^4$, ergeben sich als besondere Spezialfälle noch die Kurven für $A = 0$ und $A_1 = 0$. Die ersteren sind die »Cassinischen Linien«, von denen wir in Nr. 22 sprechen werden, im besonderen wieder die Bernoullische Lemniskate. Der Spezialfall $A_1 = 0$ scheint noch nicht näher betrachtet worden zu sein.

19. Die spirischen Linien des Perseus sind die allgemeinsten bizirkularen Quartiken mit zwei Symmetrieachsen. Um die x-Achse auszuzeichnen, nehmen wir $|a| > |b|$. Wir erhalten dann eine Vorstellung von der Gestalt unserer Kurven, zunächst für kleine Werte von Π, wenn wir Linien ziehen, die der zugehörigen Boothschen Lemniskate sehr nahe liegen und sie nirgends überschreiten. Da für die Schnittpunkte mit den Achsen

$$(4) \qquad \begin{cases} y = 0, \quad x^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4\,\Pi}\right); \\ x = 0, \quad y^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 \pm \sqrt{b^4 + 4\,\Pi}\right), \end{cases}$$

so ergibt sich im elliptischen Falle (Fig. 13) für $\Pi > 0$ ein bloßes Bifolium (geschlossener Zug mit zwei Einbuchtungen), das durch eine Form mit zwei Flachpunkten hindurch bei wachsendem Π in ein reines Oval übergeht. Für $\Pi < 0$ hat man ein Bifolium mit eingeschlossenem zuerst kleinem, dann sich den beiden Einbuchtungen immer mehr näherndem Oval. Vereinigt sich das Oval mit dem Bifolium, so entstehen zwei Knoten auf der y-Achse. Dann muß aber die Kurve in zwei Kegelschnitte zerfallen, da eine eigentliche Quartik höchstens drei Doppelpunkte haben kann. Diese Kegelschnitte sind Kreise, da zwei ihrer Schnittpunkte in den Kreispunkten liegen. Aus (4) erkennt man sofort, daß dies für $\Pi = -\frac{1}{4} b^4$ eintritt. Die Mittelpunkte dieser Kreise sind selbstverständlich die beiden reellen Brennpunkte, die Radien haben die Länge $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, die Schnittpunkte die Koordinaten $x = 0$, $y = \pm b/\sqrt{2}$. Durch weiteres Verkleinern von Π entstehen im Innern der Kreise zwei Unifolien, die dann in reine Ovale übergehen, um schließlich in zwei Punkte A, A_1 zusammenzuschrumpfen. Aus (4) erkennt man, daß dies für $\Pi = -\frac{1}{4} a^4$ eintritt, so daß die beiden Punkte die Koordinaten haben $y = 0$, $x = \pm a/\sqrt{2}$. Die Kurve zerfällt dann wieder in

zwei Kreise, die aber ihre Mittelpunkte in den imaginären Brennpunkten haben, während ihre Radien reell und ebenfalls gleich $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ sind. A, A_1 sind ihre reellen Schnittpunkte. Für noch kleinere Π bleibt die ganze Kurve imaginär.

Für den hyperbolischen Fall ($b^2 < 0$) knüpfen wir die Vorstellungen an Fig. 8 an. Für $\Pi > 0$ ergibt sich auch hier ein einfaches Bifolium, das schließlich zu einem Oval wird. Für $\Pi < 0$ entstehen zuerst zwei Ovale, die für $\Pi = -\frac{1}{4}b^4$ in die beiden Kreise übergehen, die ihre Mittel-

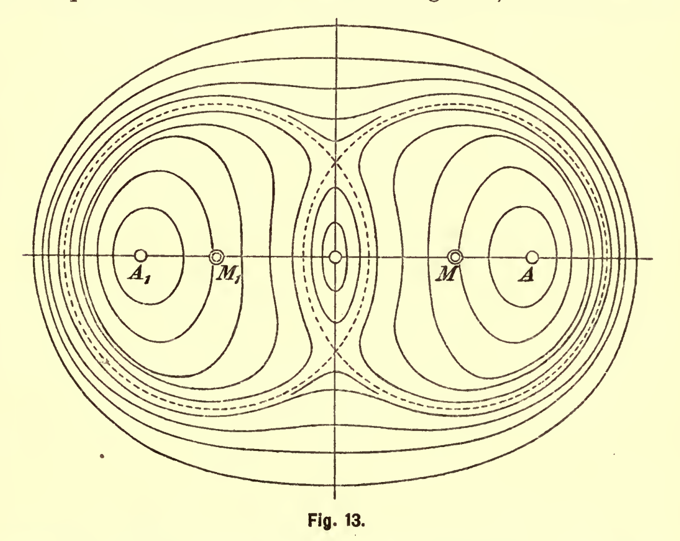


Fig. 13.

punkte in den reellen Brennpunkten haben und sich in den imaginären Punkten $x = 0$, $y = \pm i\,b/\sqrt{2}$ schneiden (Radien $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}$). Bei weiterer Verkleinerung von Π entstehen zwei Ovale im Innern dieser Kreise, die schließlich wie oben für $\Pi = -\frac{1}{4}a^4$ auf die beiden Punkte $y = 0$, $x = \pm a/\sqrt{2}$ zusammenschrumpfen. Auch hier sind dies die Schnittpunkte zweier Kreise mit den Radien $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}$, die ihre Mittelpunkte in den imaginären Brennpunkten der Kurve haben (vgl. auch Fig. 14, S. 33).

Im Falle $b = 0$ zerfällt schon die Boothsche Lemniskate in zwei Kreise um die Punkte $x = \pm\frac{1}{2}a$, $y = 0$,

die sich im Ursprung berühren. Für kleines Π entsteht hier entweder ein Bifolium oder zwei Ovale, die sich wie in den vorhergehenden Fällen verändern.

Wir haben hier aber auch den Fall einer imaginären Ellipse als Grundkurve der Boothschen Lemniskate ins Auge zu fassen. Dann ist in Gleichung (1) und (2) sowohl b^2 wie a^2 negativ zu nehmen, und bei der Boothschen Lemniskate ist nur der isolierte Punkt im Ursprung reell. Für $\Pi < 0$ wird dann auch die ganze spirische Linie imaginär, aber für $\Pi > 0$ entwickelt sich aus dem isolierten Punkt ein Oval, das mit Π an Dimension wächst. Ist b in diesem Falle gleich 0, so besteht die Kurve ursprünglich aus zwei sich im Anfangspunkt berührenden imaginären Kreisen und für $\Pi > 0$ entsteht gleichfalls ein Oval.

20. Lassen wir das System der beiden Kreise, in das die spirische Linie für $\Pi = -\frac{1}{4} b^4$ zerfällt, um die y-Achse rotieren, so entsteht eine wulstförmige Fläche, die »Kreisringfläche« (Torus) heißt und von den Griechen »Spire« ($\sigma\pi\varepsilon\tilde{\iota}\varrho\alpha$) genannt wurde.

Perseus erzeugte nun die nach ihm benannten Kurven, indem er einen Torus mit Ebenen schnitt, die zur Achse des Torus parallel liefen. Daß diese Schnittlinien mit den Kurven gleicher Potenz der Boothschen Lemniskaten identisch sind, wollen wir jetzt zeigen[18]).

Es habe einer der beiden Kreise die Gleichung

$$(5) \qquad (x-g)^2 + y^2 - r^2 = 0\,,$$

dann lautet die Gleichung des Torus, wenn wir im Ursprung eine z-Achse senkrecht auf der (x, y)-Ebene errichten, $(\sqrt{x^2+z^2} - g)^2 + y^2 - r^2 = 0$, oder

$$(6) \qquad (x^2 + y^2 + z^2 + g^2 - r^2)^2 = 4\,g^2(x^2+z^2)\,.$$

Wir erhalten wegen der Symmetrie alle möglichen Schnitte der verlangten Art, wenn wir nur in dieser Glei-

[18]) Vgl. de la Gournerie, Journ. math. (2) **14**, 1869, 9—64, 103—138. Dort werden die allgemeinen Schnitte des Torus als »spirische Linien« bezeichnet. Es ist daher gut, die hier allein betrachteten Kurven immer »spirische Linien des Perseus« zu nennen.

chung $z = d$ setzen und d variieren. Eine solche Schnittkurve hat demnach die Gleichung

$$(7)\quad \begin{cases} (x^2+y^2)^2 + 2(d^2+g^2-r^2)(x^2+y^2) - 4g^2x^2 \\ \qquad + (d^2+g^2-r^2)^2 - 4g^2d^2 = 0 \end{cases}$$

oder

$$(7^*)\quad \begin{cases} (x^2+y^2)^2 + 2(d^2-g^2-r^2)x^2 + 2(d^2+g^2-r^2)y^2 \\ + (d+g+r)(d+g-r)(d-g+r)(d-g-r) = 0\,. \end{cases}$$

Diese Gleichung identifiziert sich mit (2), wenn man setzt

$$(8)\quad g = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}\,,\quad r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4+4\Pi}{a^2-b^2}}\,,\quad d = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{b^4+4\Pi}{a^2-b^2}}\,.$$

Jede Schnittlinie ist also eine spirische Linie des Perseus nach unserer ursprünglichen Definition; aber das System der Schnittlinien bei festem r und g und variablem d ist ein ganz anderes als jedes der vorhin betrachteten Systeme bei festem a und b und variablem Π. Aus dem konstanten Glied von (7*) sieht man sofort, daß Π verschwindet, wenn $d = \pm(g \pm r)$, d. h. die Schnittlinie ist eine Boothsche Lemniskate, wenn die Ebene Tangentialebene des Torus ist. Für $d = \pm(g+r)$ haben wir hier den Fall, daß nur der isolierte Punkt reell ist. Für $d = 0$ ist, wie in der vorigen Nummer gezeigt, $\Pi = -\frac{1}{4}b^4$; wenn $\Pi = -\frac{1}{4}a^4$, so ist andererseits $r = 0$, d. h. die Kurve besteht im Reellen nur aus zwei isolierten Punkten. Die reellen außerordentlichen Brennpunkte liegen bei dem ganzen System aller Schnittkurven auf dem Kreis, den der Mittelpunkt des erzeugenden Kreises bei der Rotation beschreibt.

20a. Man könnte aus dieser Erzeugung die spirischen Linien einteilen, je nachdem der Torus offen $(g > r)$ oder geschlossen $(g = r)$ ist oder sich selbst durchschneidet $(g < r)$. Dies entspricht den Fällen $b^2 < 0$, $= 0$, > 0 der vorigen Nummer; jedoch nicht vollständig, solange d nur reell gedacht wird. In der Tat werden die Formen, für die $-\frac{1}{4}b^4 > \Pi > -\frac{1}{4}a^4$ aus dem reellen Torus durch eine imaginäre Ebene ausgeschnitten und für $a^2 < 0$, $b^2 < 0$, $\Pi > 0$ ist der ganze Torus, sowie die schneidende Ebene imaginär. Diese Fälle entgingen natürlich den antiken Geometern; sie entspringen aber alle gleichmäßig aus unserer reellen Definitionsgleichung (3*), wenn man nur einerseits

A_1 alle Werte durchlaufen läßt, andererseits $A\ [=\frac{1}{2}(a^2+b^2)]$ nicht bloß positiv, sondern auch negativ nimmt[19]).

Aus Gleichung (6), wo $z = d$ gesetzt sei, läßt sich ferner eine sehr einfache Konstruktion der spirischen Linien herleiten[19a]). Setzt man nämlich $x^2 + d^2 = \xi^2$, so geht die Gleichung über in $(\xi^2 + y^2 + g^2 - r^2)^2 = 4\,g^2\,\xi^2$ oder

$$(\xi \pm g)^2 + y^2 = r^2\,. \tag{8a}$$

Zeichnet man also einen der durch (8a) dargestellten Kreise, so erhält man sofort zu einem Punkte (ξ, y) desselben den Punkt $\left(x = \sqrt{\xi^2 - d^2}, y\right)$ der spirischen Linie. Da außerdem

$$x\,dx/dy = \xi\,d\xi/dy\,,$$

so hat der Kreis (8a) mit der spirischen Linie in entsprechenden Punkten gleiche Subnormalen. Daraus entspringt eine bequeme Konstruktion der Normale.

21. Die spirischen Linien des PERSEUS können aus einem Kegelschnitte noch auf ganz andere Weise abgeleitet werden. Es sei

$$\mathsf{E} \equiv \xi^2/m^2 + \eta^2/n^2 - 1 = 0 \tag{9}$$

dieser Kegelschnitt. Wir suchen den Ort eines Punktes $P(x, y)$, von dem aus E unter dem konstanten Winkel ω erscheint. P beschreibt dann eine sogenannte »isoptische Kurve« des Kegelschnittes E. Um die Gleichung dieser Kurve aufzustellen, bilden wir erst die des Tangentenpaares von P an E

$$\left\{\begin{aligned} &(n^2 x\,\xi + m^2 y\,\eta - m^2 n^2)^2 \\ &- (n^2 x^2 + m^2 y^2 - m^2 n^2)(n^2 \xi^2 + m^2 \eta^2 - m^2 n^2) = 0 \end{aligned}\right. \tag{10}$$

oder

$$n^2(x-\xi)^2 + m^2(y-\eta)^2 - (x\,\eta - y\,\xi)^2 = 0\,. \tag{10*}$$

Setzt man hier $y - \eta = \lambda(x - \xi)$, so erhält man nach Division mit $(x-\xi)^2$ die Gleichung für λ

$$\lambda^2(m^2 - x^2) + 2\,\lambda\,x\,y + (n^2 - y^2) = 0\,. \tag{11}$$

---

[19]) Eine andere, kaum einfachere Definition, die dasselbe leistet, wurde von SIEBECK gegeben (J. f. Math. **57**, **58**, 1860/61).

[19a]) G. TEIXEIRA, Arch. Math. (3) **11**, 1907, 64—71.

Sind λ_1, λ_2 die Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$\operatorname{tg}^2\omega = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1\lambda_2}\right)^2 = \frac{4(n^2x^2 + m^2y^2 - m^2n^2)}{[(m^2+n^2) - (x^2+y^2)]^2},$$

also die Gleichung der gesuchten Kurve

$$(12)\quad [(x^2+y^2) - (m^2+n^2)]^2 = 4(n^2x^2 + m^2y^2 - m^2n^2)\operatorname{ctg}^2\omega\,.$$

Man bemerkt sofort, daß sie für $\omega = \frac{1}{2}\pi$ in den doppelt zählenden »orthoptischen Kreis« des Kegelschnittes übergeht. Im allgemeinen ist sie eine spirische Linie des Perseus. Zur Identifikation mit (2) hat man nur zu setzen

$$(13)\quad \begin{cases} 2[m^2 + (1 + 2\operatorname{ctg}^2\omega)n^2] = a^2; \\ 2[n^2 + (1 + 2\operatorname{ctg}^2\omega)m^2] = b^2; \\ (m^2+n^2)^2 + 4m^2n^2\operatorname{ctg}^2\omega = -\Pi\,. \end{cases}$$

Sind a^2, b^2, Π gegeben, so erhält man m^2 und n^2 und daher auch $\operatorname{ctg}\omega$ zweiwertig aus den Gleichungen (13), da zwei derselben linear und die dritte quadratisch in m^2, n^2 ist. *Daher ist jede spirische Linie isoptische Kurve von zwei Kegelschnitten.*

Wir wollen nur den Fall näher betrachten, daß $\Pi = 0$, also (12) eine Boothsche Lemniskate ist. Dann muß $\operatorname{ctg}^2\omega = -(m^2+n^2)^2/4m^2n^2$ sein, während man für m^2 und n^2 die Werte $m^2 = -a^2b^4/(a^4-b^4)$, $n^2 = a^4b^2/(a^4-b^4)$ findet, so daß $a^2/b^2 = -n^2/m^2$. Durch a und b ausgedrückt ist also $\operatorname{ctg}\omega = (a^2-b^2)/ab$. Der Winkel ω ist demnach bei hyperbolischen Lemniskaten imaginär, d. h. der Kegelschnitt E umschließt die Lemniskate; E selbst ist eine (reelle oder imaginäre) Ellipse. Für eine elliptische Lemniskate ist ω reell, E eine Hyperbel, in deren Äußerem die Lemniskate liegt. Für die Bernoullische Lemniskate ($a^2 = -b^2$) artet E in die doppelt zählende unendlich ferne Gerade aus. Die Bernoullische Lemniskate ist demnach nicht die isoptische Kurve eines eigentlichen Kegelschnittes.

Bem. Wir können nur anmerken, daß die spirischen Linien des Perseus auch in den konformen Abbildungen auftreten, die durch die elliptischen Funktionen sn, cn, dn vermittelt werden. Sie sind dort diejenigen Kurven, die in der w-Ebene den Achsenparallelen der z-Ebene entsprechen, wenn etwa $w = \operatorname{sn} z$ gesetzt

wird. G. Holzmüller nennt sie deshalb sn-, cn-, dn-Kurven, je nach der abbildenden Funktion[20]).

22. Wir müssen nun noch dem besonderen Fall, daß in der Definitionsgleichung (3*) der spirischen Linien die Konstante $A = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 0$ ist, etwas Aufmerksamkeit schenken. Die bezüglichen Kurven sind definiert durch die Bedingung

$$(14) \qquad MQ \cdot M_1Q = \sqrt{\overline{OM}^4 + \Pi} = \text{konst.}$$

und haben die Gleichung, wenn $OM = a/\sqrt{2}$ gesetzt wird,

$$(15) \qquad (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) - \Pi = 0 .$$

Für $\Pi = 0$ ergibt sich, wie schon früher angedeutet, die Bernoullische Lemniskate mit der Eigenschaft $MQ \cdot M_1Q = OM^2$. Die übrigen Kurven sind die Kurven gleicher Potenz für die Bernoullische Lemniskate und heißen »Cassinische Linien«, weil J. D. Cassini sie erdachte, um sie als Planetenbahnen an Stelle der Keplerschen Ellipsen treten zu lassen[21]). Wenn nun auch diese vermeintliche Eigenschaft nur historisches Interesse hat, so zeichnen sich die Cassinischen Linien doch sowohl durch ihre einfache Definition, wie durch manche besondere Eigenschaften aus, daß sie unter den spirischen Linien verdienen hervorgehoben zu werden.

Nach unseren früheren Überlegungen können wir sofort sagen, *daß alle Cassinischen Linien in den imaginären Kreispunkten Inflexionsknoten haben.* Das System (15) enthält für $\Pi > 0$ Bifolien, die schließlich Ovale werden, für $\Pi < 0$ zunächst zwei Ovale (s. Fig. 14). Die Fälle $\Pi = -\frac{1}{4}b^4$ und $\Pi = -\frac{1}{4}a^4$, die im allgemeinen hyperbolischen Falle Kreispaaren entsprechen, fallen hier zusammen. Die Ovale reduzieren sich dann auf die beiden Punkte mit den Koordinaten $y = 0$, $x = \pm a/\sqrt{2}$. Das sind aber hier die allen Kurven gemeinsamen reellen außerordentlichen Brennpunkte M, M_1. Gleichzeitig entstehen aber auch in den imaginären Brennpunkten $x = 0$, $y = \pm a\,i/\sqrt{2}$ Doppelpunkte. Demnach muß die Kurve in das Vierseit,

---

[20]) *Einf. in d. Theorie d. isogonalen Verwandtschaften*, Leipzig (Teubner) 1882, § 101/3, Fig. 62 u. 63.

[21]) S. *Éléments d'astronomie* von Jak. Cassini, Paris 1749, S. 149.

das die vier außerordentlichen Brennpunkte und die Kreispunkte zu Ecken hat, zerfallen. In der Tat ist

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) + \tfrac{1}{4}a^4$$
$$\equiv [y^2 + (x - a/\sqrt{2})^2][y^2 + (x + a/\sqrt{2})^2] .$$

Für noch kleineres Π wird die ganze Kurve imaginär.

23. Die Cassinischen Linien lassen sich infolge ihrer einfachen Definition leicht mit Zirkel und Lineal zeichnen, auch existiert für sie eine bemerkenswerte Konstruktion der Normale (bzw. Tangente). Sind M und M_1 die beiden

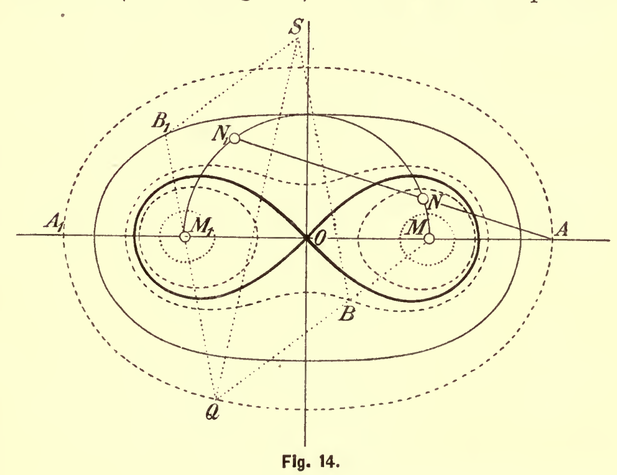


Fig. 14.

Brennpunkte, A und A_1 die Scheitel auf der Hauptachse (welch letztere, wenn etwa a und Π gegeben sind, aus Gleichung (4) in Nr. 19 konstruiert werden kann), so beschreibe man über MM_1 als Durchmesser den Kreis, ziehe von A aus irgendwelche Sekanten $\overline{ANN_1}$ und dann um M bzw. M_1 mit AN bzw. AN_1 Kreise. Diese schneiden sich in Punkten der Cassinischen Linie. Denn es ist $MA \cdot M_1A = NA \cdot N_1A =$ konst.

Die Tangentenkonstruktion ist ein Spezialfall eines allgemeineren Verfahrens, das wir nun darlegen wollen[22]).

[22]) S. *Einf. in die Theorie der Curven* von G. Scheffers, Leipzig (Veit & Co.) 1901, S. 86. — Ausführl. mit Berücksichtigung der Ausnahmefälle in Math.-Naturw. Mitt. Württemberg (2) **2**, 1900, 33—49.

Es seien n Punkte M_i gegeben, ϱ_i seien die Abstände eines Punktes Q von den Punkten M_i. Dann beschreibt Q eine Kurve, wenn verlangt wird, daß eine gewisse Funktion $\mathfrak{U}$ dieser n Entfernungen konstant bleibe. Diese Kurve ist also definiert durch die Gleichung

$$\mathfrak{U}(\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n) = \text{konst.} \tag{16}$$

und für einen Punkt der Kurve ist, wenn Q' einen unendlich benachbarten Punkt bedeutet und $QQ' = \delta s$ gesetzt wird:

$$\frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta s} \equiv \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \varrho_1} \frac{\delta \varrho_1}{\delta s} + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\delta \varrho_2} \frac{\delta \varrho_2}{\delta s} + \dots + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \varrho_n} \frac{\delta \varrho_n}{\delta s} = 0 . \tag{17}$$

Nun ist aber $\delta \varrho_i / \delta s$ bis auf unendlich kleine Größen gleich dem cos des Winkels φ_i, den δs mit ϱ_i bildet (Fig. 15). Trägt man daher die Werte $\partial \mathfrak{U} / \partial \varrho_i$ als Strecken r_i von Q aus auf den Strahlen QM_i auf, so sind die Ausdrücke $\partial \mathfrak{U} / \partial \varrho_i \cdot \delta \varrho_i / \delta s$ die Projektionen der r_i auf die Tangentenrichtung QQ'. Es ist nun bekannt, daß man die Summe der verlangten Projektionen erhält, wenn man die r_i als Kräfte betrachtet und ihre Resultante QS auf QQ' projiziert. Da die Summe der Projektionen aber Null sein soll, ist QS die Normale der Kurve $\mathfrak{U} = \text{konst.}$

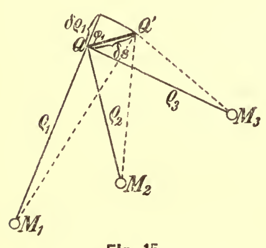


Fig. 15.

Für die Cassinischen Linien ist $\mathfrak{U} \equiv \varrho_1 \varrho_2 = \text{konst.}$, also $\delta \mathfrak{U} = \varrho_2 \delta \varrho_1 + \varrho_1 \delta \varrho_2$, und man hat folgende Konstruktion der Normale (Fig. 14): Mache auf QM die Strecke $QB = QM_1$, auf QM_1 die Strecke $QB_1 = QM$. Ist dann S die vierte Ecke des Parallelogramms mit den beiden Seiten QB und QB_1, so ist QS die gesuchte Normale.

Bem. Die obige allgemeine Ableitung bleibt bestehen, wenn einige oder alle M_i statt Punkte gerade Linien sind. Die Ableitung wäre mit Hilfe der Vektorenrechnung besonders einfach gewesen. Man definiert den Differentialquotienten $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{U}$ durch die Gleichung $\delta \mathfrak{U} = \delta s \mid (\mathfrak{u} + \varepsilon)$[23]) mit $\lim \varepsilon = 0$ für $\delta s = 0$. Da

[23]) Die bei E. Jahnke, *Vorl. über Vektorenrechnung*, Leipzig (Teubner) 1905 angewendete, vereinfachte Graßmannsche Bezeichnung

$\delta U = 0$ sein soll, muß schließlich $\boldsymbol{u}$ auf δs senkrecht stehen, also ist $\boldsymbol{u}$ die Normale. Außerdem ist $\delta \varrho_i = M_i Q' - M_i Q = QQ' = \delta s$, also

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \cdots + \boldsymbol{r}_n ,$$

das ist das oben gegebene Resultat[24]).

Ist $U \equiv \varrho_1 \pm \varrho_2$, so erhält man mittels dieses Verfahrens die bekannten Tangentenkonstruktionen für Ellipse und Hyperbel. In Nr. 65 werden wir es wiederum verwenden.

§ 6. Die Fußpunktskurven der Parabel.

24. Die vorausgehenden Untersuchungen knüpften alle mittelbar oder unmittelbar an die kissoidale Erzeugung an, die wir im § 2 von den Fußpunktskurven der Mittelpunktkegelschnitte gegeben hatten. Fußpunktskurven der Parabel nun erhalten wir durch die damals angegebene Konstruktion, wenn wir statt des Kreises K′ mit dem Radius R, auf dem der Pol nicht lag, eine Gerade G nehmen. Wir können den Übergang bewerkstelligen, wenn wir (vgl. Fig. 2), den einen Scheitel des Kreises beibehaltend, $m - R = k$ setzen und m wie R unendlich werden lassen. Dann geht in der Tat aus der Gleichung des Kreises K′

(1) $$\varrho_2 = m \cos\theta \pm \sqrt{R^2 - m^2 \sin^2\theta} ,$$

wenn wir die Wurzel wegschaffen, $m = k + R$ setzen und R nach ∞ konvergieren lassen, die Gleichung der Geraden G im Abstande k von O hervor

(2) $$\varrho_2 = k/\cos\theta .$$

Die Gleichung des ersten Kreises K bleibt

(3) $$\varrho_1 = p \cos\theta + q \sin\theta .$$

Daher wird die Polargleichung der Kissoide aus Kreis und Gerade, mit dem Pol auf dem Kreis

(4) $$[\varrho_2 - \varrho_1 =] \quad \varrho = k/\cos\theta - p\cos\theta - q \sin\theta ,$$

des »inneren Produktes« zweier Vektoren: $\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b} = a\, b \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Es sei auch noch angemerkt, daß Vektoren wie Kräfte (oder komplexe Größen) geometrisch addiert und subtrahiert werden.

[24]) Ausführliches bei G. Peano, *Appl. geom. del Calc. inf.*, Turin (Bocca) 1887, S. 130 ff., bes. S. 139/42. — Da wir nicht Raum genug haben, die Anwendung der Vektorenrechnung auf ebene Kurven näher auseinanderzusetzen, sei auf dieses Buch, sowie auf das von C. Burali-Forti, *Lez. di geom. metrico-projettiva*, Turin (Bocca) 1904, ausdrücklich hingewiesen.

oder in Punktkoordinaten

(4*) $$x(x^2 + y^2) = (k - p)x^2 - qxy + ky^2 .$$

Dies ist eine allgemeine zirkulare Kubik mit Doppelpunkt in O.

Gleichzeitig wird bei unserem Übergange für den zugehörigen Kegelschnitt

$\alpha = -\infty$	$a = \infty$	$a + \alpha = p - k$
$\beta = q$	$b = \infty$	$\alpha + e = p$.

Dieser ist also eine Parabel mit dem Scheitel S $(x = k - p,\ y = -q)$ und dem Brennpunkt F $(x = -p,\ y = -q)$, so daß k die Entfernung des Scheitels vom Brennpunkt bedeutet (Fig. 16). Ihre Gleichung ist

$$(y + q)^2 + 4k(x + p - k) = 0 ,$$

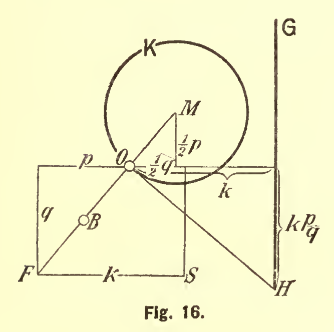


Fig. 16.

und der Leser mag selbst die Gleichung der Fußpunktskurve dieser Parabel aufstellen, um sie als mit (4*) identisch zu erkennen.

Die durch (4*) dargestellte Kubik hat die Gerade $x = k$ (G) als Asymptote. Diese schneidet die Kurve noch in einem Punkte $H(y = -kp/q)$, den man »Hauptpunkt« nennt[25]). Für den reellen Schnittpunkt der beiden anderen Asymptoten, den außerordentlichen Brennpunkt B der Kurve, erhält man $x = -\frac{1}{2}p$, $y = -\frac{1}{2}q$; d. h. man bekommt ihn, indem man den Radius OM des erzeugenden Kreises über O um sich selbst verlängert. B ist Mittelpunkt der Strecke zwischen O und dem Brennpunkt F der zugehörigen Parabel; OH ist Tangente von K, also $\perp BO$. In der Tat läßt sich (4*) in der Form schreiben

(4†) $$(x-k)\left[(x+\tfrac{1}{2}p)^2+(y+\tfrac{1}{2}q)^2\right]+(kp-r^2)x+kqy+kr^2=0 .$$

Hieraus ist ersichtlich: Schlägt man um B irgend einen Kreis $(x + \frac{1}{2}p)^2 + (y + \frac{1}{2}q)^2 = \Lambda$, so geht durch die zwei

[25]) Diese und die folgenden Bezeichnungen und Sätze gelten überhaupt für zirkulare Kubiken. Vgl. E. Czuber, Zeitschr. Math. **32**, 1887, 257—286.

endlichen Schnittpunkte dieses Kreises mit der Kubik (der Kreis berührt die Kubik in den Kreispunkten) eine Gerade $A(x-k)+(kp-\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{4}q^2)x+kqy+\frac{1}{4}k(p^2+q^2)=0$, die dem Kreis eindeutig zugeordnet ist und durch H geht. *Demnach wird jede derartige Kurve erzeugt durch ein konzentrisches Kreisbüschel um B und ein dazu projektives Geradenbüschel durch H.*

25. Ein erster spezieller Fall der Lage von G und K ist, daß der Fußpunkt A des Lotes von O auf G in K liegt. Die entsprechenden rationalen, zirkularen Kubiken sind demnach dadurch charakterisiert, daß die eine Tangente des Knotens auf der Asymptote senkrecht steht. Für den Scheitel der zugehörigen Parabel ist $x=k-p=0$. Diese Kurven sind demnach die Fußpunktskurven von Parabeln aus Punkten der Scheiteltangente. Sie wurden »Ophiuriden« genannt[26]) (von ὁ ὄφις = Schlange und ἡ οὐρά = Schwanz). Wird G Tangente an K, so wird OA Durchmesser, O rückt in den Scheitel der Parabel. Die Ophiuride wird zur »Kissoide des Diokles« (s. Nr. 27).

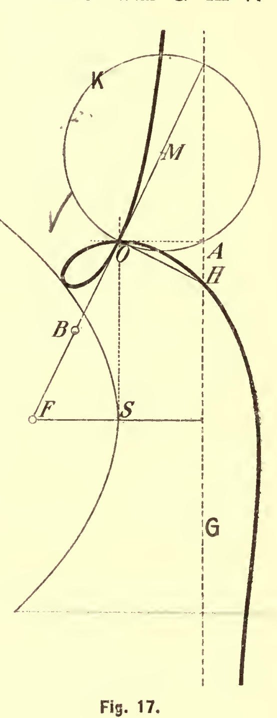


Fig. 17.

Eine andere spezielle Lage ist, daß G durch den Mittelpunkt M von K geht. Die Kurve ist dann dadurch spezialisiert, daß die Tangenten ihres Knotens zueinander senkrecht sind. Sie heißt »Strophoide«[27]) (von ὁ στρόφος = gedrehtes Band) und spielt in vielen geometrischen Fragen eine wichtige Rolle. Hier ist vor allem erwähnenswert, daß der außerordentliche Brennpunkt B auf die Kurve zu liegen kommt (HB berührt die Kubik in B). Dies hat zur Folge, daß

---

[26]) Von Uhlhorn, *Entdeckungen in der höh. Geometrie,* Oldenburg 1809, S. 12.

[27]) Montucci, Nouv. Ann. math. **5**, 1846.

wir eine weitere (dritte) Erzeugung angeben können, die von Interesse ist. Zuerst sei aber bemerkt, daß O für die Strophoide auf der Direktrix D der zugehörigen Parabel liegt (Fig. 18).

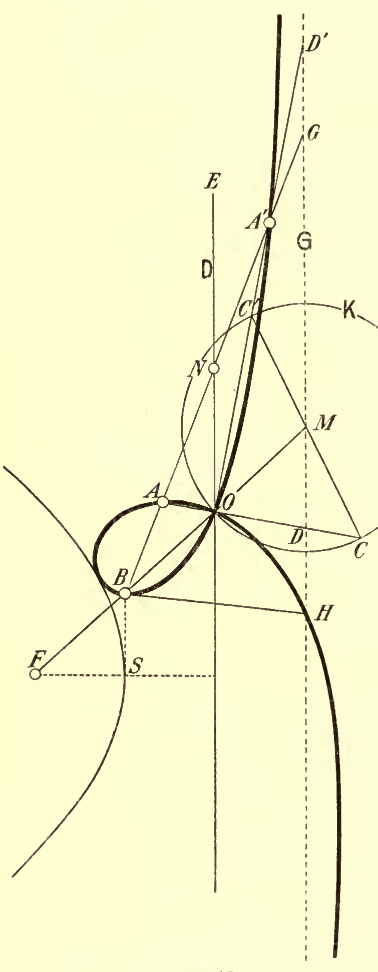


Fig. 18.

Wir ziehen nun durch B irgend einen Strahl, der die Kurve in A und A' schneiden möge. Die Schnittpunkte von OA, OA' mit K seien C, C', mit G aber D, D'. Man erkennt dann leicht, daß

$$\triangle OAB \cong \triangle CDM;$$

$$\triangle OA'B \cong \triangle C'D'M.$$

Daher ist CMC' eine Gerade und $OA \perp OA'$. Ist ferner N der Schnittpunkt von AA' mit D, so erkennt man aus den Winkelbeziehungen, daß

$$AN = A'N.$$

Demnach können wir die Kurve folgendermaßen erzeugen: Gegeben ein fester Winkel BOE. Man nehme auf jedem Strahl durch B, der OE in N schneidet, $NA = NA' = NO$, so beschreiben die Punkte A, A' die Strophoide. Oder: *Es ist ein Büschel von Kreisen gegeben, die sich in O berühren (Mittelpunkte auf OE), sowie ein fester Punkt B. Man ordnet jedem Kreise den Strahl durch B zu, der durch den Mittelpunkt N des Kreises geht. Die Schnittpunkte A, A' dieser so projektiv aufeinander bezogenen Büschel erzeugen die Strophoide.*

Aus dieser Erzeugung oder Eigenschaft folgt sofort eine andere, stereometrische, die schon von G. CASALI (1757) angegeben und von A. QUETELET[28]) wieder zum Leben erweckt wurde. Wir verlängern AA' bis G auf G und nennen die Längen der Seiten des $\triangle BHG$ bzw. b, h, g. Dann ist $GM = b - g$; $NO = NA = NA' = \frac{1}{2}(b - g)$; daher

$$(5) \qquad \begin{cases} BA = A'G = \frac{1}{2}(h + g - b)\,, \\ BA' = AG = \frac{1}{2}(h - g + b)\,. \end{cases}$$

Dies sind aber die elementaren Formeln für die Berührungspunkte des Inkreises von $\triangle BHG$ und des an BG liegenden Ankreises. Denken wir uns diese Kreise beschrieben, so können wir die Figur als Achsenschnitt eines Kreiskegels BHM mit der Spitze in H, mit zwei eingeschriebenen Kugeln betrachten. Diese sind durch die den Kegel schneidende Ebene, deren Spur BG ist, getrennt und werden von ihr in A, A' berührt. Dann sind aber nach dem bekannten Satze von QUETELET-DANDELIN A, A' die Brennpunkte der Schnittlinie. *Drehen wir nun die schneidende Ebene um die in B auf der Grundebene senkrecht stehende Tangente, so beschreiben die Brennpunkte die Strophoide.* Daher heißt die Strophoide auch oft »Fokale mit Knoten[29]) (focale à nœud)«.

26. Die Strophoide wird symmetrisch und heißt »gerade Strophoide«, wenn $OM \perp$ G genommen wird[30]). Sie ist dann die Fußpunktskurve einer Parabel für den Schnittpunkt der Direktrix mit der Achse. B wird zum

---

[28]) *Diss. de quibusd. loc. geom.* Gent 1819. Daran knüpft an das *Mém. s. quelqu. propr. remarquables de la focale parab.* von DANDELIN (Mém. Belg. **2**, 1822).

[29]) Unter »Fokale« oder »Fokalkurve« schlechthin versteht man die zirkulare Kubik, welche den Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schar bildet. Vgl. SCHRÖTER, Math. Ann. **5**, 1872; DURÈGE, ebd.; R. MÜLLER, Zeitschr. Math. **40**, 1895. Auch bei ihr liegt der außerordentliche Brennpunkt auf der Kurve. In der oben für die Strophoide gegebenen Erzeugung muß nur an die Stelle des Kreisbüschels mit Berührungspunkt ein gewöhnliches Kreisbüschel treten.

[30]) BOOTH[9]) nannte sie, wegen mannigfacher Beziehungen zu den Logarithmen und zum Kreise »Logozyklika«. Siehe die ausführliche Darstellung bei S. GÜNTHER, *Parab. Logarithmen u. parab. Trigonometrie.* Leipzig (Teubner) 1882.

Scheitel der Kurve ($\sphericalangle BON = \frac{1}{2}\pi$), H rückt ins Unendliche, G wird Wendeasymptote (Fig. 19). Für die zuletzt gegebene Erzeugung artet der Kreiskegel in einen Kreiszylinder aus. Ihre Gleichung ist ($p = 2k = 2r$; $q = 0$)

(6) $$x(x^2 + y^2) = r(y^2 - x^2)\,.$$

Aus (5) erhält man hier

$$BA \cdot BA' = \tfrac{1}{4}[h^2 - (b - g)^2] = \tfrac{1}{4}(\overline{BG}^2 - \overline{GM}^2)\,,$$

also $BA \cdot BA' = r^2$.

D. h. *die gerade Strophoide geht durch zirkulare Inversion vom Scheitel B aus in bezug auf einen dem erzeugenden gleichen Kreis* L *in sich selbst über.*

Bem. Diese Eigenschaft ist nicht etwa für die gerade Strophoide charakteristisch. Man heißt überhaupt Kurven, für die es gewisse zirkulare Inversionen gibt, durch die sie in sich selbst übergeführt werden, »anallagmatisch« (von α priv. und ἀλλάττω = ich ändere) und es existiert der Satz: *Jede bizirkulare Quartik und jede zirkulare Kubik ist im allgemeinen für 4 Zentren anallagmatisch.* Wir führen dies nur an, da wir nicht die Absicht haben, auf die allgemeine Theorie dieser Kurven einzugehen. *Bei den zirkularen Kubiken liegen die 4 Zentren auf der Kurve und sind die vier Berührungspunkte der zur reellen Asymptote parallelen Tangenten.* Demnach gibt es bei den rationalen Kubiken dieser Art nur 2 Zentren, und wenn sie noch dazu symmetrisch sind, eines: das ist der Scheitel[31]). Für die von uns behandelten Kubiken wird es dem Leser nicht schwer fallen, dies direkt nachzuweisen.

27. Eine weitere, naheliegende Spezialisierung der Lage von G und K ist die, daß die Gerade G den Kreis K berührt. Dann muß offensichtlich in O eine Spitze auftreten, indem O auf die Parabel rückt (Fig. 20). Die geometrische Bedingung ist hier $k - \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2}$. Diese ist in der Tat mit der Forderung identisch, daß in Gleichung (4*) die rechte Seite ein Quadrat werde: $q^2 = 4k(k - p)$. Die Gleichung läßt sich dann schreiben

(7) $$x(x^2 + y^2) = k(y - x\,q/2\,k)^2$$

---

[31]) Vgl. den Aufsatz von G. Teixeira[4]) sowie einen andern von G. Loria in Quart. J. math. **22**, 1886. Grundlegend J. Casey, Trans. Ir. Ac. **24**, 1869; ziemlich ausführlich bei A. B. Basset, *An element. treatise on cub. and quart. curves.* Cambridge (Deighton Bell) 1901, S. 133—160; für Kubiken auch bei F. Dumont, *Géom. du 3e ordre.* Paris (A. Hermann) 1904, S. 100—103.

oder, wenn wir mit α den Winkel der Spitzentangente gegen die x-Achse bezeichnen

$$x(x^2 + y^2) = k(y - x\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2\,. \tag{7*}$$

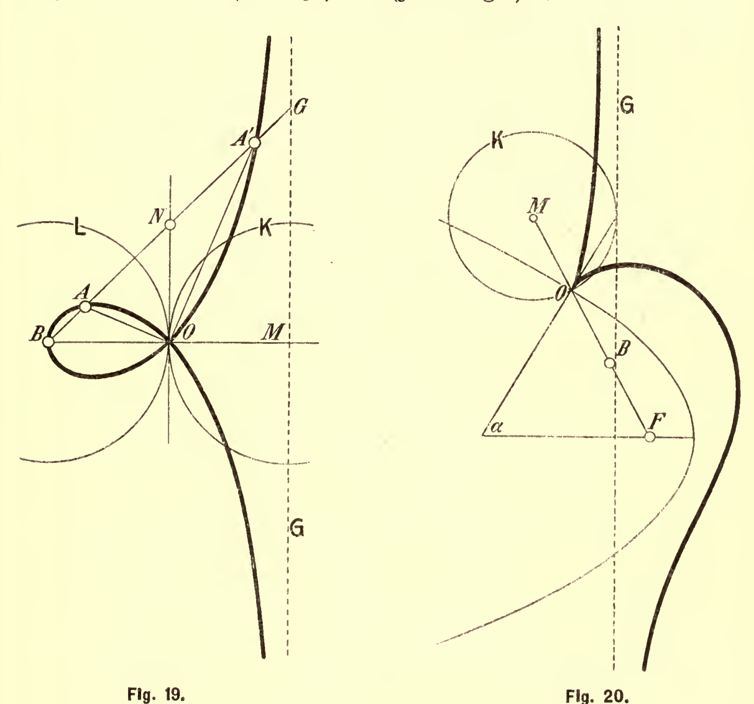


Fig. 19. Fig. 20.

Die Kurve nennt man kurzweg »schiefe Kissoide« im Gegensatz zur »Kissoide des Diokles«, die oft bloß »Kissoide« genannt wird. Diese letztere geht aus der schiefen Kissoide hervor, wenn $k = 2r$ und damit $p = 2r$, $q = 0$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$ wird. Ihre Gleichung ist daher

$$x(x^2 + y^2) = 2ry^2\,. \tag{8}$$

Sie ist die Fußpunktskurve einer Parabel in bezug auf den Scheitel O (Fig. 21). Diokles (zwischen 250 und 100 v. Chr.) bediente sich ihrer, um das delische Problem von der Verdoppelung des Würfels zu lösen. Der Name, den wir auf die ganze, bis jetzt betrachtete Kurvenfamilie

ausgedehnt haben, kommt von ὁ κισσός = der Efeu. Man betrachtete nämlich (bis ins 17. Jahrhundert) nur den innerhalb des Kreises liegenden Teil der Kurve, der mit dem abschließenden Halbkreis in der Tat eine efeublattähnliche Figur bildet.

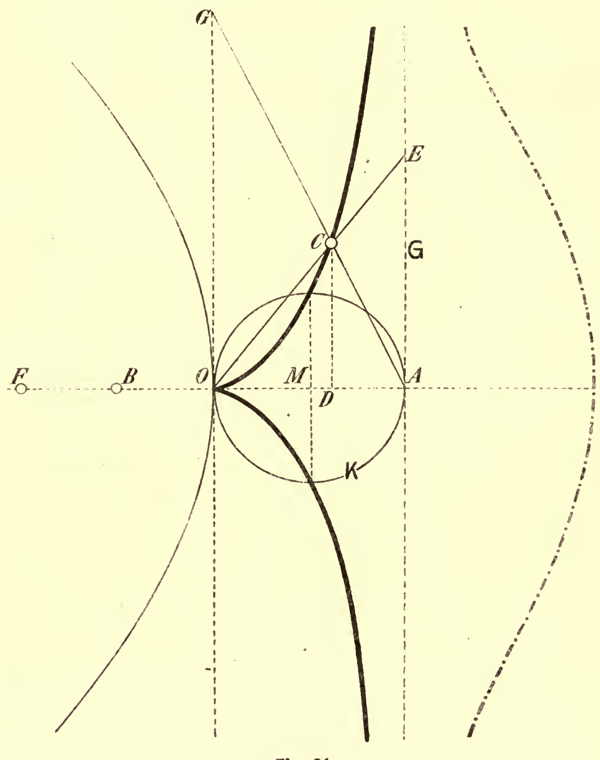


Fig. 21.

Wir wollen gleich zeigen, wie sich die Kissoide in hervorragendem Maße dazu eignet, das delische Problem zu lösen. Es sind zwei Strecken a, $b (= 2a)$ gegeben, zwischen denen zwei mittlere Proportionalen x, y in stetiger Folge eingeschaltet werden sollen, so daß also

$$a : x = x : y = y : b$$

und folglich $x^3 = a^2 b = 2 a^3$ wird. Macht man nun $OA = 2r = a$, $OG = b = 2a$, zieht AG, wodurch die Kissoide in C geschnitten wird, sodann OC, so gibt dies auf G den Punkt E und $AE = x$. Es ist nämlich ($OD = x$, $DC = y$) $a : (a - x) = b : y$; ferner $a : x = x : y$. Hieraus ergibt sich $x = ab/(b + x)$, $y = bx/(b + x)$ und vermittels (8) erhält man in der Tat $x^3 = a^2 b = 2 a^3$.

Indem wir bezüglich der Fläche dieser und der vorher behandelten Kurven auf die Nr. 33 verweisen, sei noch bemerkt, daß auch die Kurve gelegentlich betrachtet wurde, die entsteht, wenn man die Radienvektoren der zur Kissoide des Diokles verwendeten Grundgebilde addiert. Man kann sie »Begleitkurve der Kissoide«[32]) nennen. Sie wurde in Fig. 21 strichpunktiert gezeichnet. O ist für sie ein isolierter Punkt. Ihre Gleichung lautet

$$(10) \qquad x(x^2 + y^2) = 2r(2x^2 + y^2).$$

Zusätze. 1. Bildet man die Kissoide aus der Kissoide des Diokles und ihrem erzeugenden Kreis, so ergibt sich die gerade Strophoide mit der Polargleichung $\varrho = 2r(\cos\theta - \sin^2\theta/\cos\theta)$.

2. Denkt man sich einen Kreis vom Radius R, der im Punkte O die x-Achse berührt, und bildet die Kissoide dieses Kreises und der Diokleischen Kissoide, so erhält man eine Ophiuride mit der Polargleichung $\varrho = 2R\sin\theta - 2r\sin^2\theta/\cos\theta$.

28. Sollen bei der durch Gleichung ($4^\dagger$) dargestellten Kurve die Kreispunkte Wendepunkte sein, so müssen die Koeffizienten von x und y verschwinden; das gibt die Bedingungen $kp = r^2$ und $q = 0$. Die Kurve wird also symmetrisch; es ist $p = 2r$ und $k = \frac{1}{2}r$, so daß die Gleichung, auf O bezogen, wird:

$$(11) \qquad 2x(x^2 + y^2) = r(y^2 - 3x^2).$$

Die Tangenten des Knotens bilden einen Winkel von 120^0. Es ist dies die sogenannte »Trisektrix von Maclaurin«[33]).

---

[32]) G. Peano, der sie mit der in Nr. 35 zu erwähnenden »Versiera« verwechselte, nannte sie »Visiera«; s. *Appl. geom.*[24]), S. 87. Auf die Identität dieser Visiera mit der Begleitkurve der Kissoide wies der Verfasser hin in Mtsh. Math. **18**, 1907, S. 136; ebenso K. Zahradník in Stzgsb. böhm. Ges. Prag 1906, XXX, S. 12. — Die in demselben Sinne genommene »Begleitkurve der geraden Strophoide« wurde von Jeřabek und später von V. Retali (beide Mathesis (2) **8**, 1898) untersucht.

[33]) S. Maclaurins *Geometria organica etc.*, London 1720, S. 23.

Beachtenswert ist hier die Gleichung in Polarkoordinaten mit B als Pol. Man erhält zunächst für rechtwinklige Koordinaten:

$$(11^*) \qquad (2x - 3r)(x^2 + y^2) + r^3 = 0\,,$$

und wenn man die Richtung der x-Achse umkehrt, in Polarkoordinaten

$$(\mathrm{XI}) \qquad 2\varrho^3 \cos\theta + 3\varrho^2 r - r^3 = 0\,.$$

Nun ist aber $\cos\theta = 4\cos^3\frac{1}{3}\theta - 3\cos\frac{1}{3}\theta$. Daher läßt sich (XI) schreiben: $8\varrho^3\cos^3\frac{1}{3}\theta - 6\varrho^3\cos\frac{1}{3}\theta + 3\varrho^2 r - r^3 = 0$. Diese Gleichung hat den Faktor $(2\varrho\cos\frac{1}{3}\theta - r)$. Also läßt sich (XI) ersetzen durch

$$(\mathrm{XI}^*) \qquad \varrho = \tfrac{1}{2}r/\cos\tfrac{1}{3}\theta\,.$$

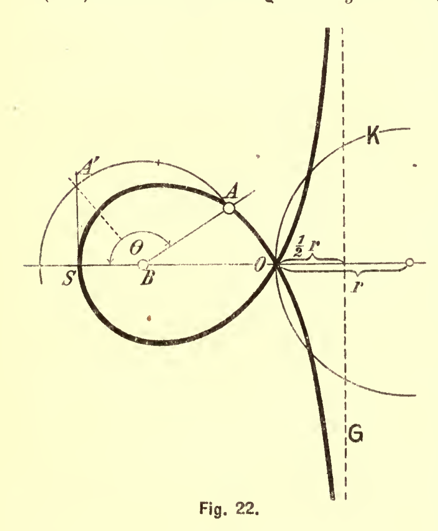


Fig. 22.

Hieraus geht sofort hervor, wie man mittels unserer Kurve einen beliebigen Winkel θ trisezieren kann. Man lege den Winkel mit der Spitze in B, so daß sein einer Schenkel durch den Scheitel S der Kubik geht, sein anderer dieselbe in A schneidet; errichte dann in S das Lot auf die Polarachse und bestimme auf diesem Lot A' so, daß $BA' = BA = \varrho$. Dann ist, da $BS = \frac{1}{2}r$, $BA' = \varrho = \frac{1}{2}r/\cos(\sphericalangle SBA')$, demnach $\sphericalangle SBA' = \frac{1}{3}\theta$.

Die Trisektrix von Maclaurin ist die Fußpunktskurve einer Parabel, deren Brennpunkt links von S in der Entfernung $\frac{1}{2}r$ liegt und deren Direktrix durch B geht, in bezug auf den Punkt O, der von der Direktrix so weit absteht wie der Brennpunkt.

Bem. Über die Fußpunktskurven der Parabel ist eine ähnliche Bemerkung zu machen wie über die der Mittelpunktkegelschnitte (in Nr. 5). Auch sie sind Inverse von Kegelschnitten, die nur in diesem Falle durch das Inversionszentrum gehen müssen.

Setzt man $\varrho \cdot \varrho' = r^2$ und kehrt zu rechtwinkligen Koordinaten zurück, so erhält man in der Tat aus (4*)

$$\mathsf{E}' \equiv (k-p)x^2 - q\,x\,y + k\,y^2 - r^2 x = 0 \, .$$

Die Parabel E, deren Fußpunktskurve die Kubik ist, ist polarreziprok zu E' in bezug auf den Inversionskreis M vom Radius r. E' ist nur dann ebenfalls eine Parabel, wenn $q^2 - 4\,k(k-p) = 0$ wird. Das ist nach Nr. 27 der Fall der schiefen Kissoide. Für die Strophoide ist E' eine gleichseitige Hyperbel.

§ 7. Nicht zirkulare rationale Kubiken als Kissoiden. Quadratur der symmetrischen Kurven.

29. Die Kissoiden, die wir bisher betrachteten, waren sämtlich bizirkular oder zirkular, die Grundkurven also Kreise oder Gerade. Auf den Fall von zwei Kegelschnitten wollen wir nicht eingehen. Doch ist es nötig, noch den Fall eines Kegelschnittes Γ und einer Geraden G ins Auge zu fassen, wobei der Pol O auf Γ liege. Die diesbezüglichen Gleichungen mögen lauten

(1) $$\mathsf{G} \equiv x - k = 0 \, ,$$

(2) $$\Gamma \equiv (y - \varepsilon x + \alpha)\,(y - \eta\,x + \beta) - \alpha\,\beta = 0 \, ;$$

oder in Polarkoordinaten

(1*) $$\varrho_1 = k/\cos\theta$$

(2*) $$\varrho_2 = -\frac{(\alpha+\beta)\sin\theta - (\alpha\,\eta + \beta\,\varepsilon)\cos\theta}{(\sin\theta - \varepsilon\cos\theta)\,(\sin\theta - \eta\cos\theta)} \, ,$$

so daß die Gleichung der Kissoide aus G und Γ lautet

(3) $$\varrho = \varrho_1 - \varrho_2 = \frac{k}{\cos\theta} + \frac{(\alpha+\beta)\sin\theta - (\alpha\,\eta + \beta\,\varepsilon)\cos\theta}{(\sin\theta - \varepsilon\cos\theta)\,(\sin\theta - \eta\cos\theta)} \, .$$

Hieraus erhält man leicht für rechtwinklige Koordinaten

(3*) $$(x-k)\,(y - \varepsilon\,x)\,(y - \eta\,x) = (\alpha+\beta)\,x\,y - (\alpha\,\eta + \beta\,\varepsilon)\,x^2 \, .$$

Dies ist die Gleichung einer ganz allgemeinen Kubik mit einem Doppelpunkt in O. Die Gerade G $(x - k = 0)$ ist selbst Asymptote; die beiden anderen Asymptoten ergeben sich nach bekannten Methoden als $y - \varepsilon\,x - \alpha = 0$ und $y - \eta\,x - \beta = 0$. Das sind die Asymptoten des Kegelschnittes Γ', den man durch Spiegelung am Punkte O aus Γ erhält. Ihren Schnittpunkt bekommt man also, wie im

vorigen Paragraphen den außerordentlichen Brennpunkt B[34]). Die Polargleichungen der beiden Asymptoten sind

$$\varrho' = \alpha/(\sin\theta - \varepsilon\cos\theta) \quad \text{und} \quad \varrho'' = \beta/(\sin\theta - \eta\cos\theta)\,.$$

Da sich aber (3) in der Form schreiben läßt

$$(3^\dagger) \qquad \varrho = \frac{k}{\cos\theta} + \frac{\alpha}{\sin\theta - \varepsilon\cos\theta} + \frac{\beta}{\sin\theta - \eta\cos\theta}\,,$$

so sieht man, daß für alle Punkte der Kurve ist

$$(4) \qquad \varrho = \varrho_1 + \varrho' + \varrho''\,,$$

d. h. *die rationale Kubik kann als Kissoide aus ihren drei Asymptoten konstruiert werden, wenn man den Doppelpunkt als Pol nimmt.* Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die Gleichung jeder rationalen Kubik in die Form (3*) gebracht werden kann, sofern nur 1. ihr Doppelpunkt im Endlichen liegt, 2. nicht sämtliche drei Asymptoten in die unendlich ferne Gerade fallen[35]). Daher gilt die durch (3) gegebene Erzeugung mit der angedeuteten Einschränkung für alle rationalen Kubiken, von der Erzeugung (4) aber sind auch noch die ausgeschlossen, die von der unendlich fernen Geraden (zweipunktig) berührt werden[36]).

Wir werden im folgenden drei Beispiele bekannter Kurven geben, wo Γ je eine Hyperbel, Parabel, Ellipse ist. Die Kurven sind aber alle symmetrisch, der Pol also ein Scheitel von Γ. Dann hat die Kegelschnittgleichung die Form

$$(5) \qquad y^2 = 2\,p\,x + q\,x^2\,,$$

wo für die Ellipse $p = -b^2/a$, $q = -b^2/a^2$, $a = p/q$, $b^2 = -p^2/q$, $q + 1 = e^2/a^2 = \varepsilon^2$ zu setzen ist. Für die Hyperbel muß b durch $i\,b$ ersetzt werden, für die Parabel ist $q = 0$. G möge seine Gleichung behalten. Die Glei-

---

[34]) Hätten wir Γ' und G zur Erzeugung benutzt, so hätten wir $\varrho = \varrho_1' + \varrho_2'$ gehabt und die Asymptoten der Kissoide wären mit den Asymptoten der Grundgebilde identisch gewesen. Die Wahl der Differenz hat aber sonst manche Vorzüge.

[35]) K. Zahradník, Arch. Math. **56**, 1874, S. 8—10 und G. Stiner, Mtsh. Math. **4**, 1893, 100—114: *Metrische Eigensch. d. Kurven 3. Ordg. mit Doppelpunkt.*

[36]) Die Gleichung $\varrho_2 = \varrho' + \varrho''$, die für den Kegelschnitt gilt, stellt beiläufig eine bekannte Eigenschaft der Hyperbel dar.

chung der Kissoide lautet unter diesen Voraussetzungen in Punktkoordinaten

$$(6) \qquad (x - k)(y^2 - q x^2) + 2 p x^2 = 0 .$$

Es ist demnach in (3*) $\varepsilon = +\sqrt{q}$, $\eta = -\sqrt{q}$, $\alpha = -\beta = -p/\sqrt{q}$ zu setzen.

30. Wir kommen zu einem ersten Beispiel der verlangten Art, indem wir eine Kurve in folgender Weise definieren: Gegeben ein Kreis mit dem Radius $OA = r$; von A aus nehmen wir auf der Peripherie zwei Bogen in

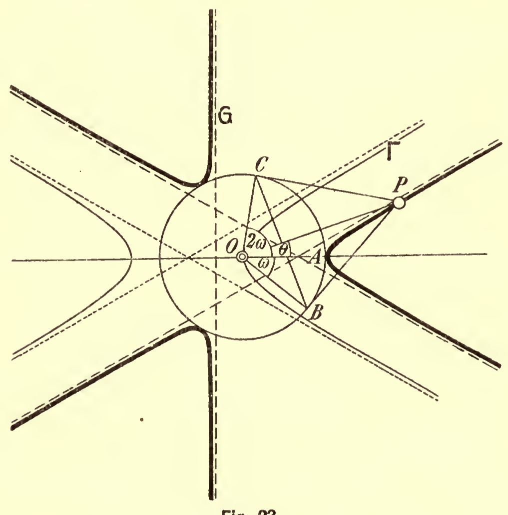


Fig. 23.

entgegengesetzter Richtung $AC = 2 AB = 2 r \omega$, wenn ω der zu AB gehörige Zentriwinkel ist (Fig. 23). Die Tangenten in B und C schneiden sich in einem Punkte P der Kurve. Das ist die »Trisektrix von DE LONGCHAMPS« [37]). Ihre Polargleichung ergibt sich sofort als

$$(7) \qquad \varrho \cos 3\theta = r ,$$

[37]) G. DE LONGCHAMPS, Mathesis **8**, 1888; *Cours de Probl.* [11]), S. 174. — ASTOR, Nouv. Ann. Math. (3) **14**, 385. Die Trisektion auszuführen überlassen wir hier und in Zukunft dem Leser.

woraus ihre kartesische Gleichung folgt

$$(x + \tfrac{1}{3} r)(3 y^2 - x^2) + \tfrac{4}{3} r x^2 = 0 \,. \tag{7*}$$

Diese ist demnach in der Tat leicht mit (6) zu identifizieren. Die Gerade G hat die Gleichung $x = -\frac{1}{3} r$, die Hyperbel Γ aber $y^2 = \frac{4}{9} r x + \frac{1}{3} x^2$, oder

$$\frac{(x + \frac{2}{3} r)^2}{(\frac{2}{3} r)^2} - \frac{y^2}{(\frac{2}{3} r/\sqrt{3})^2} = 1 \,.$$

Außer G hat die Kurve noch die zwei Asymptoten $(x - \frac{2}{3} r) \pm y \sqrt{3} = 0$, die zu den Asymptoten von Γ parallel laufen und mit G ein gleichseitiges Dreieck bilden. Die Asymptoten sind Wendeasymptoten. Die Kurve besteht aus drei kongruenten Zweigen, die den Kreis in drei um Bogen von je 120^0 voneinander entfernten Punkten berühren (dreifache Symmetrie). O ist ein isolierter Punkt der Kurve. Die Tangenten in O sind die isotropen Geraden $x^2 + y^2 = 0$; daher ist O auch ein Brennpunkt der Kubik; sie gehen durch die Schnittpunkte von G und Γ, wie das bei jeder durch Subtraktion der Vektoren gebildeten Kissoide der Fall ist. Die Einhüllende der Geraden BC wird uns später beschäftigen (s. Nr. 100).

31. Das zweite Beispiel betrifft ebenfalls eine von G. de Longchamps aufgestellte und »cubique mixte« benannte Kurve[38]). Dieselbe Kubik wurde aber unter dem Namen »Tangentenkurve der Parabel« schon früher von L. Henkel[39]) untersucht. Unter »Tangentenkurve« einer Kurve Θ versteht dieser Autor überhaupt die Kurve Θ′, die entsteht, wenn man in jedem Punkte A von Θ die Tangente T zieht und die Ordinate von A mit der durch den Anfangspunkt O des Koordinatensystems gezogenen Parallele zu T in P schneidet (Fig. 24). P beschreibt die Kurve. Hat dann Θ die Gleichung

$$y = f(x) \,, \tag{8}$$

---

[38]) Journ. math. spéc. 1886, S. 245/7; *Essai sur la géom. de la règle et de l'équerre,* Paris (Delagrave) 1890, S. 116/8. »Branche mixte« nennt der Autor einen Kurvenzweig, der auf der einen Seite eine Asymptote hat, auf der andern parabolisch ins Unendliche geht. Daher der Name »cubique mixte«.

[39]) Diss. Marburg 1882.

so ist die Gleichung von Θ'

(9) $$y = x f'(x) .$$

Auf solche Weise erhält man aus der Gleichung einer Parabel P

(10) $$y^2 = 2(x - k)p$$

die Gleichung der Tangentenkurve

(11) $$(x - k)y^2 - \tfrac{1}{2} p x^2 = 0 .$$

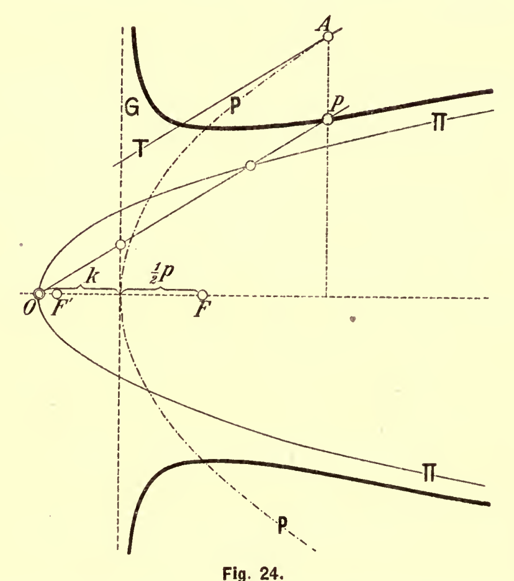


Fig. 24.

Vergleichen wir diese mit (6), so erkennen wir sofort $q = 0$ und den Parameter der Grundparabel Π als den vierten Teil des Parameters von P. Addieren wir hier die Vektoren, so hat Π die Gleichung $y^2 = \frac{1}{2} p x$. Π ist demnach eine asymptotische Parabel für die Kubik; sie berührt diese 4-punktig. Die beiden anderen Schnittpunkte liegen im Doppelpunkt O, der je nach der Lage von Π und G isoliert oder Knoten ist. Wir haben den Fall gezeichnet, der von de Longchamps ursprünglich allein ins Auge gefaßt wurde, daß nämlich $k = \frac{1}{2} p = \frac{1}{2} OF$,

wenn F der Brennpunkt von P ist. Dann sind die isotropen Geraden Tangenten des Doppelpunktes. Verschiebt man Π zu sich parallel, so bleibt die Parabel 4-punktig berührend; wenn aber ihr Scheitel um k nach der negativen Seite rückt, wird sie 6-punktig berührend; ihre Gleichung ist dann $y^2 = \frac{1}{2} p(x + k)$.

32. Die dritte Kurve, die wir hier als Beispiel geben wollen, entsprang überhaupt nicht einer geometrischen Definition; aber sie hat ein gewisses historisches Interesse. Ihre Gleichung

(12) $$x^3 + y^3 = 3\,a\,x\,y$$

diente nämlich Descartes als eines der ersten Beispiele für seine Koordinatenmethode. Wir erkennen den Anfangspunkt als Knoten mit den Achsen als Tangenten und die (Wende-)Asymptote $x + y + a = 0$. Da man x und y vertauschen kann, ist die Kurve gegen die Winkelhalbierenden der Achsen symmetrisch. Führen wir, um die Gleichung auf unsere Normalform (6) zu bringen, diese Winkelhalbierenden als neue Achsen ein, setzen also

$$x\sqrt{2} = -\xi - \eta\,, \quad y\sqrt{2} = -\xi + \eta\,,$$

so wird aus (12)

(12*) $$\xi\sqrt{2}\,(\xi^2 + 3\,\eta^2) = 3\,a\,(\eta^2 - \xi^2)$$

oder

(12†) $$\left(\xi - \tfrac{1}{2}\,a\sqrt{2}\right)(\eta^2 + \tfrac{1}{3}\,\xi^2) + \tfrac{2}{3}\,a\sqrt{2}\cdot\xi^2 = 0\,.$$

Daher ist die Gleichung von G: $\xi = \frac{1}{2}\,a\sqrt{2}$ und die Gleichung der Grundellipse Γ, wenn man die Vektoren wieder subtrahiert,

$$\frac{(\xi - a\sqrt{2})^2}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{\eta^2}{(a\sqrt{\frac{2}{3}})^2} = 1\,.$$

Da Descartes nur die Schleife der Kurve betrachtete, nannte er sie »Folium« und die Kurve heißt seitdem »Folium Cartesii« oder »Descartessches Blatt« (Fig. 25).

Wenn man auf (12*) die Transformation (Affinität) ausübt

$$\xi = x\sqrt{3}\,, \quad \eta = y\,,$$

so wird daraus die Gleichung

(13) $$2x(x^2+y^2) = a\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,(y^2 - 3x^2)\,.$$

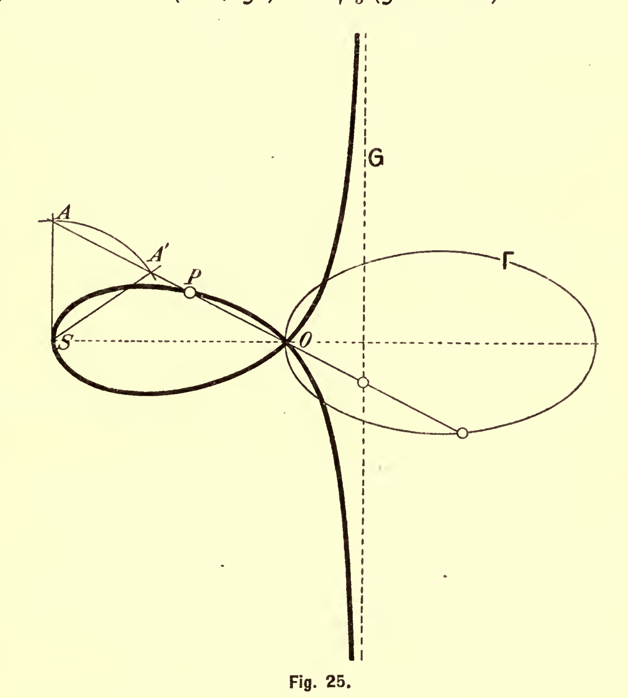


Fig. 25.

Das ist eine Trisektrix des MACLAURIN mit $r = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ [vgl. (11) in Nr. 28]. Es liegen daher auch beim Descartesschen Blatt alle drei Wendepunkte im Unendlichen, da bei einer affinen Transformation die unendlich ferne Gerade in sich verschoben wird. Der Leser wird dies leicht direkt erweisen.

Bem. Folgende von DE LONGCHAMPS[40]) für das Descartessche Blatt gegebene Konstruktion möge der Leser ebenfalls selbst verifizieren: Ziehe im Scheitel S die Tangente, schneide diese

[40]) *Géom. de la règle etc.*[38]) S. 105.

mit einem Strahl aus O in A, mache $SA' = SA$ (A' auf OA) und suche den in bezug auf O und A' zu A harmonisch zugeordneten Punkt P. Dieser beschreibt das Descartessche Blatt.

33. Bezüglich der Quadratur der bisher betrachteten rationalen Kubiken wollen wir uns darauf beschränken, die der symmetrischen Formen anzugeben, die durch Gleichung (6) dargestellt werden. Man erhält aus (6)

$$(14) \qquad y^2(x-k) = x^2(qx - kq - 2p)$$

oder, wenn man $k + 2p/q = \varkappa$ setzt,

$$(15) \qquad \mathcal{F} = \sqrt{q}\int x\sqrt{\frac{x-\varkappa}{x-k}}\,dx\,.$$

Wertet man dieses Integral aus (indem man etwa $x - \varkappa = z$ setzt), so ergibt sich

$$(16) \qquad \begin{cases} \mathcal{F} = \frac{1}{4}\sqrt{q}\left[(2x - \varkappa + 3k)\sqrt{(x-\varkappa)(x-k)}\right. \\ \left. - (\varkappa + 3k)(\varkappa - k)\log\left(\sqrt{x-\varkappa} + \sqrt{x-k}\right)\right]. \end{cases}$$

Dieses Integral wollen wir nun für verschiedene Kurven spezialisieren.

1. Gerade Strophoide. Es ist $\sqrt{q} = i$, $\varkappa = -r$, $k = r$. Daher hat man a) für die Schleife $\mathcal{F}_0 = \frac{1}{2}i[\ldots]_0^{-r}$ $= 2r^2 i\left[-i - \log\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right] = 2r^2 i\left[-i + \frac{1}{4}i\pi\right] = 2r^2 - \frac{1}{2}r^2\pi$; b) für die Fläche zwischen den unendlichen Ästen und der Asymptote $\mathcal{F}_1 = \frac{1}{2}i[\ldots]_0^r = 2r^2 i\left[-i + \log\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right] = 2r^2 + \frac{1}{2}r^2\pi$. Demnach ist $\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 = (2r)^2$.

2. Kissoide des Diokles. Es ist $\sqrt{q} = i$, $\varkappa = 0$, $k = 2r$. Die ganze Fläche der Kurve bis zur Asymptote hat also den Wert $\mathcal{F} = \frac{1}{2}i\left[12r^2\log\sqrt{2r} - 12r^2\log\sqrt{-2r}\right]$ $= -3ir^2\log(-1) = 3r^2\pi$, d. i. das Dreifache des erzeugenden Kreises. Diese Eigenschaft wurde von Chr. Huygens (1658) und Fermat (1661) zuerst entdeckt.

3. Trisektrix des Maclaurin. Hier hat man $\sqrt{q} = i$, $\varkappa = -\frac{3}{2}r$, $k = \frac{1}{2}r$. Daher ist $\mathcal{F} = \frac{1}{2}i\left[(2x + 3r)\right.$ $\left.\sqrt{(x + \frac{3}{2}r)(x - \frac{1}{2}r)}\right]$. Dieser Ausdruck ist zu nehmen zwischen den Grenzen 0 und $-\frac{3}{2}r$ für die Schleife, zwischen 0 und $\frac{1}{2}r$ für den unendlichen Teil. Wegen

der beiden Faktoren in der Quadratwurzel sind daher die beiden Flächenwerte gleich: $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$.

4. Descartessches Blatt. Es ist $\sqrt{q} = i\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\varkappa = -3a/\sqrt{2}$, $k = a/\sqrt{2}$. Also ist $\mathcal{F} = \frac{1}{2} i \sqrt{\frac{1}{3}}\Big[(2x + 3a\sqrt{2}) \cdot \sqrt{(x + 3a/\sqrt{2})(x - a/\sqrt{2})}\Big]$. Wie vorhin verschwindet die Quadratwurzel für die beiden Grenzen $-3a/\sqrt{2}$ und $a/\sqrt{2}$. Demnach ist $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \frac{3}{2} a^2$. Dies war wegen der affinen Beziehung zur Trisektrix des MACLAURIN vorauszusehen.

5. Begleitkurve der Kissoide des DIOKLES. Für diese Kurve hat man $\sqrt{q} = i$, $\varkappa = 4r$, $k = 2r$. Daher ist die Fläche zwischen Kurve und Asymptote

$$\mathcal{F} = \tfrac{1}{2} i \left[-20 r^2 \log\left(\sqrt{x - 4r} + \sqrt{x - 2r}\right)\right]_{4r}^{2r}$$
$$= -10 r^2 i \log i = 5 r^2 \pi .$$

Zum Schlusse möge bemerkt werden, daß man alle soeben behandelten Kurven, sofern sie zirkular sind, »Slusesche Konchoiden«[41]) nennt.

§ 8. Zwei andere Typen rationaler Kubiken.

34. Wenn wir auch darauf verzichten, hier alle Kurven dritter Ordnung mit Doppelpunkt, die je einen Namen erhielten, aufzuführen, so müssen wir doch noch zwei Kurvengattungen besprechen. Es sind das gerade Vertreter derjenigen Typen, die wir im vorigen Paragraphen von der kissoidalen Erzeugung ausschließen mußten, d. h. die eine Gattung hat die unendlich ferne Gerade zur Wendetangente, der Doppelpunkt der andern liegt im Unendlichen.

Die erste Kurve erzeugen wir als »Normalenkurve der Parabel«. Als solche wurde die allgemeine Form, wie die »Tangentenkurve« der Nr. 31, von L. HENKEL a. a. O. aufgestellt. Wie oben sei die Gleichung der Parabel P

(1) $$y^2 = 2(x - k)p .$$

Wir ziehen in jedem Punkte A von P die Normale N und schneiden die Ordinate von A mit der durch den

[41]) S. den Briefwechsel von R. DE SLUSE und CHR. HUYGENS (Brf. vom 6. Okt. 1662) in *Oeuvres de Huygens* IV, S. 247.

Ursprung O gezogenen Parallele zu N in P (Fig. 26). P beschreibt dann die Kurve

(2) $$2x^3 = 2kx^2 + py^2 .$$

Diese ist symmetrisch, hat in O einen Doppelpunkt und gehört zu den Newtonschen divergierenden Parabeln, d. h. sie hat die unendlich ferne Gerade zur Wendetangente.

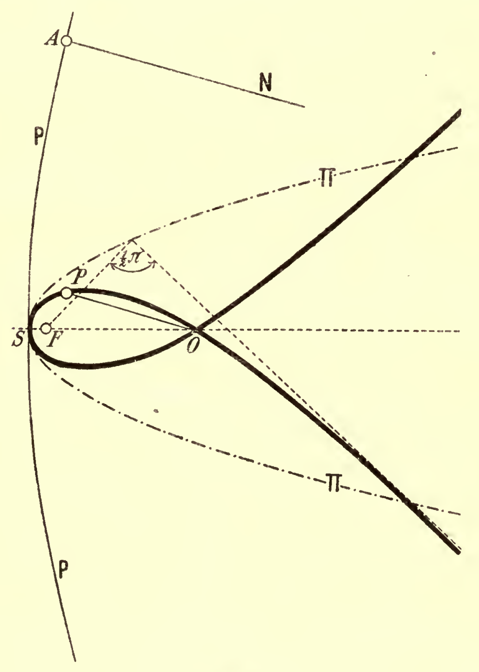


Fig. 26.

Der Doppelpunkt ist von verschiedener Art[42]), je nach der Lage von P. Insbesondere interessiert uns der Fall, wo die Doppelpunktstangenten unter 30^0 gegen die Symmetrieachse geneigt sind. Unter dieser Voraussetzung ist $k = -\frac{1}{6}p$ und die Kurvengleichung lautet

(3) $$x^3 + \tfrac{1}{6}p(x^2 - 3y^2) = 0 .$$

[42]) Für $k = 0$ eine Spitze; dann ist die Kubik eine sogenannte Neilsche (semikubische) Parabel.

Diese spezielle Normalenkurve der Parabel wurde von Tschirnhausen zuerst betrachtet und daher von R. C. Archibald[43]) »Tschirnhausens Kubik« genannt, welchen Namen wir ebenfalls anwenden wollen. Sie ist in Fig. 26 wiedergegeben. Ihre Eigenschaften entspringen großenteils daraus, daß sie eine Sinusspirale ist (vgl. Nr. 92). So ist ihre Fußpunktskurve in bezug auf einen bestimmten Punkt F der Achse eine Parabel mit F als Brennpunkt. Um dies festzustellen, nehmen wir irgend eine Parabel Π, auf den Brennpunkt F bezogen an mit der Gleichung

$$(4) \qquad y^2 = 2mx + m^2$$

oder in Polarkoordinaten

$$(4^*) \qquad \varrho = m/(1 - \cos\theta) .$$

Auf jedem Radiusvektor errichten wir in seinem Endpunkt das Lot und suchen die Enveloppe dieser Lote, d. h. die »negative Fußpunktskurve« der Parabel Π in bezug auf den Brennpunkt F. Die Gleichung eines solchen Lotes ist

$$(5) \qquad x\cos\theta\sin^2\tfrac{1}{2}\theta + y\sin\theta\sin^2\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{2}m = 0 .$$

Durch Differentiation nach θ erhält man

$$(6) \qquad x\cos\tfrac{3}{2}\theta + y\sin\tfrac{3}{2}\theta = 0$$

und demnach als Parameterdarstellung der Einhüllenden

$$(7) \qquad x = \frac{m\sin\frac{3}{2}\theta}{2\sin^3\frac{1}{2}\theta}, \quad y = -\frac{m\cos\frac{3}{2}\theta}{2\sin^3\frac{1}{2}\theta} .$$

Heißt man die Polarkoordinaten der gesuchten Kurve $\tilde{\varrho}$ und $\tilde{\omega}$, so ergibt sich hieraus

$$(8) \qquad \tilde{\varrho} = \tfrac{1}{2}m/\sin^3\tfrac{1}{2}\theta , \quad \operatorname{tg}\tilde{\omega} = -\operatorname{ctg}\tfrac{3}{2}\theta .$$

Demnach kann man setzen

$$\tilde{\omega} = \tfrac{3}{2}\theta + \tfrac{3}{2}\pi , \qquad \text{oder} \qquad \tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{3}\tilde{\omega} - \tfrac{1}{2}\pi ,$$

[43]) *The cardioid and some of its related curves.* Diss. Straßburg 1900. — Tschirnhausen, Act. Erud. 1690. S. die von R. C. Archibald gegebene Bibliographie im Interméd. math. **8**, 1901, 10. Cazamian nannte sie (Nouv. Ann. math. **13**, 1894, 307) »cubique de l'Hôpital«. Dieselbe Kurve ist bei Loria (S. 86/87) ohne Angabe der Identität auch als »Trisektrix von Catalan« aufgeführt.

so daß die gesuchte Gleichung in Polarkoordinaten wird

(9) $$\varrho = -\tfrac{1}{2}\, m/\cos^3 \tfrac{1}{3}\,\tilde{\omega}\,.$$

Diese transformiert man zu rechtwinkligen Koordinaten mittels der schon in Nr. 28 verwendeten Formel; es kommt

(9*) $$27\, m(x^2 + y^2) = 2(x + 2\, m)^3\,.$$

Gemäß dieser Gleichung hat die Kurve einen Doppelpunkt in $x = 4\, m$, $y = 0$. Transformieren wir zu diesem Punkt als Anfangspunkt, so ergibt sich

(9†) $$x^3 + \tfrac{9}{2}\, m\,(x^2 - 3\, y^2) = 0\,.$$

Das ist in der Tat die Form der Gleichung (3). Für die neue Parabel ist $m = \frac{1}{27}\, p$. Die Scheitel der Parabeln P und Π fallen zusammen in den Scheitel S der Kurve. Der Punkt F teilt die Strecke SO im Verhältnis $1:8$ ($SF = \frac{1}{2}\, m$). In bezug auf F ist also Tschirnhausens Kubik die negative Fußpunktskurve der Parabel Π. Diese Erzeugung ist, wie man durch eine einfache Betrachtung feststellt, identisch mit der folgenden. Ein Büschel von zur Achse senkrechten Lichtstrahlen werde an der Parabel Π reflektiert. Die Einhüllende der zurückgeworfenen Strahlen (Katakaustik) ist dieselbe Tschirnhausensche Kubik (Verallgemeinerung in Nr. 275).

Die Quadratur der betrachteten Kurvengattung ist durchaus elementar. Insbesondere erhält man für die Fläche der Schleife der Tschirnhausenschen Kubik aus (9) oder (9*) den Wert $\frac{18}{5}\, m^2 \sqrt{3}$.

35. Den zweiten Kurventypus, von dem wir hier sprechen wollen, leiten wir aus einem Kreise K und einer Geraden G durch eine Transformation ab, die überhaupt geeignet ist, alle rationalen Kubiken zu erzeugen. Sie wurde von P. H. Schoute eingehend untersucht und von diesem »Maclaurinsche Transformation« genannt[44]). Allgemein lautet diese Transformation: „Gegeben eine

[44]) Man sehe die Abhandlung in Arch. Néerl. **20**, 1885, ev. den kurzen Auszug bei Loria, S. 83/6. — Eine andere Transformation, die dasselbe leistet, wobei ein Kegelschnitt (ev. Kreis) und eine Gerade verwendet wird, untersuchte V. Retali, Mém. Soc. Sc. Liége (3) **2**, 1900. Es ist dies eine Verallgemeinerung derjenigen Transformation, die zur »Tangentenkurve« einer gegebenen Kurve führt.

Kurve K, eine Gerade G und drei Punkte O, O', O''. Eine Gerade durch O schneide K in Q, G in R. Q verbinde man mit O', R mit O''; dann schneiden sich $O'Q$ und $O''R$ in einem Punkte P, der eine Kurve beschreibt, wenn Q auf K läuft". Nehmen wir für K einen Kreis, O auf dem Kreis, G senkrecht zu dem durch O gehenden Durchmesser $OB = b$ im Abstande $OA = a$, O' im unendlich fernen Punkt von G, O'' im unendlich fernen Punkt von OB, so ergibt sich die Konstruktion, die aus Fig. 27 ersichtlich ist. Setzt man

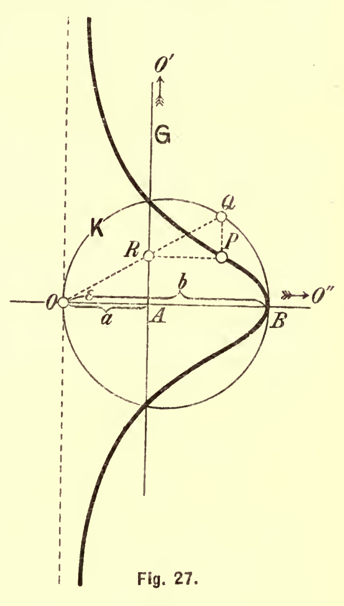


Fig. 27.

$$\sphericalangle QOB = \varepsilon,$$

so ist für P (auf O bezogen)

(10) $x = b\cos^2\varepsilon, \quad y = a\,\mathrm{tg}\,\varepsilon.$

Also beschreibt P die Kubik

(10*) $xy^2 = a^2(b - x).$

Hier ist $x = 0$ Wendeasymptote, B Scheitel, der unendlich entfernte Punkt der x-Achse isolierter Punkt (Tangenten $y^2 + a^2 = 0$). Für die Fläche der Kurve bis zur Asymptote erhält man

$$(11) \qquad \mathcal{F} = 2\int_0^\infty \frac{a^2 b}{y^2 + a^2}\,dy = ab\pi.$$

Diese ist also gleich einer Ellipse mit den Halbachsen a, b oder einem Kreis mit dem Radius $\sqrt{ab}$. Es sind in dieser Familie zwei Kurven enthalten, die zu verschiedenen Zeiten gesondert aufgestellt und betrachtet wurden. Die eine entsteht für $a = b$; das ist die »Versiera«, die lange Zeit der AGNESI zugeschrieben wurde[45]), aber von

---

[45]) *Instituzioni analitiche* (Milano 1748). — Genaueres über die ganze Familie in einem Aufsatze des Verfassers, Monatsh. Math. **18**, 1907, 132—137.

Guido Grandi (1718) ihren Namen erhielt, und noch früher von Fermat u. a. schon aufgestellt worden war. Für die andere ist $a = \frac{1}{2} b$. Das ist die von Ozanam »Geometrische Quadratrix« genannte Kurve; sie ist affin zur Versiera[46]).

---

[46]) Ozanam, *Géom. pratique* (Paris 1684); von G. Loria, als diese Quelle noch nicht bekannt war, »Pseudoversiera« genannt (Bibl. math. 1897, 7—12, 33/4). Leibniz benutzte die Quadratur der Geometrischen Quadratrix zur Aufstellung seiner berühmten Reihe $\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$; s. G. Loria in Bibl. math. (3) **3**, 1902, 127/30. Der Leser braucht nur die Division in (11) unter dem Integral auszuführen und die entstandene Reihe gliedweise zu integrieren.

Hier sei noch nachträglich bemerkt, daß der Begriff der »Kurven gleicher Potenz« (S. 10) vom Verfasser in der auf S. 68 zitierten Abhandlung[57]) eingeführt wurde.

II. ABSCHNITT.

KONCHOIDEN.

§ 9. Gewöhnliche und schiefe Konchoiden. Grundbegriffe der kinematischen Geometrie.

36. Die Familie der »Kissoiden«, die hauptsächlich der Gegenstand des vorigen Kapitels war, wurde dadurch gebildet, daß zwei Grundkurven Γ und Γ' gegeben waren und man von einem beliebigen Punkte O als Pol aus die bezüglichen Radienvektoren subtrahierte (bzw. addierte). Im besonderen behandelten wir dann die Fälle, wo Γ ein Kreis oder eine Gerade, Γ' aber ein Kreis war, der durch O ging. Indem wir alle anderen denkbaren Fälle beiseite lassen, widmen wir das vorliegende Kapitel den Kissoiden, die entstehen, wenn Γ' ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt in O liegt. Kurven mit dieser Entstehungsweise heißen — aus einem später (Nr. 42) zu erklärenden historischen Grunde — »Konchoiden«.

Ist Γ von der Ordnung n, so ist die Ordnung der Konchoide, wenn Γ β-mal durch den Pol geht und α-fach zirkular ist, $2(2n-\beta-\alpha)$. Dies geht sofort aus der für Kissoiden in Nr. 2 aufgestellten Formel hervor[47]). Dabei ist der Pol ein $2(n-\alpha)$-facher Punkt der Konchoide.

Wir drücken nun die kissoidale Konstruktion der Konchoiden einfacher aus, indem wir sagen: *Aus irgend einer Kurve Γ leitet man eine (gewöhnliche) Konchoide ab, indem man von einem beliebigen Pol O aus die Radienvektoren von Γ um eine konstante Strecke l (Zwischenstück)*

---

[47]) Dieselbe Formel leitete G. Loria auf andere Weise ab im Int. Math. 8, 1901, 297. An der nämlichen Stelle fügte P. Hendlé bei, die Asymptoten der Grundkurve Γ seien für die Konchoide doppelt zählende Asymptoten. Unsere Beispiele werden dies bestätigen.

verlängert bzw. verkürzt. Daß wir aber den Konchoiden, obwohl sie nur einen speziellen Fall der Kissoiden darstellen, ein eigenes Kapitel widmen, ist hauptsächlich damit begründet, daß die »konchoidale« Konstruktion als eine durch einen Bewegungsmechanismus hervorgebrachte Erzeugung betrachtet werden kann, wodurch ein ganz neues Moment in die Betrachtungen kommt.

Denken wir uns nämlich zwei Ebenen $\varDelta$ und $\varDelta'$ übereinandergelagert; in $\varDelta$ sei ein fester Punkt O und eine feste Kurve Γ gegeben, in $\varDelta'$ eine Gerade G und auf ihr zwei feste Punkte P und Q im Abstande l. Wir verschieben nun $\varDelta'$ gegen $\varDelta$ so, daß G immer durch O geht und P auf Γ gleitet: dann beschreibt Q, wo man sich einen Stift befestigt denken mag, in $\varDelta$ eine Konchoide von Γ nach der obigen Definition. Und überhaupt jeder Punkt von G beschreibt eine Konchoide von Γ. Die so definierte Bewegung der beiden Ebenen gegeneinander heißt daher eine »konchoidale«. Zum Verständnis der ganzen Bewegung erscheint es aber nötig, auch nach den Kurven zu fragen, die von den außerhalb von G in $\varDelta'$ liegenden Punkten R beschrieben werden. Da sowohl RP als auch $\sphericalangle RPO = \omega$ konstant sind, erhält man diese Kurven, indem man an den Radiusvektor OP ein konstantes Stück m unter einem konstanten Winkel ω anträgt. Wir nennen sie daher »schiefe Konchoiden« von Γ[48]); für $\omega = 2\pi$ oder $=0$ entstehen dann die zuerst betrachteten, die wir Konchoiden schlechthin oder, wenn eine Gegenüberstellung nötig ist, »gewöhnliche Konchoiden« nennen. Die Ordnung der schiefen Konchoide bleibt, wie eine einfache Überlegung ergibt, dieselbe wie die der gewöhnlichen.

37. Die Bewegung einer Ebene gegen eine andere, oder, wie man auch sagen kann, einer Ebene in sich, da man ja $\varDelta$ und $\varDelta'$ als identisch betrachten kann, müssen wir etwas genauer studieren[49]), um diese Auffassung für

---

[48]) In dieser Weise hat schon DE LA HIRE den Begriff gefaßt, in Mém. Ac. sc. 1708 (Paris 1730), 32—61, und die Normale konstruiert, wie in Nr. 40 gezeigt werden wird.

[49]) Unter »Kinematik« versteht man den Teil der Bewegungslehre, der von den Kräften absieht (AMPÈRE, *Essai sur la philosophie des sciences,* Paris 1834). Von der Kinematik hat sich dann

verschiedene Konstruktionsarten, zunächst die konchoidale, auszunutzen. Eine solche Bewegung ist, wie die Koordinatentransformation, von 3 Konstanten abhängig. Denn man kann jedem Punkt eine beliebige Lage anweisen und dann noch die Ebene um diesen Punkt drehen. Soll die Bewegung also zu einer bestimmten werden, so daß jeder Punkt von $\varDelta'$ in $\varDelta$ eine Linie (Trajektorie) beschreibt, so müssen wir ihr zwei Bedingungen auferlegen. Zu diesem Zwecke kann man geben, wenn man sich auf die einfachsten Fälle beschränkt, 1. die Trajektorien zweier festen Punkte von $\varDelta'$ in $\varDelta$, 2. die Trajektorie eines Punktes und die Einhüllende einer Kurve von $\varDelta'$ in $\varDelta$, 3. die Einhüllenden zweier Kurven von $\varDelta'$ in $\varDelta$. Die konchoidale Bewegung gehört hiernach zum zweiten Typus; die Einhüllende ist auf einen Punkt zusammengeschrumpft.

Um aber die Gesetze einer solchen Verschiebung einer Ebene gegen eine andere zu erkennen, ist es nötig, die Bewegung zuerst diskontinuierlich verlaufen zu lassen. Wir geben zweien Punkten A und B von $\varDelta'$ in $\varDelta$ zunächst die Anfangslage A_0, B_0 und eine zweite Lage A_1, B_1 (Fig. 28). Man sieht, daß dann die Lage jedes dritten Punktes ebenfalls bestimmt ist. Die Überführung der Ebene $\varDelta'$ von der Lage $\varDelta_0'$ in die Lage $\varDelta_1'$ kann nun durch eine einzige Rotation dargestellt werden. Sucht man nämlich den Punkt M_{01}, der von A_0 und A_1, bzw. von B_0 und B_1 gleichweit entfernt ist, so ist offenbar $\triangle A_0 B_0 M_{01} \cong \triangle A_1 B_1 M_{01}$ und von demselben Sinne, so daß beide Dreiecke und damit beide Ebenenlagen durch eine Rotation um M_{01} ineinander

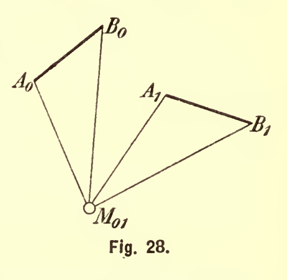


Fig. 28.

---

noch eine Disziplin abgezweigt, in der auch von der Zeit (Geschwindigkeit) abgesehen wird, die also von den bloßen Verschiebungen (déplacements) handelt. Diese Disziplin wurde von einem ihrer erfolgreichsten Förderer, A. Mannheim, »Géométrie cinématique« (deutsch auch »Geometrie der Bewegung« nach J. Cevas *Geometria motus* 1692) genannt. Um diese letztere handelt es sich bei unseren Überlegungen allein. S. das mit vielen Beispielen ausgestattete Werk *„Principes et développements de Géom. cin.“* von A. Mannheim, Paris (Gauthier-Villars) 1894.

übergeführt werden können[50]). Die Trajektorien aller Punkte von Δ' sind also hier konzentrische Kreise und alle Mittellote zu den Verbindungsstrecken irgend zweier entsprechenden Punkte der Ebene gehen durch M_{01}. Erteilt man AB eine dritte Lage $A_2 B_2$, so ergibt sich ein entsprechendes Rotationszentrum M_{12} usw.

38. Denkt man sich nun die Lagen $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ usw. unendlich nahe aufeinanderfolgend, so daß A und B, sowie alle übrigen Punkte der Ebene Δ' Kurven beschreiben, so gehen die Mittellote zwischen den entsprechenden Punkten zweier aufeinanderfolgenden Lagen in die Normalen der Trajektorien dieser Punkte über. Wir haben demnach den Satz:

Bei einer beliebigen Verschiebung einer Ebene in sich gehen in jedem Augenblick der Bewegung die Normalen der Bahnen aller Punkte durch denselben Punkt M, das sogenannte Momentanzentrum[51]).

Nach einem bekannten Satze umhüllen ferner die Tangenten der Trajektorien aller Punkte einer Geraden G in jedem Augenblicke eine Parabel mit G als Scheiteltangente und dem Fußpunkt S des von M auf G gefällten Lotes als Scheitel. Dieser Punkt S rückt im gegebenen Momente in der Richtung der Geraden G weiter. Er ist daher *der Berührungspunkt der Kurve, die von G eingehüllt wird.* Sollte diese Kurve sich auf einen Punkt O reduzieren, wie bei den Konchoiden, so liegt M in jedem

---

[50]) Dieser Punkt ist identisch mit dem von Euler betrachteten »centrum similitudinis« (Nov. Act. Petrop. **9**, 1777, 154) und dem von Magnus so genannten »Situationspunkt« (*Aufg. u. Lehrs. a. d. anal. Geom.*, Berlin 1833, I, 59). Vgl. auch Chasles, Bull. sc. math. **14**, 1830, 321. — Wenn überhaupt zwei vereinigt liegende Ebenen Δ und Δ' sich punktweise ein-eindeutig projektiv (kollinear) entsprechen, so gibt es drei sich selbst entsprechende (Doppel-) Punkte. Im Falle der gleichsinnigen Kongruenz sind dies der in Frage stehende Punkt M_{01} und die imaginären Kreispunkte. Vgl. K. Doehlemann, *Geom. Transf.* I[1]), 154—159.

[51]) Entdeckt von Joh. Bernoulli, *„De centro spontaneo rotationis“*, Opera, Bd. 4, Lausannae 1742, S. 265, von Descartes aber schon gelegentlich zur Konstruktion von Kurvennormalen verwendet (*Epistolae* 1683, t. III, 213. Strengere Beweise als im Text, geometrisch bei A. Schoenflies, *„Geom. d. Bewegung“*, Leipzig (Teubner) 1886, 5; analytisch bei M. d'Ocagne, *„Cours de Géom. descr. et de Géom. infinitésimale“*, Paris (Gauthier-Villars) 1896, 265/6.

Augenblicke auf dem in O auf G errichteten Lote. Betrachten wir ferner eine beliebige Kurve C in $\varDelta'$ als Einhüllende ihrer Tangenten, so ist offenbar, *daß wir die momentanen Berührungspunkte von* C *mit ihrer Enveloppe erhalten, wenn wir die Fußpunkte der von M auf* C *gefällten Lote bestimmen;* dies sind zugleich die Berührungspunkte der Fußpunktskurve von C (in bezug auf M) mit C. Ihre Anzahl ist, wenn C die Ordnung n und die Klasse ν hat, im allgemeinen $n + \nu$ [52]).

39. Denken wir uns nun, indem wir die Bewegung zunächst wieder als diskontinuierlich voraussetzen, in der festen Ebene $\varDelta$ eine Reihe von Drehungspolen M_{01}, M_{12} usw. verzeichnet und merken wir uns in der beweglichen Ebene $\varDelta'$ die Punkte $M'_{01} = M_{01}$, M'_{12} usw. an, die nacheinander durch die verschiedenen Rotationen zur Deckung kommen (Fig. 29), so wird sich zuerst die Seite $M'_{01} M'_{12}$ auf $M_{01} M_{12}$, sodann $M'_{12} M'_{23}$ auf $M_{12} M_{23}$ usw. legen. Die ganze Bewegung kann sonach dargestellt werden durch das Abrollen eines in $\varDelta'$ befindlichen Polygonzuges auf einem in $\varDelta$ gezeichneten. Lassen wir nun wieder die Drehungszentren einander unendlich nahe rücken, so werden aus den Polygonen Kurven, die sogenannten »Polbahnen«, und wir können sagen:

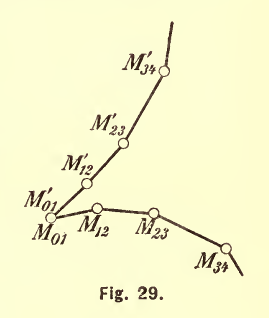


Fig. 29.

Jede Bewegung einer Ebene in sich kann dadurch vermittelt werden, daß eine beweglich gedachte Kurve auf einer festen, ohne zu gleiten, abrollt [53]).

Vorauszusetzen ist dabei allerdings, daß die Momentanzentra im Endlichen liegen, d. h. daß die Bewegung nicht in einer reinen Translation besteht. Wir haben dann zu den in Nr. 37 gegebenen 3 Bedingungen zur Bestimmung einer Bewegung eine vierte, d. i. die, bei der

---

[52]) S. z. B. Salmon-Fiedler, *Anal. Geom. d. höh. ebenen Kurven*, 2. Aufl., Leipzig (Teubner) 1882, 119/20.

[53]) Zuerst von Cauchy angegeben. *Exerc. de math.*, Bd. 2, 1827, S. 75. Zwei Jahre später auch von Chasles gefunden, aber erst veröffentlicht in dem *Mém. de Géom. s. l. constr. des normales etc.* im Bull. Soc. math. France **6**, 1878, 208 ff.

beide Polbahnen gegeben sind. Welche der beiden Kurven dann als fest, welche als beweglich betrachtet wird, ist an sich gleichgültig. In der Tat wird dem Beschauer, der mit der einen Polbahn fest verbunden gedacht wird, immer die andere als beweglich erscheinen, und es ist ein Standpunkt außerhalb $\varDelta$ bzw. $\varDelta'$ nötig, um dies unterscheiden zu können. Die Trajektorien sind aber freilich verschieden, je nachdem man die eine oder andere Ebene als fest betrachtet, wenn nicht etwa die beiden Polbahnen kongruent sind und sich in homologen Punkten berühren. Es ist jedoch von großem Nutzen, immer beide Bewegungen zusammen zu betrachten. Wir heißen, wo wir sie zu unterscheiden haben, die eine Bewegung die »ursprüngliche oder direkte«, die andere die »umgekehrte oder indirekte«[54]. Diese Begriffe genügen einstweilen, um beim genaueren Studium der Konchoiden, zu denen wir uns nun wenden, wichtige Dienste zu leisten.

§ 10. **Konchoiden der Geraden.**

40. Es sei zunächst Γ noch eine beliebige Kurve, O ein fester Punkt und wir bilden eine Konchoide von Γ, indem wir an jeden Radiusvektor OP von Γ eine Strecke $PR = l$ unter dem konstanten $\sphericalangle OPR = \omega$ antragen (Fig. 30). Nach dem obigen erhalten wir dann das Momentanzentrum M, indem wir in P zu Γ die Normale ziehen und diese mit dem in O auf OP errichteten Lot zum Schnitt bringen. Dieser Punkt M ist offenbar von l und ω unabhängig. Wir können demnach sagen: *Die Normale jeder Konchoide einer Grundkurve* Γ *geht durch den Endpunkt der Polarsubnormale von* Γ. Der Leser wird bemerken, daß wir diesen Satz auch aus dem für Kissoidennormalen (Nr. 3) gegebenen, allerdings nur für gewöhnliche Konchoiden hätten ableiten können. Die ebendort abgeleitete Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes läßt sich gleichfalls für gewöhnliche Konchoiden

[54]) Der Idee nach stammt die Betrachtung der umgekehrten Bewegung auch von Chasles. Die theoretische Bedeutung der Idee erkannte jedoch erst Aronhold. Vgl. die wichtigen *„Grundzüge der kinematischen Geometrie"* in den Verh. Ver. Bef. d. Gewerbfl. **51**, 1872, 129—155.

sehr leicht ausführen, da ϱ'' für die Grundkurve und alle Konchoiden denselben Wert hat. Wir beschränken uns aber darauf, sie in den von uns behandelten Spezialfällen anzugeben.

Der erste und nächstliegende Fall ist der, daß wir für Γ eine Gerade nehmen. Dann gestaltet sich die Kon-

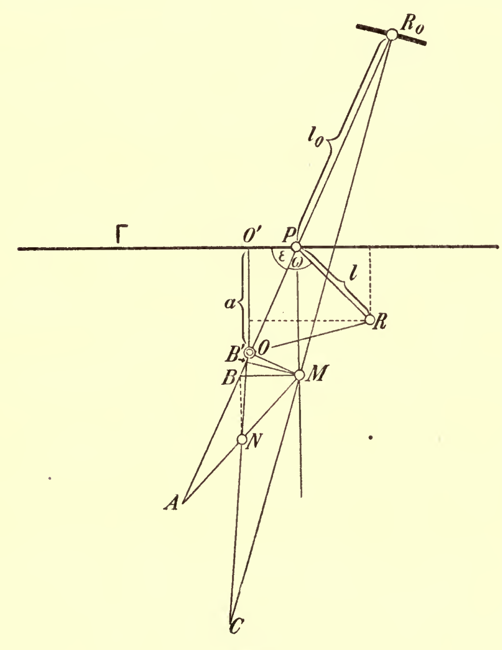


Fig. 30.

struktion des Krümmungszentrums C für einen Punkt R_0, der auf OP in der Entfernung $PR_0 = l_0$ von P liegt, folgendermaßen (Fig. 30): $PM \perp \Gamma$, $OM \perp OP$, M Momentanzentrum, $R_0 M$ Normale; $MB \perp PM$, $PB = BA$, N Mittelpunkt von MA; $MB' \perp MR_0$, $B'N$ schneidet die Normale MR in C. Punkt N bleibt konstant für alle Werte l_0.

41. Wir wollen nun sofort die Gleichung der von dem Punkte R beschriebenen schiefen Konchoide aufstellen, wenn Γ eine Gerade bleibt. Wir wissen, es wird eine Quartik entstehen. Ist die Entfernung des Poles O

von Γ $OO' = a$ und setzen wir den variablen $\sphericalangle OPO' = \varepsilon$, so hat R die Koordinaten, auf O' als Anfangspunkt bezogen

(1) $$x = a \operatorname{ctg} \varepsilon - l \cos(\omega + \varepsilon)\,, \quad y = -l \sin(\omega + \varepsilon)\,.$$

Aus diesen zwei Gleichungen ist ε zu eliminieren. Die Rechnung, die wir dem Leser überlassen müssen, ergibt

(2) $$\begin{cases} [x y \cos\omega - (y^2 + a y - l^2) \sin\omega]^2 \\ = (x \sin\omega + y \cos\omega + a \cos\omega)^2 \, (l^2 - y^2) \end{cases}$$

oder in leichtverständlichen Symbolen

(2*) $$\mathsf{H}^2 = \mathsf{A}^2 (l^2 - y^2)\,.$$

Wir haben also eine Quartik vor uns, die zwei Doppelpunkte D, D' hat, wo die Gerade A, die durch O geht, die Hyperbel H schneidet (vgl. Fig. 32). Außerdem ist noch ein Knoten im Unendlichen in der Richtung von Γ mit den beiden Tangenten (Asymptoten) $y = \pm l \sin\omega$. Die Kurve geht außerdem durch die Kreispunkte. Sie ist also rational und zirkular. Die Geraden $y = \pm l$ sind horizontale Tangenten. Zwischen ihnen liegt die Kurve. Der Doppelpunkt D ist immer ein Knoten; D' aber ist Knoten, Spitze oder isolierter Punkt je nach den Größenverhältnissen von a, ω und l.

Es ist ferner bekannt, daß die Gerade PR eine Parabel mit dem Brennpunkt O einhüllt. Dieser Punkt O ist auch außerordentlicher Brennpunkt der Konchoide, d. h. die beiden Tangenten (Asymptoten) in den unendlich fernen Kreispunkten gehen durch ihn. Man bestätigt dies am einfachsten, indem man in (2) $x = \pm i(y + a)$ setzt. Dann sieht man, daß die Koeffizienten von y^4 und y^3 verschwinden, d. h. daß die Gleichung zwei Wurzeln $z = 0$ hat.

42. Unter den Spezialisierungen für den Winkel ω sind es vor allem drei, die unser Interesse in Anspruch nehmen, das sind die Werte $\omega = 0$ (oder π); $\omega = \frac{1}{4}\pi$ (oder $\frac{5}{4}\pi$) und $\omega = \frac{1}{2}\pi$ (oder $\frac{3}{2}\pi$). Der erste gibt eine der ältesten speziellen Kurven, die »Konchoide des Nikomedes« (zwischen 250 u. 150 v. Chr.) mit der Gleichung

(3) $$x^2 y^2 = (y + a)^2 \, (l^2 - y^2)$$

oder in Polarkoordinaten, auf O bezogen

(3*) $$\varrho = \frac{a}{\sin\theta} + l\,.$$

Hierbei kann man vor l das Minuszeichen weglassen, wenn man nur für ϱ auch negative Werte zuläßt, θ aber als unbeschränkt veränderlich betrachtet. Dies stellt sich bei Anwendung der Polarkoordinaten auf viele spezielle Kurven als unabweislich heraus[55]. Insbesondere erhält man hier, wenn man $\theta + \pi$ setzt statt θ: $\varrho = -a/\sin\theta + l$; das ist aber dasselbe, als wie wenn man für θ hätte: $\varrho = a/\sin\theta - l$.

Die beiden parallelen Asymptoten der allgemeinen Konchoide fallen bei (3) in die x-Achse zusammen. Gegen

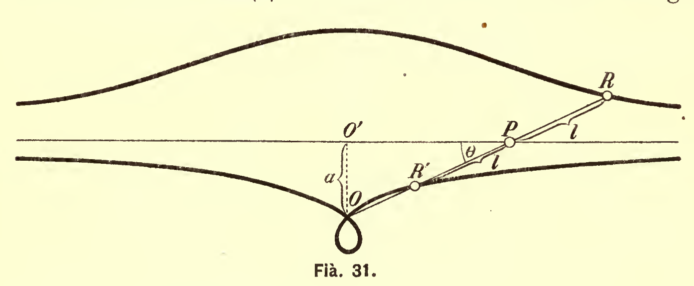


Fig. 31.

die y-Achse ist die Kurve symmetrisch, D' rückt nach O, D ist auf der x-Achse ins Unendliche gerückt. Dort hat die Konchoide des Nikomedes also einen Berührungsknoten, in O Knoten, Spitze oder isolierten Punkt, je nachdem $l >, =, < a$. Die Form mit Knoten ist in Fig. 31 wiedergegeben. Der oberhalb der x-Achse liegende Zweig, der im Altertum allein betrachtet wurde, hat in jedem Falle eine muschelförmige Gestalt (concha, ἡ κόγχη = die Muschel) mit zwei reellen Wendepunkten. Für die Wendepunkte ist überhaupt $\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho'' = 0$. Bildet man diese Gleichung aus (3*) und eliminiert l, so erhält man $\varrho = 2a\cos^2\theta/\sin^3\theta$ oder in Punktkoordinaten $y^3 = 2ax^2$ als *Ort für die Wendepunkte aller Konchoiden des Nikomedes bei gleichem Pol und gleicher Basis, aber variablem Zwischen-*

[55]) Siehe Loria, Note I, S. 714. — Serret-Scheffers, *Diff.- u. Integr.-Rechnung*, Leipzig (Teubner) 1906, I. Bd. 345/6.

stück. Es ist dies eine Neilsche Parabel[42]), mit Spitze in O und Wendepunkt in der Richtung der x-Achse mit der unendlich fernen Geraden als Tangente[56]).

Bem. Zur Konstruktion des Krümmungszentrums sei noch bemerkt, daß die in Nr. 40 angegebene für die Scheitel im Stich läßt. Aus dem allgemeinen Ausdruck für den Krümmungsradius in Polarkoordinaten berechnet man jedoch leicht für die Scheitel ($\theta = \frac{1}{2}\pi$ und $= \frac{3}{2}\pi$) die Werte $\mathfrak{R} = \pm(a \pm l)^2/l$.

43. Die zweite Spezialisierung der Gleichung (2) ergibt, wenn man $\omega = \frac{1}{4}\pi$ setzt:

$$(4) \qquad (xy - y^2 - ay + l^2)^2 = (x + y + a)^2\,(l^2 - y^2)\,.$$

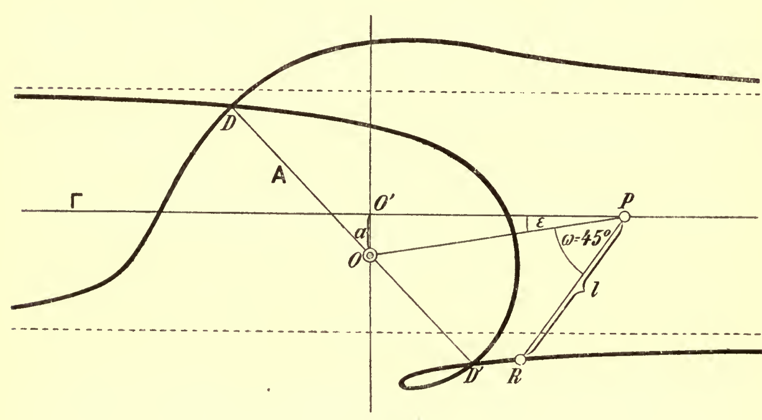


Fig. 32.

Diese Kurve, die wir in Fig. 32 (mit Knoten in D') dargestellt haben, wurde auf andere Weise von A. Dürer erzeugt und »Muschellinie« genannt[57]). Der Doppelpunkt D' ist Knoten, Spitze oder isolierter Punkt, je nachdem

[56]) De la Hire, Mém. Ac. R. Sc. 1708 (Paris 1730), S. 59; vgl. Arch. Math. Phys. (3) **11**, 1907, 151/2.

[57]) A. Dürer, *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt.* Nürnberg 1525, bei Loria S. 212. Die Identität der aus der Dürerschen Konstruktion hervorgehenden Quartik mit einer der konchoidalen Trajektorien bei gerader Grundkurve zeigte der Verfasser in Stzgsb. Ak. W. Wien (math.), **116**, Abt. IIa, 1907. Noch M. Cantor, der im 2. Bd. seiner *Vorl. üb. Gesch. d. Math.*, Leipzig (Teubner), 2. Aufl. 1900, 461 die Kurve ebenfalls aufführt, sagt, sie sei „wohl zu unterscheiden von der Konchoide der Alten".

$l >, =, < 2a$. Diese Bedingung findet man am einfachsten, indem man die Ordinate von D' $[y = -\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 2l^2})]$ bestimmt und sie mit der Ordinate $(y = -l)$ des tiefsten Punktes vergleicht.

44. Setzt man $\omega = \frac{1}{2}\pi$ in Gleichung (2), so ergibt sich die Kurve der Fig. 33 mit der Gleichung

$$(y^2 + ay - l^2)^2 = x^2(l^2 - y^2) \,. \tag{5}$$

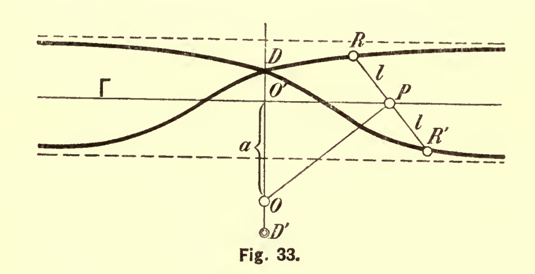


Fig. 33.

Diese Kurve, die man mit J. Neuberg als »Orthokonchoide« der Geraden bezeichnen kann[58]), ist dadurch bemerkenswert, daß sie neben der Konchoide des Nikomedes in dem System (2) die zweite symmetrische Form darstellt. Die beiden endlichen Doppelpunkte, von denen D immer Knoten, D' immer isolierter Punkt ist, liegen in der y-Achse und haben die Ordinaten $y = -\frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 4l^2})$. Hieraus ist auch klar, daß der isolierte Punkt nie in den Pol O fallen kann.

45. Wir wollen nun die Polkurven unserer konchoidischen Bewegung, bei der die Gerade (x-Achse) als Grundkurve dient, zu bestimmen suchen. Die feste Polbahn ist der Ort des Momentanzentrums M in der festen Ebene Δ. Für eine beliebige Lage der beweglichen Geraden OP hat dieses die Koordinaten (Fig. 34).

$$x = a \operatorname{ctg} \varepsilon \,, \quad y = -a/\sin^2 \varepsilon \,. \tag{6}$$

---

[58]) Vgl. die Broschüre mit dem Doppeltitel „*Notice s. un nouv. curvigraphe*“ p. V. Lebeau et „*S. les lignes tracées p. le curvigr. V. L.*“ p. J. Neuberg. Liége (E. Cloubert) 1904 (S.-A. aus Mém. Soc. Liége (3) **5**, 1904).

Hieraus ergibt sich durch Elimination von ε die Gleichung der festen Polbahn

$$x^2 + a(y + a) = 0\,, \tag{6*}$$

d. i. eine nach unten offene Parabel mit O als Scheitel und OO' als Achse.

Die Gleichung der beweglichen Polbahn erhalten wir, wenn wir bei der umgekehrten Bewegung die feste Polbahn suchen. Die zur konchoidischen Bewegung inverse ist aber diese: *Gegeben eine Gerade OH, auf ihr ein fester*

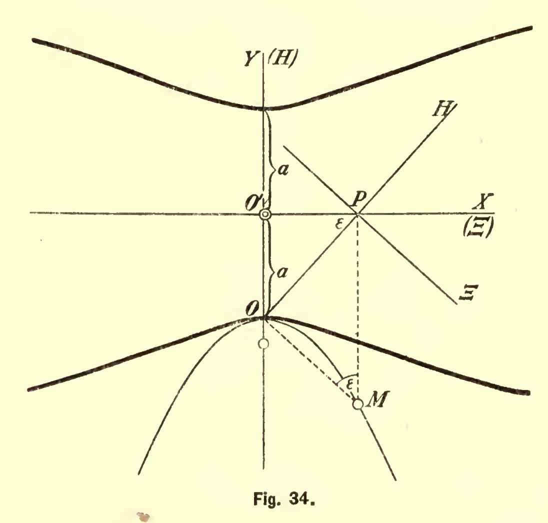


Fig. 34.

Punkt P. Ein rechter Winkel mit dem Scheitel O' bewegt sich so, daß sein einer Schenkel immer durch P geht, während ein fester Punkt O des anderen auf der Geraden OH gleitet. Das Momentanzentrum M wird in derselben Weise konstruiert wie vorhin. Nehmen wir OP als η-Achse und eine in P darauf senkrechte Gerade als ξ-Achse, so sind die Koordinaten von M

$$\xi = a \cos\varepsilon/\sin^2\varepsilon\,, \quad \eta = -a/\sin\varepsilon\,. \tag{7}$$

Die Elimination von ε ergibt die Gleichung der beweglichen Polbahn

$$a^2(\xi^2 + \eta^2) = \eta^4\,. \tag{7*}$$

Diese Quartik, die wir in Fig. 34 in der Anfangslage, wo P nach O' fällt und die bezüglichen Achsen sich decken, gezeichnet haben, muß also auf der dort ebenfalls angedeuteten Parabel (6*) abrollen, damit alle Punkte der Ebene Δ', in der (7*) liegt, Konchoiden der Geraden $O'X$ beschreiben. Alle Punkte der η-Achse beschreiben Nikomedische Konchoiden.

Die Quartik (7*) hat in O' einen isolierten Punkt mit den isotropen Geraden als Tangenten, im unendlich fernen Punkte der ξ-Achse einen Berührungsknoten mit der unendlich fernen Geraden als Tangente. Da ihre Polargleichung ist

$$\varrho = a/\sin^2\theta\,, \tag{7†}$$

läßt sie sich auch leicht direkt punktweise zeichnen. Nach einer Konjektur von P. TANNERY[59]) ist dies die Kurve, die EUDOXUS von Knidos (um 408—355 v. Chr.) als »Kampyla« (ἡ καμπύλη = der Krummstab) bezeichnete. Diese sowohl, wie die Konchoide des NIKOMEDES wurden erdacht, um das Delische Problem zu lösen. Der im obigen erläuterte Zusammenhang beider war aber den Alten unbekannt.

Wir sind natürlich versucht, auch die Trajektorien der Punkte von Δ zu bestimmen, wenn die Parabel (6*) auf der Kampyla rollt. Da wir aber gleich eine Bewegung betrachten wollen, welche die konchoidische und ihre inverse als spezielle Fälle in sich schließt, verschieben wir das auf den nächsten Paragraphen.

46. Auch die Inverse der Kampyla in bezug auf den Mittelpunkt ist eine bemerkenswerte Kurve. Sie hat die Gleichung

$$\varrho = a\sin^2\theta \tag{8}$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2 y^4\,. \tag{8*}$$

F. MÜNGER gab ihr den bezeichnenden Namen »Doppeleilinie«[60]) (Fig. 35). Diese Kurve hat in den

---

[59]) Mém. Soc. Bordeaux (2) **2**, 1878.

[60]) *„Die eiförmigen Kurven“*, Diss. Bern 1894. — Literatur s. im Int. Math. **9**, 1902, 335/7.

Kreispunkten Spitzen mit der unendlich fernen Geraden als Tangente, im Anfangspunkt einen vierfachen Punkt mit vierfacher Tangente, der aber so durchlaufen werden muß, daß zwei Spitzen entstehen. Dies geht schon aus der Erzeugung hervor. Die Polargleichung kann man auch schreiben $\varrho = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\cos 2\theta$. Daher ist die Doppeleilinie eine Konchoide der Kurve $\varrho = \frac{1}{2}a\cos 2\theta$; diese selbst ist eine Rosenkurve mit 4 Blättern (vgl. Nr. 82), ihre Inverse ist uns aber schon bekannt. Aus der Polargleichung $\varrho\cos 2\theta = \frac{1}{2}a$ erhält man nämlich die Gleichung in Punktkoordinaten $(x^2 - y^2)^2 = \frac{1}{4}a^2(x^2 + y^2)$; diese stellt eine auf die Winkelhalbierenden der früher (Nr. 15) verwendeten Achsen bezogene Kreuzkurve dar.

Fig. 35.

§ 11. Die Schleifschieberbewegung und ihre Unterfälle.

47. Die im vorigen Paragraphen betrachtete konchoidale Bewegung ist einer sofort in die Augen springenden Verallgemeinerung fähig. Es sei wieder Γ eine feste Gerade, O ein fester Punkt der Ebene Δ (Fig. 36). Ebenso sei in der beweglichen Ebene Δ' eine feste Gerade G und ein fester Punkt P gegeben. Verschieben wir nun Δ' gegen Δ so, daß immer G durch O geht, während P auf Γ bleibt, so haben wir, wenn P ein beliebiger Punkt der Ebene Δ' ist, eine Bewegung, die wir am besten mit dem Namen belegen, den sie in der Maschinentechnik hat, es ist die »Bewegung des Schleifschiebers«.

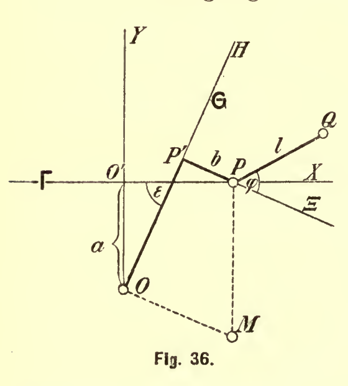


Fig. 36.

Wir wollen zunächst wieder die Gleichung der Trajektorie eines beliebigen Punktes Q der Ebene Δ' aufstellen, wenn $QP = l$ und der Winkel von QP mit dem

Lote PP' $(= b)$ auf G gleich φ ist. Man hat für den Punkt Q (auf O' als Anfangspunkt bezogen)

$$(1) \quad x = a \operatorname{ctg} \varepsilon + b/\sin \varepsilon + l \sin(\varphi + \varepsilon), \quad y = -l \cos(\varphi + \varepsilon).$$

Durch Elimination von ε erhält man die Gleichung der Trajektorie

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &[x y \sin\varphi + (y^2 + a y - l^2) \cos\varphi - b l]^2 \\ &\quad = (x \cos\varphi - y \sin\varphi - a \sin\varphi)^2 (l^2 - y^2). \end{aligned} \right.$$

Das ist eine rationale Quartik, die von der Kurve (2) des vorigen Paragraphen nicht wesentlich verschieden ist. In der Tat geht sie in diese über, wenn wir $b = 0$ und $\varphi = \omega - \frac{1}{2}\pi$ setzen. Bevor wir aber zu anderen Spezialfällen übergehen, seien auch noch die Polkurven für den allgemeinen Fall aufgestellt. Da das Momentanzentrum wie oben konstruiert wird, geben wir nur ihre Gleichungen an. Nimmt man für die feste Polbahn das Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O', für die bewegliche das mit dem Anfangspunkt P' und zwar so, daß sich die Koordinatensysteme, wenn P' nach O' fällt, auch dem Sinne nach decken, so ergibt sich für die erstere

$$(3) \qquad (x^2 + a y + a^2)^2 = b^2[x^2 + (y + a)^2],$$

für die letztere

$$(4) \qquad (\eta^2 - b \xi + b^2)^2 = a^2[\eta^2 + (\xi - b)^2].$$

Gleichung (3) geht in (4) über, wenn man x durch η, y durch $-\xi$ ersetzt und a mit b vertauscht. In der Tat ist die umgekehrte Bewegung (wo G und P fest bleiben) hier wieder eine Schleifschieberbewegung. Beide Polbahnen sind Verallgemeinerungen der Kampyla des Eudoxus. Die erste geht für $a = 0$, die zweite für $b = 0$ in eine Kampyla über.

48. Es bieten sich nun vor allem drei wichtige Spezialisierungen der Schleifschieberbewegung dar, d. i. (1) der Fall $b = 0$: die oben ausführlich betrachtete Konchoidenbewegung, (2) der Fall $a = 0$: die oben angedeutete Umkehrung der Konchoidenbewegung, (3) der Fall $a = b$: das sogenannte »symmetrische« Schleifschiebergetriebe. Wir wollen zunächst die Umkehrung der Konchoidenbewegung ins Auge fassen. Aus unseren allgemeinen

Gleichungen ergibt sich sofort für die Trajektorie eines beliebigen Punktes die Kurve

$$(5)\qquad \begin{cases} [x\,y\sin\varphi + (y^2 - l^2)\cos\varphi - b\,l]^2 \\ \quad = (x\cos\varphi - y\sin\varphi)^2\,(l^2 - y^2)\,, \end{cases}$$

für die beiden Polkurven

$$(6)\qquad x^4 = b^2(x^2 + y^2)$$

und

$$(7)\qquad \eta^2 - b\,\xi + b^2 = 0\,.$$

Es rollt daher wirklich eine Parabel auf einer Kampyla ab, während bei der Konchoidenbewegung das Umgekehrte stattfindet.

Die Kurven (5) haben jedenfalls alle zentrische Symmetrie in bezug auf O; denn wenn x und y gleichzeitig ihr Zeichen wechseln, verändert sich Gleichung (5) nicht. Gegen die Achsen symmetrisch werden die Kurven nur dann, wenn die den Faktor $x\,y$ enthaltenden Glieder verschwinden; dann muß aber $\sin\varphi = 0$, d. h. $\varphi = 0$ sein; PQ fällt in die Gerade PP'. Diese Kurven haben die Gleichung

$$(8)\qquad [y^2 - l(b + l)]^2 = x^2(l^2 - y^2)\,.$$

Unter ihnen befindet sich wieder eine besonders einfache für $l = -b$; d. i. die Kurve, die der Punkt P' beschreibt. Ihre Gleichung ist

$$(9)\qquad y^2(x^2 + y^2) = b^2 x^2$$

oder in Polarkoordinaten

$$(9^*)\qquad \varrho = b\operatorname{ctg}\theta\,.$$

Diese Kurve wurde schon von dem Descartesschüler G. van Gutschoven und von J. Barrow (1670) aufgestellt. Der Name »Kappakurve«, den ihr wegen ihrer Gestalt A. Aubry[61]) gab, ist seither angenommen worden. Die Kurve kann auch definiert werden als der *Ort der Be-*

---

[61]) S. den noch öfter zu zitierenden Aufsatz „*De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes*". Journ. math. spéc. (4) **4**, **5**, 1895/6, in mehreren Fortsetzungen.

rührungspunkte P' der Tangenten von O an die Kreise vom Radius b, deren Mittelpunkte P auf der x-Achse laufen.

Die Kappakurve hat zu (Wende-) Asymptoten die Parallelen $y = \pm b$ und im Anfangspunkt einen Berührungsknoten mit der y-Achse als Tangente (Fig. 37). Sie ist demnach eine rationale, zirkulare Quartik. Die Kurven (8) können dann als Orthokonchoiden der Kappakurve aufgefaßt werden. Insbesondere entsteht für $l = -2b$ eine sog. »Trisekante«, auf die wir in Nr. 53 zurückkommen.

49. Ein Berührungsknoten in O ergibt sich überhaupt, wenn in Gleichung (5) das konstante Glied verschwindet, wenn also $l \cos\varphi = -b$ wird. Das ist immer dann der Fall, wenn Q auf OP' liegt. Die Trajektorien sind dann gewöhnliche Konchoiden der Kappakurve, die auch »schiefe Kappakurven« heißen. Setzt man $l \sin\varphi = l'$, so erhält man aus (5) die kartesische Gleichung

$$(10) \qquad y^2(l'x - by)^2 = (bx + l'y)^2 (b^2 + l'^2 - y^2),$$

Fig. 37.

aus der man wirklich nach einiger Rechnung die Gleichung in Polarkoordinaten ableitet

$$(10^*) \qquad \varrho = b \operatorname{ctg}\theta + l'.$$

Aus beiden Gleichungsformen ist zu ersehen, daß die ganze Konchoide der Kappakurve (für positives und negatives l') aus zwei schiefen Kappakurven besteht (Fig. 37); denn (10) ändert sich, wenn l' das Zeichen ändert und (10*) bleibt unverändert, wenn man θ durch $\theta + \pi$ ersetzt. In der Tat muß die Ordnung der Konchoide der Kappakurve vom Berührungsknoten aus 8 sein. Diese Zahl ergibt sich aus der in Nr. 2 gegebenen Formel, wenn man bemerkt, daß O außerordentlicher Brennpunkt der Kappakurve ist

($\alpha = 4$). Die Konchoide zerfällt aber hier in zwei in bezug auf O symmetrisch liegende Kurven gleicher Ordnung. Die Erzeugung der schiefen Kappakurve kann man auch dahin formulieren, daß ein fester Winkel ($\sphericalangle OQP$) sich bewegt, wie bei der Kappakurve der rechte Winkel ($\sphericalangle OP'P$). Sein Scheitel (Q) beschreibt die Kurve.

Die Quadratur der Kappakurve hat schon HUYGENS geleistet. Es ergibt sich für die Fläche, die begrenzt wird von einem Kurvenzweig, der y-Achse und einer Asymptote

$$\mathcal{F} = \int_0^b \frac{y^2\,dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = \left\{ -\tfrac{1}{2} y \sqrt{b^2 - y^2} + \tfrac{1}{2} b^2 \arcsin \frac{y}{b} \right\}_0^b = \tfrac{1}{4} b^2 \pi \,.$$

Daher ist die Gesamtfläche zwischen der Kappakurve und ihren beiden Asymptoten gleich dem Inhalt des Kreises mit dem Radius b.

Zusatz. Invertiert man die Kappakurve an dem Kreis um O mit Radius b, setzt also $\acute{\varrho} \cdot \varrho = b^2$, so ergibt sich die Kurvengleichung $\acute{\varrho} = b \operatorname{tg} \theta$, welche nichts anderes darstellt, als dieselbe um 90^0 gedrehte Kappakurve. In dieser Form erscheint die Kappakurve als Spezialfall der von A. AUBRY aufgestellten Kurvenfamilie der »Knotenkurven (nœuds)« mit der Gleichung $\varrho = b \operatorname{tg} \mu \theta$, für $\mu = 1$. Von diesen Knotenkurven notieren wir außerdem den Fall $\mu = \frac{1}{2}$, also die Kurve $\varrho = b \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta$ oder $\varrho = b(1 - \cos\theta)/\sin\theta$, was in kartesischen Koordinaten die Gleichung gibt $(x^2 + y^2)(y - 2b) + b^2 y = 0$. Dies ist eine gerade Strophoide, auf den Scheitel bezogen, wie der Leser durch Vergleichung mit Nr. 26 selbst feststellen möge. Ferner kennen wir schon die Kurve $\varrho = b \operatorname{tg} 2\theta$, nämlich die in Nr. 15, Zus. 3 behandelte Windmühle.

50. Die Konstruktion der Kappakurve kann als Unterfall einer allgemeineren Konstruktion aufgefaßt werden, die zu mehreren bemerkenswerten Kurven führt. Um jedoch den Gedankengang nicht zu sehr zu unterbrechen, betrachten wir zunächst den dritten Fall der Schleifschieberbewegung, in welchem $a = b$ ist. Um zu erkennen, was dann aus der allgemeinen Trajektorie (2) wird, bestimmen wir zuerst im allgemeinen Falle die Asymptoten des unendlich fernen Knotens. Indem wir die Bedingung stellen, daß die in x quadratischen Glieder verschwinden, erhalten wir $y = \pm l \cos\varphi$, was sich schon aus der Erzeugung erkennen läßt. Für $y = + l \cos\varphi$ kann man nun

auch den Koeffizienten von x zu Null machen; als Bedingung ergibt sich eben $a = b$. Dann bemerkt man aber, daß auch die Konstante verschwindet. Die Gleichung (2) ist sonach im Falle $a = b$ durch $y = l\cos\varphi$ identisch erfüllt; d. h. die Trajektorie zerfällt und enthält die Gerade $y = l\cos\varphi$ als Bestandteil. Man kann (2) in der Tat auf die Form bringen

$$(11) \quad \begin{cases} (y^2 - l^2\cos^2\varphi)(x^2 + y^2) + (y - l\cos\varphi)[2ay^2 + (a^2 - l^2)y \\ \qquad - 2alx\sin\varphi - 2al^2 - a^2l - l^3\cos\varphi] = 0\,. \end{cases}$$

Scheidet man die Gerade ab, so ergibt sich als allgemeine Trajektorie des symmetrischen Schleifschiebergetriebes die rationale zirkulare Kubik

$$(12) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2)(y + l\cos\varphi) + 2ay^2 + (a^2 - l^2)y \\ \qquad - 2alx\sin\varphi - l(a^2 + 2al + l^2\cos\varphi) = 0\,. \end{cases}$$

Wir finden den Doppelpunkt, wenn wir die Doppelpunkte von (11) aus der Form (2) bestimmen. Danach erhält man

$$x_1 = a\,\mathrm{tg}\,\varphi + l\sin\varphi\,, \quad y_1 = l\cos\varphi\,; \qquad \Big| \qquad x_2 = -l\sin\varphi\,, \quad y_2 = -a - l\cos\varphi\,.$$

Hiervon liegt offenbar der erste auf der abgespaltenen Geraden, der zweite (D) gehört der Kubik an. Die Betrachtung der beiden Polkurven wirft sofort weiteres Licht auf diese Kubiken. Aus (3) und (4) erhalten wir, nachdem wir den Faktor x^2, bzw. η^2 abgetrennt, als Polkurven die kongruenten und gegen die gemeinsame Tangente symmetrischen Parabeln

$$(13) \quad x^2 + 2ay + a^2 = 0 \quad \text{und} \quad \eta^2 - 2a\xi + a^2 = 0\,,$$

die wir in einer beliebigen Lage gezeichnet haben (Fig. 38). Man erkennt nun leicht, daß der Doppelpunkt D immer in bezug auf die gemeinsame Tangente symmetrisch ist zu dem erzeugenden Punkte Q. Ist F der Schnittpunkt von DQ mit der gemeinsamen Tangente, so beschreibt F, wenn die bewegliche Parabel auf der festen abrollt, die Fußpunktskurve der festen Parabel in bezug auf den Pol D. Da aber immer $DQ = 2DF$, so beschreibt auch Q die Fußpunktskurve einer Parabel, die zur festen homothetisch in bezug auf D liegt. Dies ist eine Bestätigung unserer früheren Bemerkungen (vgl. § 6), und wir werden

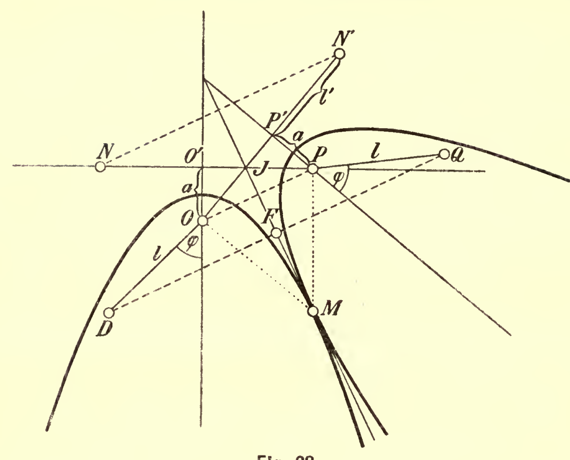


Fig. 38.

alle a. a. O. aufgeführten speziellen Kubiken hier wieder finden müssen.

51. So hat man für den Punkt P' $\varphi = 0$, $l = -a$, so daß die erzeugte Kubik die Gleichung erhält

$$(14)\qquad y(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)\,,$$

durch welche die gerade Strophoide dargestellt wird (Nr. 26). Dies erkennt man auch aus der Erzeugung, da $\sphericalangle OO'P$ ein fester rechter Winkel ist, OP' ein beweglicher Strahl, auf dem von seinem Schnittpunkt mit $O'P$ aus immer $JP' = JO'$ gemacht wird. In gleicher Weise erkennt man, wenn N' ein beliebiger Punkt auf OP' (der Direktrix der rollenden Parabel) ist und $O'N = P'N' (= l')$ gemacht wird, daß N' eine schiefe Strophoide beschreibt. Die Rolle des festen rechten Winkels hat jetzt der feste schiefe Winkel ONP übernommen. O ist der außerordentliche Brennpunkt der Strophoide. Daß er dies für alle Kurven (12) ist, mag der Leser selbst bestätigen. *Demnach sind die schiefen Strophoiden Konchoiden der geraden in bezug auf den Scheitel oder Konchoiden zueinander in bezug auf den außerordentlichen Brennpunkt.* Ihre Gleichung ergibt sich im vorliegenden Falle, da $l\sin\varphi = l'$, $l\cos\varphi = -a$, als

$$(15)\quad (x^2 + y^2)(y - a) + 2ay^2 - l'^2 y - 2al'x - al(a + l) = 0\,.$$

Sie zeigt wiederum, da sie l' linear enthält, daß die vollständige Konchoide einer Strophoide in zwei Strophoiden zerfällt. Nach dem Zusatz in Nr. 49 kann man die Gleichung einer schiefen Strophoide in Polarkoordinaten nun auch schreiben $\varrho = a \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta + l$, wenn man sie auf den außerordentlichen Brennpunkt bezieht.

Wir fragen ferner nach den in (12) enthaltenen symmetrischen Kurven (Sluseschen Konchoiden). Für diese muß $\sin \varphi = 0$, also $\varphi = 0$ sein. Sie werden von allen Punkten der Achse PP' der rollenden Parabel beschrieben und sind also Orthokonchoiden der geraden Strophoide. Insbesondere beschreibt der Scheitel die Kissoide des Diokles[62]). Alle anderen Punkte der rollenden Parabel haben schiefe Kissoiden zu Trajektorien.

§ 12. Eine Familie von rationalen Quartiken mit unendlich fernem Doppelpunkt.

52. Wir schieben hier einen Paragraphen ein, um, anknüpfend an die Bemerkung im Anfang der Nr. 50, einige Kurven zu betrachten, die sich aus einer projektiven Verallgemeinerung der zur Kappakurve führenden Konstruktion ergeben. Diese Konstruktion geben wir gemäß der Polargleichung $\varrho = b \operatorname{tg} \theta$ in der folgenden einfachen Form (Fig. 39). Durch irgend einen Punkt A des Kreises um O mit Radius b ziehen wir ein Lot zur Polarachse und durch O das Lot zu OA. Diese beiden Lote geben einen Punkt P der Kappakurve. Projektivisch betrachtet ist nun OP zu OA harmonisch konjugiert in bezug auf das imaginäre Linienpaar $x^2 + y^2 = 0$. Setzen wir an dessen Stelle einen Kreis $x^2 + y^2 = a^2$, so werden wir dem Punkte A die Polare in bezug auf diesen Kreis zuordnen müssen, die für $a = 0$ wirklich in das Lot OP übergeht. Dann wollen wir dem ursprünglichen Kreis vom Radius b noch eine Verschiebung um m in der Richtung AP er-

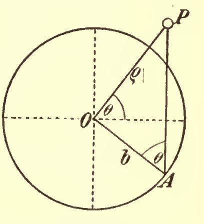


Fig. 39.

[62]) Schon Newton fand, indem er für die Kissoide eine kontinuierliche Erzeugung suchte, daß sie bei unserer Schleifschieberbewegung durch den Mittelpunkt von PP' beschrieben werde.

teilen und wir haben folgende allgemeine Konstruktion (Fig. 40). Gegeben zwei Kreise O und K mit den Mittelpunkten O und K ($OK = m$) und den Radien a bzw. b. Jedem Punkte A von K ordnet man die Polare in bezug auf O zu und zieht durch A die Parallele zu KO. Diese schneidet die Polare in einem Punkte P, dessen Ort eine gewisse Kurve ist. Die beiden Kreise haben die Gleichungen

$$(\mathsf{K})\quad \xi^2 + (\eta - m)^2 = b^2 \quad \text{und} \quad (\mathsf{O})\quad x^2 + y^2 = a^2 .$$

Die Polare von A ist $x\xi + y\eta = a^2$. Aus dieser Gleichung im Zusammenhalt mit (K) und $x = \xi$ ist ξ und η zu eliminieren. Man erhält dann für den Ort von P

$$(1) \qquad (x^2 + my - a^2)^2 + y^2(x^2 - b^2) = 0 .$$

Dies ist demnach eine zirkulare, in bezug auf die y-Achse symmetrische Quartik, die für alle Werte von a, b, m folgende Eigenschaften hat. Der singuläre Brennpunkt fällt in den Mittelpunkt von OK. Der unendlich ferne Punkt der y-Achse ist ein Doppelpunkt mit den beiden Tangenten $x = \pm\sqrt{b^2 - m^2}$. Er ist demnach eine Spitze für $b = m$; für $b > m$ gehen die Asymptoten durch die Schnittpunkte von K mit der x-Achse; für $b < m$ ist die Kurve im Endlichen geschlossen. Des weiteren sind die beiden Schnittpunkte von O mit der x-Achse Doppelpunkte der Kurve. Sie haben zu Tangenten die Linienpaare

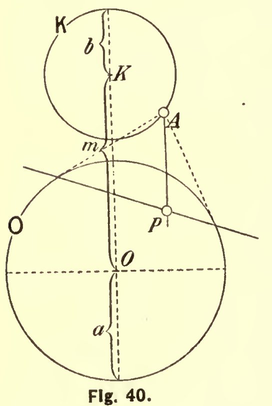


Fig. 40.

$y/(a \pm x) = 2a/(m \pm \sqrt{b^2 - a^2})$ und sind hiernach Knoten für $b > a$, Spitzen für $b = a$ und isolierte Punkte für $b < a$. Dies hängt auch damit zusammen, daß die beiden Geraden $x = \pm b$ die Kurve einschließen, wie schon aus der Erzeugung erhellt. Außerdem geht die Kurve (1) immer durch die Schnittpunkte von O und K.

53. Durch Spezialisierung der Konstanten a, b, m ergeben sich nun mehrere besondere Kurven, die zu verschiedenen Zeiten unter verschiedenen Gesichtspunkten be-

trachtet wurden[63]). Es seien zunächst O und K konzentrisch ($m = 0$) und $b = a\sqrt{2}$, so ergibt sich die Kurve der Fig. 41, die von P. Delanges zur Trisektion eines Winkels benutzt und »Trisekante« genannt wurde[64]). Sie ist gegen beide Achsen symmetrisch und hat die Gleichung

(2) $$(x^2 - \tfrac{1}{2}b^2)^2 + y^2(x^2 - b^2) = 0\,.$$

Als Polarachse nimmt man am besten die y-Achse. Dann nimmt die Polargleichung die Form an

(2*) $$\varrho \cos\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}b\,.$$

Ist demnach $\sphericalangle BOC$ ein beliebiger Winkel ω ($OC = b$) und das Mittellot auf OC schneidet die Trisekante in Q ($OQ = \varrho$), so ist, wenn wir

$$\sphericalangle BOQ = \theta\,, \quad \sphericalangle QOC = \varepsilon$$

setzen, einerseits

$$\varrho \cos\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}b\,,$$

andrerseits

$$\varrho \cos\varepsilon = \tfrac{1}{2}b\,,$$

also $\theta = 2\varepsilon$, d. h. $\sphericalangle\omega$ ist durch OQ triseziert.

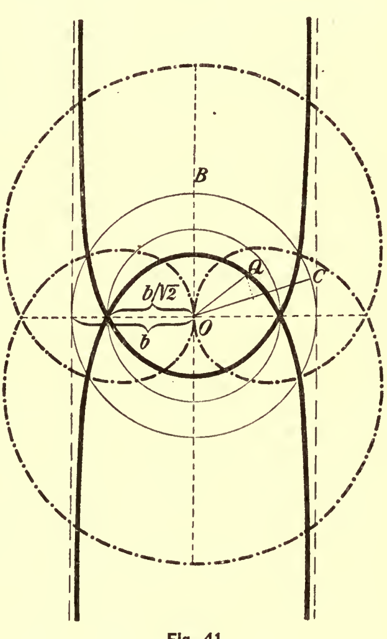


Fig. 41.

Es ist nicht uninteressant, daß das Zweieck, dessen Ecken die beiden endlichen Knoten sind, eine rational durch b ausdrückbare Fläche hat. Für dieses Zweieck ist nämlich

$$\mathcal{F} = 4 \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\,\frac{b^2\,d\theta}{\cos^2\frac{1}{2}\theta} = b^2\Big\{\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\theta\Big\}_0^{\frac{\pi}{2}} = b^2\,.$$

---

[63]) Die Zusammenfassung dieser Kurven unter die allgemeine Konstruktion des Textes gab der Verfasser in Stzgsb. Ak. W. Wien (math.) **116**, Abt. IIa, 1907.

[64]) *La trisegante nuova curva etc.*, Verona 1783.

Zusatz. Die Trisekante gehört zu der allgemeineren Kurvenfamilie mit der Polargleichung $\varrho \cos\mu\,\theta = a$. Wir begegneten von diesen schon dem Werte $\mu = 2$ (Kreuzkurve, s. Nr. 15, Zus. 3) und dem Werte $\mu = 3$ (Trisektrix von DE LONGCHAMPS, Nr. 30). A. AUBRY[61]) gab dieser Kurvenfamilie den Namen »Ährenkurven« (épis). Ihre Inversen haben die Gleichungsform $\varrho = a \cos\mu\,\theta$; das sind die Rosenkurven (s. Nr. 83). Im besonderen ist die Inverse der Trisekante die Rosenkurve 6. Ordnung $\varrho = a \cos\frac{1}{2}\theta$ (Potenzkurve) mit der kartesischen Gleichung

$$4(x^2+y^2)^3 - 4a^2(x^2+y^2)^2 + a^4y^2 = 0\,.$$

Wir haben sie der Fig. 41 beigefügt, aus welcher der Leser ihre äußere Form entnehmen mag. Der Anfangspunkt ist ein Berührungsknoten.

54. Wir erwähnten oben schon, daß die Kurve (1) zwei Spitzen erhält, wenn $a = b$ ist. Unter solchen Kurven spielt die eine ausgezeichnete Rolle, bei welcher O und K sich berühren ($m = 2a$). Diese geschlossene Kurve (Fig. 42) wollen wir »Zweihorn« (Kremphut; bicorne; cocked hat) nennen[65]). Ihre Gleichung ist

$$(3)\qquad (x^2+y^2+4ay-a^2)(x^2-a^2)+4a^2y^2 = 0\,.$$

Die Schnittpunkte S_1, S_2 mit der y-Achse (Scheitel) liegen in den Punkten $y_1 = a$, $y_2 = \frac{1}{3}a$. Die Spitzentangenten sind $y = a \pm x$, sind also unter 45^0 gegen die x-Achse geneigt und schneiden sich im oberen Scheitel S_1 der Kurve. Um die von den Spitzen aus noch an das Zweihorn gehenden Tangenten zu bestimmen, setze man $y = \lambda(a \pm x)$ und bilde die Diskriminante der entstandenen Gleichung. Man findet $\lambda = \frac{4}{3}$; demnach schneiden sich diese beiden Tangenten in einem Punkte, der um $\frac{1}{3}a$ über S_1 liegt. Der obere Zweig hat zwei symmetrisch liegende Wendepunkte. Um diese zu bestimmen, löst man (3) am besten nach y auf:

$$(3^*)\qquad y = \frac{a^2-x^2}{2a \pm \sqrt{a^2-x^2}}\,,$$

wo das „—"-Zeichen dem oberen Zweig entspricht. Bildet man $y'' = 0$, so ergibt sich $x = \pm\frac{1}{3}a\sqrt{5}$ und hieraus

[65]) Die Konstruktion dieser Kurve rührt von CH. A. SCOTT her (Interméd. math. **3**, 1896, 250); s. ferner G. DE LONGCHAMPS im J. math. spéc. (4) **5**, 1896.

$y = \frac{1}{3} a$. Daher schneidet die Tangente im Scheitel S_2 die Wendepunkte aus. Die Krümmungsradien der Scheitel erhalten wir mittels einer Differentialformel[66]), deren Anwendung häufig von Nutzen ist. Sei die Tangente in einem Punkte O einer Kurve x-Achse, die Normale y-Achse, so ist zunächst für O (Fig. 43) $dy/dx = 0$, also $ds/dx = 1$. Ferner hat man $(OC = \mathcal{R})$ $\Delta s^2 = \Delta y\,(2\mathcal{R} - \Delta y)$ oder

$$1 = (2\mathcal{R} - \Delta y) \cdot \Delta y / \Delta x^2$$

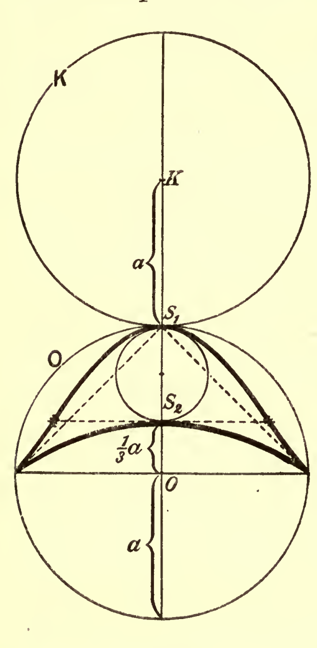


Fig. 42.

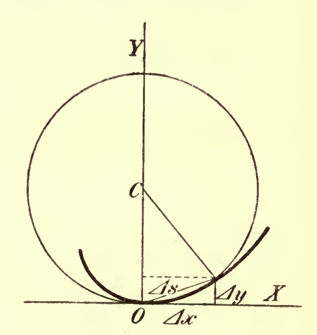


Fig. 43.

und beim Übergang zur Grenze

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{2\mathcal{R}} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x^2}.$$

Hiernach findet man in unserem Falle für den Scheitel S_1

$$\frac{1}{2\mathcal{R}} = \lim_{x=0} \frac{a-y}{x^2} = \lim_{x=0} \frac{1}{2a - \sqrt{a^2 - x^2}} + \lim_{x=0} \frac{a(a - \sqrt{a^2 - x^2})}{x^2(2a - \sqrt{a^2 - x^2})}$$

$$= \frac{1}{a} + \lim \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} = \frac{3}{2a},$$

also $\mathcal{R} = \frac{1}{3} a$ (s. Fig. 42), während man für den Scheitel S_2 auf dieselbe Weise $\mathcal{R} = a$ findet. Die Fläche des Zweihorns ist

---

[66]) S. z. B. M. d'Ocagne, *Géom. descr.*[3]), S. 254.

$$\mathcal{F} = 2\int_0^a \left(\frac{a^2 - x^2}{2a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a^2 - x^2}{2a + \sqrt{a^2 - x^2}}\right) dx$$

$$= 4\int_0^a \frac{a^2 - x^2}{3a^2 + x^2} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\,.$$

Für dieses Integral findet man etwas mühsam nach bekannten Methoden $\mathcal{F} = a^2\pi(16 - 9\sqrt{3})/\sqrt{3}$.

55. Der Radius a des Grundkreises kann nun aber auch gleich Null werden. Die zwei endlichen Doppelpunkte rücken dann zu einem Berührungsknoten zusammen. Aus der Gleichung (1) wird

(4) $$(x^2 + my)^2 + y^2(x^2 - b^2) = 0\,.$$

Setzt man $m + \sqrt{m^2 - b^2} = p$, $m - \sqrt{m^2 - b^2} = q$, so läßt sich (4) in die Form bringen

(4*) $$2x = \sqrt{-y(y + 2p)} + \sqrt{-y(y + 2q)}\,.$$

Diese Kurvengattung gehört demnach zu der von A. Cayley[67]) aufgestellten Familie der »Polyzomalkurven« (ceintures; τὸ ζῶμα = der Gürtel), welche die allgemeine Gleichungsform haben

(5) $$f(x_1, x_2, x_3) \equiv \sum_1^{\nu} i\sqrt{U_i} = 0\,.$$

Sind im besonderen die U_i quadratische (ternäre) Formen und $\nu = 3$, so ist f eine Quartik. In der Tat läßt sich die Gleichung jeder Quartik auf die Form bringen

(6) $$\sqrt{K_1} + \sqrt{K_2} + \sqrt{K_3} = 0$$ [68]),

wo die $K_i = 0$ Kegelschnittsgleichungen bedeuten. Sind K_2 und K_3 Funktionen von y allein, K_1 aber gleich x^2, so kommen wir auf Gleichungsformen der Art (4*). Die Abszisse wird erhalten, indem man die Abszissen zweier einfacheren Kurven (im wesentlichen) addiert[69]). Bei (4*)

---

[67]) Trans. R. S. Edinb. **25**, 1868.

[68]) Vgl. Salmon-Fiedler, *Höh. K.*[52]), S. 299 ff.

[69]) J. Sobotka nennt solche Kurven ebenfalls »Konchoiden« (in bezug auf eine Achse) und gibt Tangenten- und Krümmungsmittelpunktskonstruktion aus den Grundkurven an in Stzgsb. böhm. Ges. Prag 1898, XXVI, 19 ff.

sind diese Grundkurven zwei sich in O berührende Kreise mit den Gleichungen

(7) $$x^2 + y^2 + 2py = 0\,, \quad x^2 + y^2 + 2qy = 0\,,$$

und man erhält die Kurve (4), indem man zu je zwei zur selben Ordinate gehörigen Abszissen das arithmetische Mittel nimmt. Diese Kreise und die zugehörige Konstruktion sind daher nur reell, wenn die Kurve sich im Endlichen schließt $(m > b)$. Hierzu gehört z. B. der Fall $b = c\sqrt{2}$, $m = -\frac{3}{2}c$, der die Kurve gibt

(8) $$2x = \sqrt{y(2c - y)} + \sqrt{y(4c - y)}\,,$$

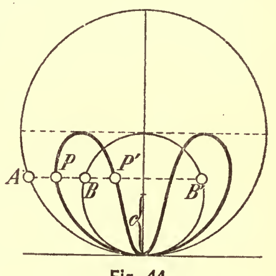


Fig. 44.

die von G. Cramer[70]) angeführt wird (Fig. 44; $AP = PB$, $AP' = P'B'$). Die beiden Grundkreise sind imaginär, wenn die Kurve reelle Asymptoten hat $(m < b)$. Dazu gehört der Fall $m = 0$; das ist die Kappakurve, von der wir ausgingen. Ihre Gleichung ist in der zur Diskussion stehenden Form

(9) $$2x = \sqrt{-y(y + 2bi)} + \sqrt{-y(y - 2bi)}\,.$$

Für $m = b$ wird $p = q = m$, so daß die Grundkreise zusammenfallen. Das Erzeugnis stimmt dann mit dem Grundkreise überein.

Zusatz. Wir verzichten darauf, die in diesem Paragraphen behandelte Konstruktion noch weiter zu verallgemeinern, obgleich sich Kurven der verschiedensten Gestalt ergäben, wenn wir etwa die Parallelen nicht zur Zentrale der beiden Kreise zögen, sondern in einer anderen Richtung. Nur dem allgemeinen Charakter der durch unsere Konstruktion bedingten Transformation des Kreises K wollen wir einige Worte widmen. Wir geben daher folgende Fassung, die zur behandelten projektiv ist. Gegeben zwei Kegelschnitte O und K und ein fester Punkt Z. Zu jedem Punkte A von K bestimmen wir die Polare in bezug auf O und bringen diese mit AZ zum Schnitte in P. Die Polare umhüllt einen gewissen Kegelschnitt E, der polarreziprok ist zu K in bezug auf O. Dem Tangentensystem von E wird das Strahlbüschel (Z) zugeordnet

[70]) *Introduction à l'analyse des lignes courbes alg.*, Genf 1750, 436/8.

und zwar so, daß jedem Strahle dieses Büschels 2 Tangenten von E, jeder Tangente von E aber nur ein Strahl des Büschels entspricht. Es liegt also eine (1, 2)-Korrespondenz zwischen einem Strahlbüschel erster und einem zweiter Ordnung vor. Indem man die Koinzidenzpunkte auf einer beliebigen Geraden sucht, findet man mittels des Chaslesschen Korrespondenzprinzipes[71]), daß die Ordnung des Erzeugnisses 4 sein muß. Da die Punkte der erzeugten Kurve aber eindeutig den Tangenten des Kegelschnittes E zugeordnet sind, muß die erzeugte Quartik nach dem Riemannschen Satze[72]) wie der Kegelschnitt rational sein, also drei Doppelpunkte haben. Diese sind die Punkte Z und die zwei Berührungspunkte der beiden Tangenten von Z an O.

§ 13. Konchoiden des Kreises.

56. Das Getriebe, das wir zu Anfang des § 11 Schleifschieber nannten, heißt »Schleifkurbel«, wenn an Stelle der festen Geraden Γ der Ebene $\varDelta$ ein fester Kreis K tritt, auf dem der feste Punkt P der Ebene $\varDelta'$ mittels einer Kurbel KP herumgeführt wird (Fig. 45), während die Gerade G durch O »schleift«. Die Trajektorien der Punkte von $\varDelta'$ sind bei dieser Bewegung Kurven 6. Ordg., die wir allgemein nicht näher betrachten wollen. Besonders interessiert uns auch hier der Fall, daß P auf G liegt ($PP' = 0$), daß also etwa der Punkt P_1 auf K geführt wird, während G immer durch O geht. Die Bahnkurven der Punkte von $\varDelta'$ sind dann »Konchoiden des Kreises K« in bezug auf den Pol O; im besonderen beschreiben alle Punkte von G selbst »gewöhnliche« Konchoiden des Kreises. Auch diese Kurven sind 6. Ordg. und bieten in ihrer Allgemeinheit ebenfalls kein hervorragendes geometrisches Interesse[73]). Aber es kann hier der wichtige Spezialfall eintreten, daß O auf dem Kreise K liegt. Dann sind die allgemeinen Bahnkurven schiefe Konchoiden des Kreises für einen Punkt des Kreises als Pol. Diese Kurven verdienen eine eingehendere Würdigung. Ihre Definition ist rein geo-

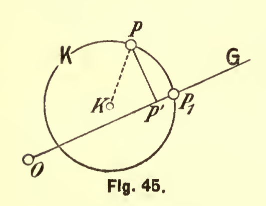


Fig. 45.

[71]) *Alg. K.* § 15. [72]) *Alg. K.* § 20.

[73]) Der zugehörige Mechanismus findet jedoch in der Technik öfter, z. B. bei Hobelmaschinen Verwendung. Vgl. F. Ebner, *Leitfaden der technisch wichtigen Kurven,* Leipzig (Teubner) 1906.

metrisch diese: Auf einem Kreise K liegt ein Punkt O. An jeden Radiusvektor OP wird unter konstantem Winkel φ eine konstante Strecke $PQ = l$ angetragen (Fig. 46). Punkt Q beschreibt die schiefe Konchoide. Bringt man nun aber die Gerade PQ zum zweitenmal mit dem Kreise in O' zum Schnitt, so bemerkt man, daß O' für jede Lage des Radiusvektors OP ebenfalls ein fester Punkt auf K ist. Denn der

$$\sphericalangle OPO' = \varphi' = \pi - \varphi$$

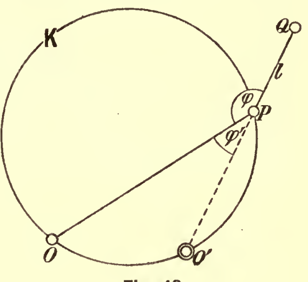


Fig. 46.

ist mit φ konstant. *Jede schiefe Konchoide eines Kreises in bezug auf einen Punkt des Kreises als Pol ist also eine gewöhnliche Konchoide desselben Kreises in bezug auf einen andern Punkt des Umfangs.* Da es uns nur auf die Eigenschaften der erzeugten Kurven, nicht auf ihre Lage ankommt, brauchen wir demnach nur gewöhnliche Konchoiden des Kreises zu betrachten.

57. Nimmt man dann OK $(= r)$ als Polarachse, so ist die Gleichung des Ortes von Q

(1) $$\varrho = 2r\cos\theta + l,$$

wobei wir bemerken, daß die Substitution von $\theta + \pi$ statt θ das negative von $(2r\cos\theta - l)$ ergibt, so daß hier die ganze Konchoide, wie bei der des Nikodemes wieder nur aus einer Kurve besteht. In der Tat enthält die kartesische Gleichung

(1*) $$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = l^2(x^2 + y^2)$$

die Konstante l nur im Quadrat.

Bevor wir in eine nähere Betrachtung der Kurve (1) eintreten, wollen wir aber erst die Polkurven bestimmen und die Konstruktion des Krümmungszentrums angeben. Das Momentanzentrum M erhält man, indem man (Fig. 47) in O das Lot auf G, in P das Lot auf K zieht; also ist M der Gegenpunkt von P auf K. Daher ist die feste Polkurve der Grundkreis K selbst mit dem Radius r, die rollende aber der Kreis um P mit dem Radius $2r$. Die

Kurven (1), die nach ihrem Entdecker STEPHAN PASCAL, dem Vater von BLAISE PASCAL, »Pascalsche Schnecken« (limaçon) genannt werden, können also erzeugt werden, indem man einen Kreis auf einem andern vom halben Radius so abrollen läßt, daß er diesen immer einschließt. Daher gehören sie zu der großen und wichtigen Familie der »Zykloidalen«, mit der wir uns weiterhin (§ 24) eingehender beschäftigen werden.

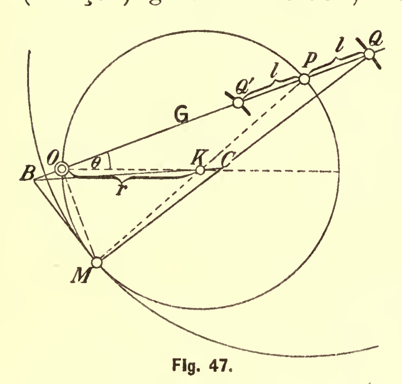


Fig. 47.

Die Spezialisierung der Konstruktion des Krümmungszentrums von Nr. 3 für einen Punkt Q ergibt folgendes einfache Verfahren. Das Krümmungszentrum C liegt jedenfalls auf der Normale MQ. Man fälle also $MB \perp MQ$ (B auf OQ), dann schneidet BK die Normale im Krümmungsmittelpunkte C. Für die Scheitel ($\theta = 0$) versagt auch hier die Konstruktion. Man erhält aber für diese, am besten aus (1), den Wert für den Krümmungsradius $\mathcal{R} = (2r \pm l)^2/(4a \pm l)$, wonach das Krümmungszentrum leicht zu konstruieren ist.

58. Um uns nun über den Verlauf der Pascalschen Schnecken zu orientieren, bringen wir Gleichung (1*) in die Form

$$(1^\dagger)\quad (x^2+y^2)^2 - 4rx(x^2+y^2) - [(l^2-4r^2)x^2 + l^2y^2] = 0\,.$$

Der Anfangspunkt ist hiernach ein Knoten für $l < 2r$, Spitze für $l = 2r$, isolierter Punkt für $l > 2r$. Für die zykloidale Erzeugung liegt daher der mit dem rollenden Kreise fest verbundene Punkt Q entweder innerhalb (Knoten), auf (Spitze) oder außerhalb des Kreises (isolierter Punkt). Die Formen mit Knoten und isoliertem Punkt sind in den Fig. 48 und 49 dargestellt. Im Falle der Spitze hat die Kurve wegen ihrer Gestalt den Namen »Kardioide« (*ἡ καρδία*, das Herz) erhalten (vgl. Fig. 63). Daß die Kreispunkte Doppelpunkte sind, sieht man aus ($1^\dagger$) ohne weiteres. Um die Tangenten zu bestimmen, setze man $y = ix + d$ und

stelle die Bedingung, daß auch die in x quadratischen Glieder verschwinden; man erhält $(d + ri)^2 = 0$. Daher sind die Kreispunkte Spitzen mit den Tangenten $y = \pm i(x - r)$. Der Mittelpunkt K des Grundkreises ist ihr Schnittpunkt und demnach singulärer Brennpunkt der Kurve.

Die Pascalschen Schnecken sind also nach den Plückerschen Formeln[74]) von der 4. Klasse (die Kardioide von der dritten) und haben zwei Wendepunkte (die Kardioide keinen) und eine Doppeltangente. Wir suchen die letztere, indem wir die Bedingung stellen, daß Gleichung (1†) ein

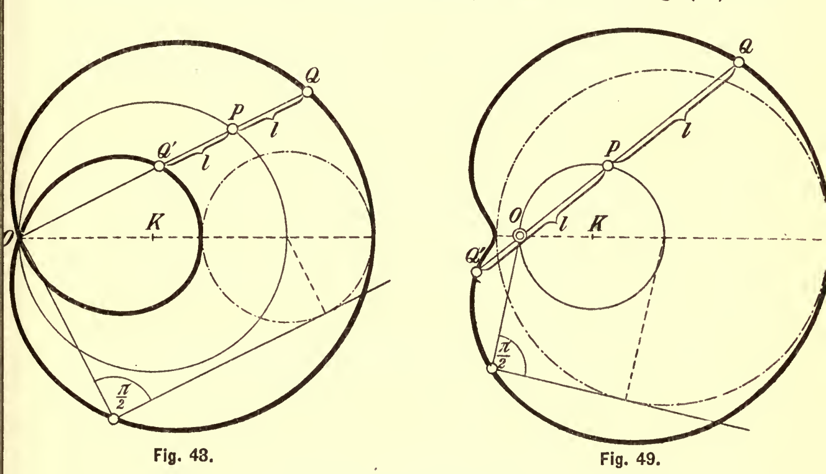


Fig. 48. Fig. 49.

Quadrat wird, wenn man y^2 als Unbekannte betrachtet. So ergibt sich $x = -l^2/8r$ als Gleichung der (natürlich immer reellen) Doppeltangente. Für die Berührungspunkte erhält man $y = \pm l\sqrt{16r^2 - l^2}/8r$. Diese sind demnach für $l < 4r$ immer reell und getrennt und fallen für $l = 4r$ in einen Flachpunkt zusammen; für $l > 4r$ ist die Doppeltangente isoliert. Die Wendepunkte bestimmt man am besten mittels der Polargleichung (1) und der bekannten Bedingung $\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho'' = 0$. Diese Bedingung ergibt $\cos\theta = -(l^2 + 8r^2)/6rl$ und man erhält daraus $\varrho = (2l^2 - 8r^2)/3l$. Sollen sie reell sein, so muß $l^2 + 8r^2 \leqq 6rl$ oder $(l - 4r)(l - 2r) < 0$ sein. Das gibt $2r \leqq l \leqq 4r$; d. h. sie sind nur reell im

[74]) *Alg. K.* § 17.

Falle des isolierten Doppelpunktes. Für $l = 2r$ werden sie von der Spitze der Kardioide absorbiert, für $l = 4r$ vereinigen sie sich im Flachpunkte.

Für die Gesamtfläche der Pascalschen Schnecke in dem in Nr. 8 erläuterten Sinne ergibt sich

$$\mathcal{F} = \int_0^\pi (2r\cos\theta + l)^2\, d\theta = (2r^2 + l^2)\pi\,. \tag{2}$$

Im Falle des Knotens ist hierbei die innere Schleife doppelt gezählt. Für die Kardioide im besonderen ist $\mathcal{F} = 6r^2\pi$.

Zusatz. Bestimmt man, wie in Nr. 42 für die Konchoide der Geraden, auch hier den Ort der Wendepunkte bei festem Kreis und Pol, aber variablem l, so ergibt sich die Kurve

$$(x^2 + y^2)^2 + 2rx(x^2 + y^2) + 8r^2y^2 = 0\,.$$

Ihre Gestalt ist birnförmig. Sie besitzt im Pole eine Spitze, zwei reelle Wendepunkte, und schneidet die x-Achse in dem Punkte $x = -4r$. Die Kreispunkte sind Doppelpunkte. Daher ist sie Fußpunktskurve eines Kegelschnittes und zwar einer Hyperbel in bezug auf den Scheitel. Wir können also ihre Konstruktion nach Nr. 4 dem Leser überlassen.

59. Die Pascalschen Schnecken müssen nach den allgemeinen Ausführungen von Nr. 4 gleichfalls Fußpunktskurven von Kegelschnitten in bezug auf ihren Doppelpunkt O sein. Man erhält in der Tat, wenn α, β die Koordinaten des Mittelpunktes des gesuchten Kegelschnittes in bezug auf den Doppelpunkt der Schnecke sind und a, b die Halbachsen dieses Kegelschnittes:

$$\alpha = 2r; \quad \beta = 0 \quad \Big| \quad a = l; \quad b = l\,.$$

Demnach sind die Pascalschen Schnecken die Fußpunktskurven der Kreise. Damit haben wir alle Spezialisierungen, die wir in Nr. 9 andeuteten, erschöpft. Der Kreis berührt die Schnecke in den beiden Punkten $x = 2r \pm l$, wo diese vertikale Tangenten hat. Im Falle des Knotens liegt der Pol O außerhalb des Kreises, im Falle des isolierten Punktes im Kreise, wie die Fig. 48 und 49 zeigen; die Kardioide ist Fußpunktskurve des Kreises in bezug auf einen Punkt der Peripherie. Die Form mit Flachpunkt entsteht, wenn der Pol in der Mitte zwischen Zentrum und Peripherie liegt.

Die Gleichung der Inversen einer Pascalschen Schnecke in bezug auf den Doppelpunkt ist

(3) $$\varrho = \frac{p}{1 + (2r/l)\cos\omega}.$$

Das ist die Gleichung eines Kegelschnittes in bezug auf den Brennpunkt; p ist der Parameter, $2r/l$ die numerische Exzentrizität. Wir bestätigen hieraus, was an sich klar ist: der Form mit Knoten entspricht eine Hyperbel, der mit isoliertem Punkt eine Ellipse, der Kardioide eine Parabel.

Nach der Nr. 5 muß der eben besprochene Kegelschnitt zu demjenigen, dessen Fußpunktskurve die Schnecke ist, polarreziprok in bezug auf den Inversionskreis sein. In der Tat ist die Polarreziproke jedes Kegelschnittes U in bezug auf irgend einen Kegelschnitt V um den Brennpunkt von U als Mittelpunkt ein Kreis, was wir dem Leser zu beweisen überlassen (*Alg. K.* S. 159).

Zusätze. 1. Ist K ein Kreis, O ein fester Punkt, so ist die Einhüllende aller Kreise über den Radienvektoren von K in bezug auf O als Durchmessern eine Pascalsche Schnecke.

2. Der Ort des Scheitels eines konstanten Winkels, dessen Schenkel immer zwei Kreise berühren (die »isoptische Linie« zweier Kreise), ist aus mehreren Pascalschen Schnecken zusammengesetzt. (Zum Beweise kann man die Polkurven der dadurch definierten Bewegung bestimmen.)

§ 14. Die Cartesischen Ovale.

60. Wir leiten nun, indem wir uns die nähere Betrachtung der Kardioide vorbehalten, aus den Pascalschen Schnecken eine allgemeinere, wichtige Kurvenfamilie ab, nach demselben Verfahren, durch das wir von den Boothschen Lemniskaten zu den spirischen Linien des Perseus gelangten (§ 5): wir suchen nämlich die Kurven gleicher Potenz Π in bezug auf eine Pascalsche Schnecke von der Gleichung (1*) des vorigen Paragraphen. Diese sind gegeben durch

(1) $$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - l^2(x^2 + y^2) - \Pi = 0.$$

Nach unseren früheren Darlegungen (Nr. 7) muß Gleichung (1) für jedes Π eine Quartik darstellen, die mit der zugrunde liegenden Pascalschen Schnecke die Spitzen in den Kreis-

punkten gemein hat, so daß auch die Spitzentangenten übereinstimmen. Alle Kurven des Systems (1) (bei variablem Π) haben daher den Mittelpunkt K des Grundkreises der ursprünglichen Pascalschen Schnecke als gemeinschaftlichen singulären Brennpunkt. Die Kurven heißen »Cartesische Ovale«, da sie schon von DESCARTES in seiner *Géométrie* (Leyden 1617) aufgestellt wurden. Dies sind demnach Quartiken vom Geschlechte 1 mit Spitzen in den imaginären Kreispunkten, also von der Klasse 6, symmetrisch in bezug auf eine Achse. Es ist aber möglich, daß in dem System (1) noch weitere Individuen sind, die außerdem noch einen Doppelpunkt besitzen (Pascalsche Schnecken). Diese werden auch für die gestaltliche Untersuchung des Systems von Wichtigkeit sein. Um sie zu finden, setzen wir $x = \mathfrak{x} + \varkappa$ und bestimmen $\varkappa$ und Π so, daß in der Gleichung die in $\mathfrak{x}$ linearen und die konstanten Glieder verschwinden; denn der Doppelpunkt liegt jedenfalls auf der x-Achse. Auf diese Weise erhält man die beiden Gleichungen

(2) $$\varkappa[2(\varkappa - r)(\varkappa - 2r) - l^2] = 0\,,$$

(3) $$\varkappa^2[(\varkappa - 2r)^2 - l^2] = \Pi\,.$$

Folglich enthält das System (1) drei Pascalsche Schnecken, die ursprüngliche ($\varkappa = 0\,,\ \Pi = 0$) und noch zwei andere, deren $\varkappa$ man aus (2) bekommt, während (3) den entsprechenden Wert von Π liefert. Ohne die Werte der $\varkappa$ zu berechnen, können wir sagen $\varkappa_1 = 0\,,\ \varkappa_2 < r\,,\ \varkappa_3 > 2r$. Für $\varkappa_1 = 0$ erhält, wie wir wissen, die Pascalsche Schnecke einen Knoten, aber für $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ entstehen isolierte Punkte, da die Koeffizienten von x^2 und y^2 gleiche Zeichen erhalten. Sucht man ferner die zwei weiteren Schnittpunkte der betreffenden Pascalschen Schnecke mit der x-Achse, so ergibt sich die Gleichung

(4) $$x^2 + 4x(\varkappa - r) + 4(\varkappa - r)^2 + 2\varkappa(\varkappa - 2r) - l^2 = 0\,.$$

Deren Diskriminante ist $\Delta \equiv 4l^2 - 8\varkappa(\varkappa - 2r)$ oder mit Berücksichtigung von (2) $\Delta \equiv 8r(2r - \varkappa)$, also $\Delta(\varkappa_2) > 0$, aber $\Delta(\varkappa_3) < 0$. Die dem Werte $\varkappa_2$ entsprechende Pascalsche Schnecke ist also eine gewöhnliche mit isoliertem Punkte, die dem Werte $\varkappa_3$ entsprechende aber hat außer

dem isolierten Punkte keinen reellen Zug; l ergibt sich in diesem Falle rein imaginär[75]).

61. Die Zeichnung (Fig. 50) des Systems (1) bestätigt diese Entwicklungen. Wir erhalten damit zugleich Aufschluß über die Gestalt eines Cartesischen Ovals. Für Werte von $\Pi > 0$, die absolut genommen sehr klein sind, ergibt sich eine Form mit zwei Zügen, die ineinander liegen (Ring- oder Gürtel-

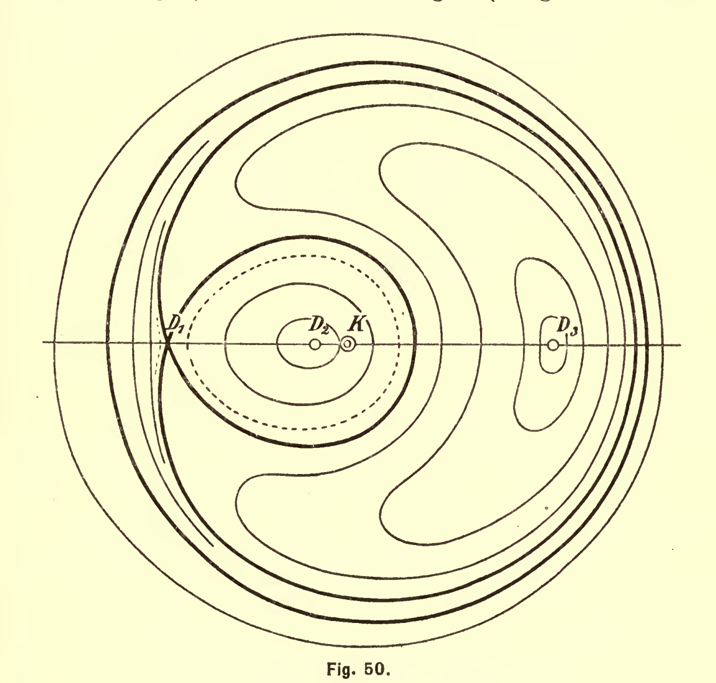


Fig. 50.

kurve) und sich an die beiden vom Knoten D_1 der ursprünglichen Pascalschen Schnecke ausgehenden geschlossenen Züge eng anschließen (in der Figur gestrichelt). Der äußere ist ein Unifolium (er konnte wegen zu großer Annäherung nur

---

[75]) E. Eckhardt hat die Pascalschen Schnecken benutzt, um die Realitätsbedingungen für die Wurzeln der Gleichungen 4. Grades analytisch-geometrisch abzuleiten (Arch. Math. (3) **11**, 1907, 52—59, 332—339). Die Pascalsche Schnecke für $\varkappa_3$ entspricht dort dem Falle von 4 imaginären Wurzeln.

angedeutet werden); der innere ein Oval. Letzteres zieht sich allmählich auf einen Punkt D_2 zusammen, den Doppelpunkt der Pascalschen Schnecke für $\varkappa_2$. Der äußere Zweig geht durch eine Form mit Flachpunkt ebenfalls in ein reines Oval über. Für Werte von $\Pi < 0$ entsteht zunächst ein Unifolium mit sehr tiefer Einbuchtung, das allmählich durch eine Form mit Flachpunkt in ein Oval übergeht. Dieses zieht sich schließlich auf einen Punkt D_3 zusammen, der die Pascalsche Schnecke für $\varkappa_3$ darstellt. Für noch kleinere Werte als $\Pi(\varkappa_3)$ ist das Cartesische Oval völlig imaginär.

Es entsteht nun die Frage, ob das in Fig. 50 gezeichnete System wirklich alle Formen der Cartesischen Ovale im Wesen enthält. Wir bemerken zunächst, daß die drei möglichen Typen von Pascalschen Schnecken in dem System vorkommen. Ihre Grundkreise haben alle den gemeinsamen Mittelpunkt K und bzw. die Radien KD_1, KD_2, KD_3. Wenn wir also von einer der beiden anderen Pascalschen Schnecken ausgehen und deren Kurven gleicher Potenz suchen, erhalten wir dasselbe System. Es bleibt dann nur noch die Kardioide ($l = 2r$) als Grundkurve. In diesem Falle hat (2) die Wurzeln $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, $\varkappa_3 = 3r$. Das System enthält also dann keine Ringkurven, die anderen Typen sind aber vertreten; neue kommen nicht vor. Also können wir durch Fig. 50 alle Formen der Cartesischen Ovale im Wesen als gegeben betrachten.

62. Wir stellen jetzt die Frage nach den gewöhnlichen Brennpunkten eines Cartesischen Ovals von der Gleichung (1). Deren müssen es neun sein; denn von jedem Kreispunkt gehen noch drei Tangenten an die Kurve. Diese bestimmen wir, indem wir $x = iy + \mu$ in (1) setzen und die Diskriminante der entstehenden quadratischen Gleichung für y gleich Null setzen. Wir erhalten die in der Tat für μ kubische Bedingung

$$(5)\qquad \Phi \equiv 4\mu^2(\mu - r) r l^2 + \mu^2 l^4 + 4(\mu - r)^2 \Pi = 0\,.$$

Von den 9 Schnittpunkten der drei Geradenpaare

$$x = \pm i y + \mu_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

interessieren uns besonders die drei auf der Symmetrieachse liegenden, welche die Koordinaten haben $x = \mu_1$,

μ_2, μ_3. Diese sind entweder alle drei reell, oder es ist nur einer reell und die beiden anderen konjugiert imaginär. Im letzteren Falle werden zwei von den sechs übrigen, die zur x-Achse symmetrisch liegen, reell. Die direkte Untersuchung, bei welchen Formen die drei reellen Brennpunkte auf der Symmetrieachse auftreten, aus Gleichung (5) in Verbindung mit (1) würde sehr umständlich werden. Es wird sich aber unten ergeben (Nr. 64), daß bei Annahme dreier reeller Brennpunkte auf der x-Achse sich Ringkurven ergeben. Daraus läßt sich unschwer der Schluß ziehen, daß nur solche in der Tat mit dieser Eigenschaft begabt sind. Denn gehen wir von dem Werte $\Pi (> 0)$ einer solchen Form zu dem Werte $\Pi = 0$ über, der der ursprünglichen Pascalschen Schnecke entspricht, so sehen wir aus (5), daß dann zwei der μ_i gleich Null werden, d. h. zwei Brennpunkte in den Doppelpunkt D_1 fallen (bei der Kardioide rückt auch der dritte in die Spitze), die dann, wenn wir Π stetig variieren, also < 0 nehmen, notwendig imaginär werden. In D_3 rücken sie wiederum zusammen; da aber weiterhin die ganze Kurve imaginär ist, haben sie, auch wenn sie etwa wieder reell sind, keine Bedeutung mehr. Ein drittes Zusammenfallen (in D_2) tritt ein, wenn man Π von 0 bis $\Pi(\varkappa_2)$ wachsen läßt; infolgedessen sind sie für $\Pi > \Pi(\varkappa_2)$ wieder imaginär.

Setzt man in (5) für μ verschiedene Werte ein, so ergibt sich z. B. $\Phi(-\infty)$ negativ, $\Phi(0) = 4r^2\Pi$, $\Phi(r)$ positiv, $\Phi(+\infty)$ positiv. Daher liegt für $\Pi < 0$ der reelle Brennpunkt zwischen D_1 und K; für $\Pi > 0$ links von D_1. Die beiden anderen reellen liegen im letzteren Falle immer, wie wir sehen werden, innerhalb des Ovals.

63. Auch das Cartesische Oval hat nach den Plückerschen Formeln nur eine Doppeltangente. Wir erhalten für sie, indem wir das in Nr. 58 bei der Pascalschen Schnecke angewendete Verfahren benutzen, $x = -(4\Pi + l^4)/8rl^2$. Der Ausdruck für die Ordinaten der Berührungspunkte ist etwas umfangreich; es ist aber nicht ohne Interesse, die Entfernung dieser Berührungspunkte von dem singulären Brennpunkt K zu berechnen. Nennen wir diese $\mathfrak{r}$, so erhält man $\mathfrak{r}^2 = r^2 + \frac{1}{2}l^2$. Die Berührungspunkte der Doppeltangenten aller Kurven des Systems (1) liegen daher

auf dem Kreise um K mit dem Radius r. Bezeichnen wir diesen Kreis mit K, die Doppeltangente mit T, und sei wie immer $z = 0$ die unendlich ferne Gerade, so muß sich Gleichung (1) in die Form setzen lassen

$$(4) \qquad \mathsf{K}^2 - \varLambda \mathsf{T} z^3 = 0\,,$$

aus der ersichtlich ist, daß einerseits T Doppeltangente mit den Berührungspunkten auf K ist, andererseits K durch die Spitzen in der Richtung ihrer Tangenten geht, so daß diese sich also im Mittelpunkte von K schneiden. Durch Koeffizientenvergleichung findet man $\varLambda$ und die Kurvengleichung erhält die Form

$$(4^*) \qquad (x^2 + y^2 - 2rx - \tfrac{1}{2}l^2)^2 - \tfrac{1}{4}(8rl^2x + 4\varPi + l^4) = 0\,.$$

Schreibt man die linke Seite der Gleichung (4) in der Gestalt $\mathsf{K}^2 - \varLambda \mathsf{T} z \cdot z^2$, so erkennt man sie als die Diskriminante der in einer beliebigen Variablen λ quadratischen Gleichung

$$(5) \qquad \lambda^2 \varLambda \mathsf{T} z + 2\mathsf{K}\lambda + z^2 = 0\,.$$

Gleichung (5) stellt aber ein System von Kreisen dar, deren Mittelpunkte auf der x-Achse laufen. Die Kurve (4) ist ihre Einhüllende; jeder Kreis berührt die Kurve doppelt. Bestimmt man in dem System (5) die zerfallenden Kreise (vom Radius Null), so ergeben sich, wie der Leser bestätigen möge, genau unsere oben gefundenen drei Brennpunkte auf der x-Achse wieder. Die linken Seiten ihrer Gleichungen, die die Form $(x - \mu_i)^2 + y^2$ haben, bezeichnen wir mit F_1, F_2, F_3, die zugehörigen Werte von λ seien λ_1, λ_2, λ_3. Gleichung (4) ist nun aber dadurch ausgezeichnet, daß man statt der beiden speziellen (ausgearteten) Kreise $\mathsf{T}z$ und z^2 des Systems (5), die den Werten $\lambda = \infty$ und $\lambda = 0$ entsprechen, irgend zwei Kreise, auch die Nullkreise für λ_1 und λ_2 zugrunde legen darf, ohne daß sie ihre Form ändert. Denn die Gleichung

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &[\lambda_1\lambda_2 \varLambda \mathsf{T} z + (\lambda_1 + \lambda_2)\mathsf{K} + z^2]^2 \\ &-(\lambda_1^2 \varLambda \mathsf{T} z + 2\mathsf{K}\lambda_1 + z^2)(\lambda_2^2 \varLambda \mathsf{T} z + 2\mathsf{K}\lambda_2 + z^2) = 0 \end{aligned} \right.$$

ist mit (4) identisch und hat die Form

$$(7) \qquad \mathsf{K}_0^2 - \mathsf{F}_1\mathsf{F}_2 = 0\,,$$

wo K_0 ein anderer, dem System (5) ebensowenig wie K angehörender Kreis ist. Das System (5) kann dann auch ersetzt werden durch

(8) $$\lambda^2 F_1 + 2\lambda K_0 + F_2 = 0 .$$

Setzen wir nun

(9) $$\nu^2 F_1 + 2\nu K_0 + F_2 = \vartheta F_3$$

und substituieren aus (7) den Wert von $K_0 = \sqrt{F_1 F_2}$, so läßt sich (9) zunächst schreiben

$$(\nu \sqrt{F_1} + \sqrt{F_2})^2 = \vartheta F_3 ,$$

woraus die Relation entsteht

(10) $$\sigma_1 \sqrt{F_1} + \sigma_2 \sqrt{F_2} + \sigma_3 \sqrt{F_3} = 0 ,$$

die von allen Punkten der Kurve (4) erfüllt wird. Nun können wir aber die F_i wegen der Koeffizienten σ_i in der oben angegebenen Normalform geschrieben denken. Dann stellt $\sqrt{F_i}$ den Abstand eines Kurvenpunktes vom Brennpunkte F_i dar und wir haben den bemerkenswerten Satz:

Ein kartesisches Oval ist der Ort aller Punkte, deren Abstände von drei festen, in gerader Linie liegenden Punkten eine lineare, homogene Relation befriedigen[76]).

64. Diese lineare Relation kann auch, indem man nur von zwei Brennpunkten F_1, F_2 ausgeht, in nicht homogener Form geschrieben werden. Als dritten Kreis nehmen wir dann nicht F_3, sondern den ausgearteten z^2, der dem Werte $\lambda = 0$ in (5) entspricht. Heißen wir dann die beiden Entfernungen eines Kurvenpunktes von F_1 und F_2 bzw. ϱ_1 und ϱ_2, so wird aus (10)

(10*) $$\varsigma_1 \varrho_1 + \varsigma_2 \varrho_2 = k \quad \text{oder} \quad \tau \varrho_1 + \varrho_2 = l ,$$

und eine ähnliche Relation kann für die Paare F_1, F_3 und F_2, F_3 aufgestellt werden. Nehmen wir F_1 als An-

[76]) Liegen die drei festen Punkte nicht in einer Geraden, so ist der Ort der Punkte eine allgemeine bizirkulare Quartik. Bei einer solchen sind für Tz und z^2 zwei beliebige Kreise zu setzen. Der Ort der Mittelpunkte ist dann ein Kegelschnitt und das System (5) gehört einem Bündel mit gemeinschaftlichem Orthogonalkreis an. Vgl. Salmon-Fiedler, *Höhere Kurven*[52]), S. 318 ff.

fangspunkt und setzen $F_1F_2 = a$, so ergibt sich als Gleichung in kartesischen Koordinaten

$$\tau\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2ax + a^2} = l \tag{11}$$

oder in Polarkoordinaten

$$(\tau^2 - 1)\varrho^2 + 2\varrho(a\cos\theta - l\tau) + l^2 - a^2 = 0\,. \tag{12}$$

Die Diskriminante dieser letzteren Gleichung ist $\Delta \equiv l^2 + a^2\tau^2 - 2al\tau\cos\theta - a^2\sin^2\theta$, und man erhält

$$\varrho(\tau^2 - 1) = l\tau - a\cos\theta \pm \sqrt{\Delta}\,. \tag{13}$$

Um die Art der Kurve zu erkennen und die Lage der Brennpunkte in bezug auf die Zweige festzustellen, müssen wir $\theta = 0$ und $= \pi$ setzen. In jedem Falle wird Δ ein Quadrat und es ergeben sich, wenn man $l/a = \tau'$ setzt, folgende vier Werte

$$\left\{\begin{aligned} \varrho^{\mathrm{I}} &= a\cdot\frac{\tau' - 1}{\tau - 1}, & \varrho^{\mathrm{II}} &= a\cdot\frac{\tau' + 1}{\tau + 1},\\ \varrho^{\mathrm{III}} &= a\cdot\frac{\tau' + 1}{\tau - 1}, & \varrho^{\mathrm{IV}} &= a\cdot\frac{\tau' - 1}{\tau + 1}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

wobei die beiden letzteren nach anderer Richtung gezählt sind als die beiden ersteren. Zählen wir auch diese nach derselben Richtung, so erhalten wir folgende Kombinationen:

	I	II	III	IV
$\tau > 1,\ \tau' > 1$	+	+	−	−
$\tau < 1,\ \tau' > 1$	−	+	+	−
$\tau > 1,\ \tau' < 1$	−	+	−	+
$\tau < 1,\ \tau' < 1$	+	+	+	+

Im Zusammenhalt mit der Schlußbemerkung in Nr. 62 lassen sich hieraus folgende Schlüsse ziehen. Erstens sind bei Annahme reeller Brennpunkte (a reell) alle vier Werte von ϱ reell, die Kurve ist also eine Ringkurve; zweitens befindet sich ein Brennpunkt immer entweder im inneren Oval oder außerhalb beider Ovale. Nach Nr. 62 hat einer der Brennpunkte sicher die letztere Lage. Sei dies der Anfangspunkt und sei $\tau' > \tau$ ($\tau < 1$, $\tau' < 1$), so

sind ϱ^{I} und $\varrho^{\mathrm{IV}} < a$, ϱ^{II} und $\varrho^{\mathrm{III}} > a$; ist aber $\tau' < \tau$, so sind ϱ^{II} und $\varrho^{\mathrm{IV}} < a$, ϱ^{I} und $\varrho^{\mathrm{III}} > a$. D. h. der zweite Brennpunkt, und damit auch der dritte, liegen im inneren Oval. Denn es könnten eventuell nur alle drei außen liegen.

Auf einige Ausartungen ist noch hinzuweisen. Gleichung (10*) bzw. (12) zeigt, daß für $\tau = +1$ eine Ellipse, für $\tau = -1$ eine Hyperbel entsteht. In beiden Fällen trennt sich die unendlich ferne Gerade doppelt zählend ab. Es fallen ferner zwei der vier Werte von ϱ zusammen, wenn $\tau' = \pm 1$ $(l = \pm a)$ wird. Da diese beiden Werte gleich Null werden, fällt der entstandene Doppelpunkt in den ersten Brennpunkt, der zugleich mit dem dritten identisch werden muß. Wir haben eine Pascalsche Schnecke. Dasselbe tritt ein, wenn $\tau' = \pm \tau$ $(l = \pm a\tau)$; dann fällt der Doppelpunkt in den zweiten Brennpunkt, der sich mit dem dritten vereinigt.

65. Nach Gleichung (10*) gehören die Cartesischen Ovale zu den Kurven, die dadurch definiert sind, daß eine Funktion $\mathfrak{U} \equiv \varsigma_1 \varrho_1 + \varsigma_2 \varrho_2$ der Abstände von einer Anzahl von Punkten konstant sein soll. Gleichzeitig gibt diese Definition ein leichtes Mittel an die Hand, die Kurven, allerdings nur die ringförmigen Formen, zu zeichnen. Wir können ferner die in Nr. 23 auseinandergesetzte Methode der Normalenkonstruktion anwenden. Sei P ein Punkt der Kurve, so trage man auf F_1P und F_2P Strecken auf, die zu ς_1 bzw. ς_2 (auch dem Sinne nach) proportional sind; dann ist die Diagonale des aus diesen Strecken zu konstruierenden Parallelogramms Normale der Kurve in P.

Vermöge dieser Normaleneigenschaft spielen die Cartesischen Ovale in der geometrischen Optik eine wichtige Rolle. Um diese darzulegen, ist es aber nötig, vorher einen allgemeineren Satz über »Brennlinien (Kaustiken)« aufzustellen. Wenn ein beliebiges Strahlensystem an einer Kurve reflektiert oder gebrochen wird, so hat das reflektierte bzw. gebrochene System eine gewisse Kurve zur Einhüllenden, die man Katakaustik nennt bei Reflexion, Diakaustik bei Brechung. Wir beschränken uns auf den Fall, daß das ursprüngliche Strahlensystem von einem Punkte O, dem Anfangspunkte, ausgeht. Die brechende

Kurve sei $f(x, y) = 0$ $(dy/dx = p)$. Das Brechungsgesetz laute (Fig. 51) $\sin\omega_e : \sin\omega_a = k$; die laufenden Koordinaten seien ξ, η. Dann ist die Gleichung des einfallenden Strahles $\eta/\xi = y/x$, die des gebrochenen sei $\eta - y = \varkappa(\xi - x)$. Da ferner

$$\sin\omega_e = \frac{x + p\,y}{\sqrt{(x^2 + y^2)(1 + p^2)}},$$

$$\sin\omega_a = \frac{1 + p\,\varkappa}{\sqrt{(1 + \varkappa^2)(1 + p^2)}},$$

Fig. 51.

so ist die Bedingung des Brechungsgesetzes gegeben durch

$$\frac{x + p\,y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k \cdot \frac{1 + p\,\varkappa}{\sqrt{1 + \varkappa^2}}.$$

Setzt man hier den Wert von $\varkappa = (\eta - y)/(\xi - x)$ ein, so erhält man

$$(15) \qquad \frac{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}{(\xi - x) + p\,(\eta - y)} = \frac{k\sqrt{x^2 + y^2}}{(x + p\,y)}.$$

Diese Gleichung stellt die beiden Geraden dar, die durch den Punkt $P(x, y)$ gehen und mit dem Einfallslot den Winkel ω_a bilden. Gleichung (15) kann aber durch folgende beiden ersetzt werden

$$(16) \qquad \begin{cases} (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = k^{-2}(x^2 + y^2) \\ (\xi - x) + p\,(\eta - y) = k^{-2}(x + p\,y). \end{cases}$$

Davon stellt die erste einen Kreis vor, der um P mit dem Radius $k^{-1} \cdot \overline{OP}$ beschrieben ist, die zweite ist aus der ersten durch Differentiation entstanden. Der Punkt (ξ, η), der durch (16) bestimmt wird und auch auf (15) liegt, ist demnach der Berührungspunkt des Kreises vom Radius $k^{-1} \cdot \overline{OP}$ um P mit seiner Einhüllenden. Der austretende Strahl steht also auf dieser Einhüllenden, die man »sekundäre Kaustik« nennt, senkrecht. Man kann daher sagen: *Die Kaustik einer Kurve in bezug auf einen Punkt ist die Evolute der sekundären Kaustik*[77]).

---

[77]) Gergonne, Ann. Math. **15**, 1824/25. — Quetelet, Mém. Ac. Belg. **5**, 1829. — Obige Deduktion ist nichts anderes als eine analytische Ableitung des Huygensschen Prinzips aus dem Brechungsgesetz. Im Raume entspricht der sekundären Kaustik die »Wellenfläche«.

66. In der vorigen Betrachtung ist natürlich die Reflexion mit einbegriffen. Denn für diesen Fall ist nur $k = 1$ zu setzen. Die Kreise, welche die sekundäre Kaustik einhüllen, gehen alle durch O. Man erhält dann den Punkt O', wo ein solcher Kreis seine Enveloppe berührt, indem man von O auf die Tangente in P ein Lot OF fällt und dieses mit dem reflektierten Strahl zum Schnitt bringt (Fig. 52). Die sekundäre Kaustik ist demnach hier, da $OO' = 2\,OF$, zur Fußpunktskurve in bezug auf O homothetisch.

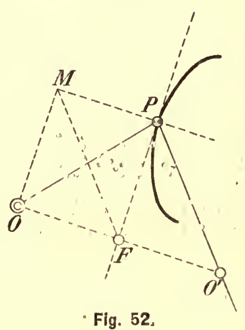


Fig. 52.

Zusätze. 1. Die Konstruktion der Fußpunktskurve kann kinematisch derart aufgefaßt werden, daß der rechte Winkel (F) sich so bewegt, daß ein Schenkel immer durch O geht, während der andere längs der Kurve gleitet. Dann ist das Momentanzentrum in der vierten Ecke M des Rechtecks $OFPM$. Dies kann man auch so ausdrücken: *Die Normale in einem Punkte F einer Fußpunktskurve halbiert den zugehörigen Radiusvektor.* Für die Kurve, die O' beschreibt, ist also in der Tat PO' ($\| MF$) die Normale.

2. Wenden wir die letzte Bemerkung der Nr. 65 auf einen Kreis als reflektierende Kurve an, so beschreibt bekanntlich F, und daher auch O', eine Pascalsche Schnecke und die Einhüllende der reflektierten Strahlen ist die Evolute dieser Pascalschen Schnecke. Liegt der leuchtende Punkt O auf der Kreisperipherie, so ist die sekundäre Kaustik eine Kardioide, die Kaustik selbst daher als Evolute auch eine Kardioide; dies möge hier der Leser selbst beweisen, später wird es aus einem viel allgemeineren Satze folgen (s. Nr. 144 u. 91, Zus.).

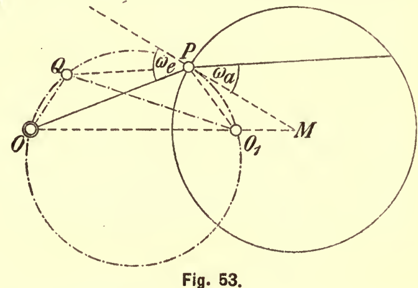


Fig. 53.

67. Nunmehr bestimmen wir die sekundäre Kaustik eines Kreises in bezug auf einen Punkt O. Ist wie oben $\sin\omega_e : \sin\omega_a = k$ und machen wir auf dem austretenden Strahle $PQ = k^{-1} \cdot PO$ (Fig. 53), so sind die Winkel (POQ) und (OQP) bzw. gleich ω_a und $\pi - \omega_e$, daher wird

ein um OPQ beschriebener Kreis das Einfallslot MP in P berühren. Zugleich schneidet dieser Kreis die Gerade OM in einem Punkte O_1, der, da $OM \cdot O_1M = \overline{PM}^2$, für alle Einfallspunkte P derselbe ist. O und O_1 sind die Grundpunkte eines zum Grundkreis orthogonalen Büschels. Nun ist nach dem Ptolemäischen Lehrsatz

$$OP \cdot O_1Q - O_1P \cdot OQ = OO_1 \cdot PQ \tag{17}$$

oder, wenn wir $O_1Q = \varrho_1$, $OQ = \varrho_2$ setzen,

$$\frac{OP}{PQ} \cdot \varrho_1 - \frac{O_1P}{PQ} \cdot \varrho_2 = OO_1 \,. \tag{18}$$

Nun ist aber $OP/PQ = k$; $O_1P/OP = PM/OM$, also auch $O_1P/PQ = k \cdot PM/OM = -k'$, für alle Lagen von P konstant und (18) wird

$$k\,\varrho_1 + k'\varrho_2 = OO_1 \,. \tag{18*}$$

Der Punkt Q beschreibt daher ein Cartesisches Oval, und *die Kaustik des Kreises in bezug auf einen leuchtenden Punkt ist die Evolute eines Cartesischen Ovals.* Man bemerkt wieder, daß der Fall der Reflexion, wo sich eine Pascalsche Schnecke ergibt, nur ein spezieller Fall des vorliegenden ist. (Die Kaustik der Geraden siehe in Nr. 88, Zus. 2.)

Zusätze. 1. Gemäß der Bemerkung in Nr. 26 müssen die Cartesischen Ovale in bezug auf gewisse Punkte, deren es höchstens 4 sein können, anallagmatisch sein. Man sieht, daß dies für die 3 einfachen Brennpunkte auf der Symmetrieachse zutrifft (der vierte Punkt liegt hier im Unendlichen). Denn setzt man in Gleichung (12) $\varrho = m^2/\acute{\varrho}$, so entsteht auf jeden Fall wieder ein kartesisches Oval, das mit dem ursprünglichen übereinstimmt, wenn man $m^2 = (l^2 - a^2)/(\tau^2 - 1)$ nimmt. Die Untersuchung, wann durch die Inversion ein Zweig in den anderen, oder jeder in sich selbst übergeführt wird, überlassen wir dem Leser. Die Pascalsche Schnecke ist nur für den einen einfachen Brennpunkt auf der Symmetrieachse anallagmatisch; wie wir schon wissen, geht sie durch Inversion vom Doppelpunkt aus in einen Kegelschnitt über, und umgekehrt.

2. Verbinden wir die Gleichung (12) mit der Gleichung irgend einer Geraden $\varrho(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) = \gamma$ und eliminieren θ, so ergibt sich eine biquadratische Gleichung für ϱ, in welcher der Koeffizient von ϱ^3 gleich $-4\,l\,\tau/(\tau^2 - 1) =$ konst. ist. Daher der Satz: *Die Summe der vier Radienvektoren der vier Schnittpunkte irgend einer Geraden mit einem Cartesischen Oval, auf einen Brennpunkt bezogen, ist konstant.*

68. Zum Schlusse führen wir noch zwei einfache Erzeugungen der Cartesischen Ovale auf, von denen die erste von NEWTON stammt, während die zweite von CHASLES[78]) angegeben wurde und leicht aus der ersten abgeleitet werden kann. Suchen wir alle Punkte P (Fig. 54), deren Entfernungen PA_1 bzw. PA_2 von zwei Kreisperipherien (um K_1 und K_2 als Zentren) in einem konstanten Verhältnis v stehen, so ist, wenn wir $PK_1 = \varrho_1$, $PK_2 = \varrho_2$ setzen und die Kreisradien mit r_1 und r_2 bezeichnen $(\varrho_1 - r_1) : (\varrho_2 - r_2) = v$, oder

$$\varrho_1 - v\,\varrho_2 = r_1 - v\,r_2 = \text{konst.},$$

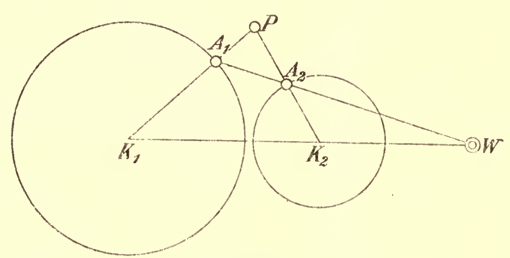


Fig. 54.

d. h. der Ort von P ist ein Cartesisches Oval mit K_1 und K_2 als einfachen Brennpunkten.

Ziehen wir nun A_1A_2 und bezeichnen den Schnittpunkt von A_1A_2 mit der Zentrale K_1K_2 mit W, so ist nach dem Satz des MENELAOS $\frac{A_1P}{A_1K_1} \cdot \frac{WK_1}{WK_2} \cdot \frac{A_2K_2}{A_2P} = 1$, also $WK_1/WK_2 = r_1/v\,r_2 = \text{konst.}$, daher W ein fester Punkt. Wir können folglich sagen: *Dreht sich eine Sekante um einen festen Punkt W auf der Zentrale zweier Kreise und zieht man zu den vier Schnittpunkten mit beiden Kreisen die Radien, so schneiden sich diese in vier Punkten, die Cartesische Ovale beschreiben.*

---

78) Bibliographien der Cartesischen Ovale von LIGUINE, Bull. sc. math. (2) **6**, 1882, 40 und H. BROCARD, Interméd. math. **3**, 1896, 238.

§ 15. **Konchoiden der Kegelschnitte. Kurven erster Kategorie.**

69. Die (gewöhnliche) Konchoide eines Kegelschnittes ist nach der Formel von Nr. 36 von der Ordnung 8 und hat im Pole einen vierfachen Punkt. Wir betrachten nur zwei Spezialfälle, die einiges Interesse bieten. Zunächst sei der Pol in einem Scheitel des Kegelschnittes. Dieser habe die Gleichung

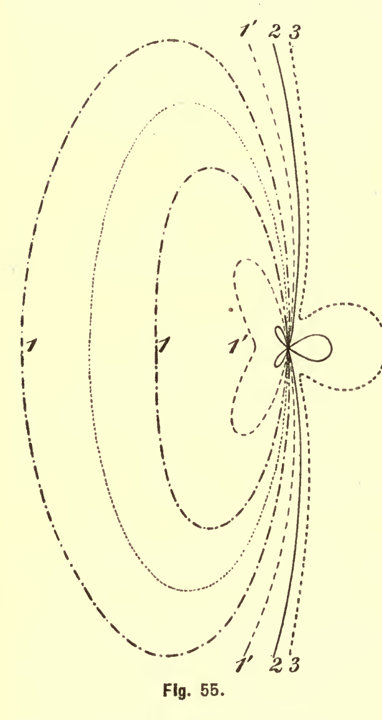


Fig. 55.

$$(1)\quad y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2,$$

wo ε die numerische Exzentrizität, $p = -b^2/a$ für die Ellipse ist [vgl. Nr. 29 (5)]. In Polarkoordinaten lautet die Gleichung, wenn wir $\varepsilon^2 - 1 = q$ setzen,

$$(1^*)\quad \varrho = \frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta - q\cos^2\theta},$$

also ist die Gleichung der Scheitelkonchoide dieses Kegelschnittes

$$(2)\quad \varrho = \frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta - q\cos^2\theta} + l.$$

Setzt man für θ hier $\theta + \pi$ ein, so ändert der erste Summand sein Vorzeichen; also besteht die Kurve aus einem einzigen Zug für positives und negatives l und sie ist, da die Grundkurve einfach durch den Pol geht, von der Ordnung 6. In der Tat wird die Gleichung in kartesischen Koordinaten

$$(2^*)\qquad (x^2 + y^2)(y^2 - qx^2 - 2px)^2 = l^2(y^2 - qx^2)^2.$$

Diese setzt außerdem den vierfachen Punkt im Pole sofort in Evidenz und zeigt, daß die Asymptoten des Kegelschnittes Doppelasymptoten der Konchoide sind[47]). Andere als gestaltliche Untersuchungen über diese Kurven liegen

nicht vor[79]). Da aber der Leser selbst leicht imstande ist, sich verschiedene der auftretenden Formen zu zeichnen, wollen wir nur auf einige Punkte hinweisen.

Ist die Grundkurve eine Ellipse und liegt der Pol in einem Hauptscheitel (auf der großen Achse), so wird die Konchoide, solange $l < 2a$, wie eine in die Länge gezogene Pascalsche Schnecke mit Knoten aussehen, da der Kreis um den Pol mit dem Radius l die Ellipse nur in

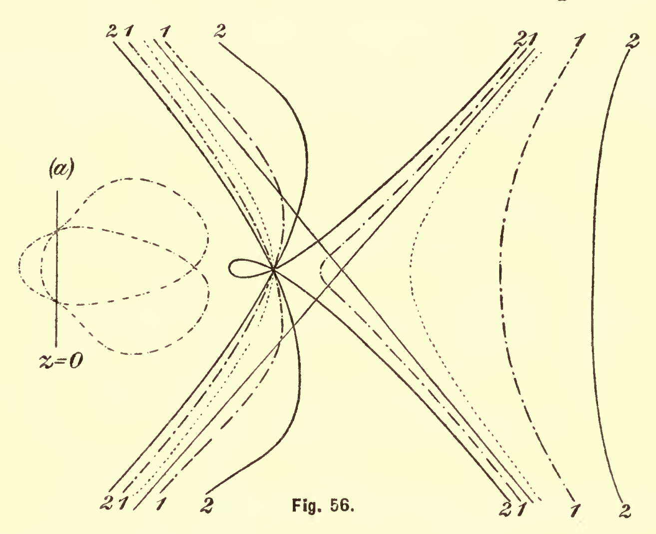


Fig. 56.

zwei reellen Punkten treffen kann, zwei der Tangenten des vierfachen Punktes also imaginär sind. Wird $q = -1$, so trennt sich von (2*) der Faktor $(x^2 + y^2)$ ab, und wir haben in der Tat die Gleichung einer Pascalschen Schnecke (natürlich für beliebiges l) vor uns. Die Formen werden erst interessant, wenn der Pol in einen Nebenscheitel zu liegen kommt. Wir müssen dann in Gleichung (2*) nur $-q > 1\,(b > a)$ voraussetzen. In diesem Falle kann nämlich der Kreis um den Pol mit l als Radius die Ellipse in 4 reellen getrennten Punkten schneiden, in zwei ge-

[79]) Vgl. J. Cardinaal, Arch. M. Teyler (2) **8**, 1902, 165—197, sowie einen kleinen Artikel des Verf. im Arch. Math. Phys. (3) **12**, 1907, 254/60. Im ersteren Aufsatz werden auch die Polkurven untersucht.

trennten Punkten berühren, unter anderem in einem Grenzfalle auch im Gegenscheitel hyperoskulieren; dementsprechend treten die verschiedensten Arten des vierfachen Punktes auf. Fig. 55 soll davon ein Bild geben, Fig. 56 ebenso für die Hyperbel; die Nebenfigur (*a*) gibt bei letzterer eine Projektion der Kurve *1* ins Endliche. Bei der Parabel können in jedem Falle nur zwei Zweige des Doppelpunktes reell sein.

70. Außer den Scheitelkonchoiden wollen wir noch den Konchoiden von einem Brennpunkte aus unsere Aufmerksamkeit schenken. Bekanntlich ist die Polargleichung des Kegelschnittes, auf einen Brennpunkt bezogen,



$$(3) \qquad \varrho = p/(1 + \varepsilon \cos\theta)\,,$$

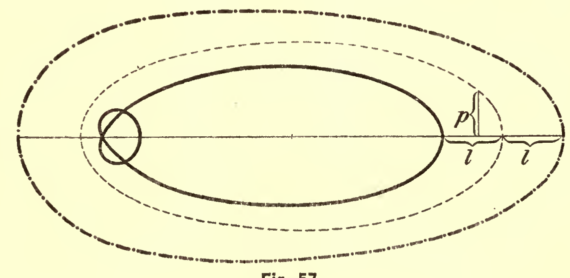


Fig. 57.

also die Polargleichung der Konchoide

$$(4) \qquad \varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta} + l\,,$$

die offensichtlich wesentlich verändert wird, wenn man θ durch $\theta + \pi$ ersetzt ($p = b^2/a$). Wirklich enthält auch die kartesische Gleichung

$$(4^*) \qquad (x^2 + y^2 - \varepsilon\, l x)^2 - (x^2 + y^2)\,(p + l - \varepsilon\, x)^2 = 0$$

das Zwischenstück l linear und ist nur vierten Grades. Die ganze Konchoide 8. Ordg. zerfällt also hier in zwei Kurven 4. Ordg., die je einem Vorzeichen von l entsprechen (vgl. Fig. 57). Hiernach ist schon klar, daß (4*) im Pole einen Doppelpunkt haben muß. Mittels des um den Pol mit dem Radius l beschriebenen Kreises erkennt man ferner wie oben, daß dieser Doppelpunkt bei

Zugrundelegung einer Ellipse ein Knoten ist, wenn $a + e > |l| > a - e$, wo $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, l aber negativ ist; entsprechend für Parabel und Hyperbel.

Die Gleichung (4*) zeigt aber ohne weiteres, daß auch die zwei Punkte, wo der Kreis $x^2 + y^2 - \varepsilon l x = 0$ von der Geraden $p + l - \varepsilon x = 0$ geschnitten wird, Doppelpunkte der Kurve sind. Diese haben demnach die Koordinaten

$$(5) \qquad x = \frac{p + l}{\varepsilon}, \qquad y = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(p + l)\,(\varepsilon^2 l - (p + l))}\,.$$

Hiernach läßt sich ihre Realität leicht in allen Fällen diskutieren. Wir weisen nur auf die Fälle hin, wo sie koinzidieren. Dies tritt erstens ein, wenn

$$\varepsilon^2 l - (p + l) = 0$$

oder

$$l = p/q = -a$$

ist; dann entsteht ein Berührungsknoten im Mittelpunkt des Kegelschnittes. Das Zusammenfallen tritt zweitens ein, wenn $l = -p$, d. h. dem absoluten Wert nach gleich der Ordinate des Brennpunktes wird; in diesem Falle koinzidieren alle drei Doppelpunkte zu einem »Inflexionsknoten« im Pole.

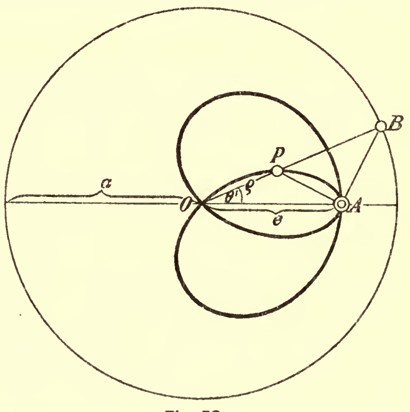


Fig. 58.

Beisp. Der an vorletzter Stelle genannte Spezialfall tritt bei einer Aufgabe auf, die von Jeřábek angeregt wurde[80]). Es sei ein Kreis um O gegeben und ein fester Punkt A ($OA = e$; Kreisradius a; s. Fig. 58). Man ziehe einen beliebigen Radius OB und $AP \perp AB$ (P auf OB). Sind dann $\varrho = OP$ und $\theta' = \sphericalangle POA$ die Polarkoordinaten von P, so ist $(a - \varrho)^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AB}^2$; da aber $\overline{PA}^2 = \varrho^2 + e^2 - 2\varrho e \cos\theta'$ und $\overline{AB}^2 = a^2 + e^2 - 2ae\cos\theta'$, so ergibt sich augenblicklich

$$(6) \qquad \varrho = e \cdot \frac{\cos\theta' - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\theta'}\,.$$

80) Die Identität mit der Brennpunktskonchoide zeigte M. Dewulf, Mathesis 5, 1885, 110—115.

Diese Gleichung kann auch geschrieben werden

$$\varrho = (a\,e\cos\theta' - e^2)/a(1 - \varepsilon\cos\theta')$$
$$= (a\,e\cos\theta' - a^2 + b^2)/a(1 - \varepsilon\cos\theta')\,,$$

was mit

(6*) $$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta} - a$$

identisch ist, wenn $\theta = \pi - \theta'$ genommen wird. Ist $e > a$, so tritt in (6*) an Stelle des Minuszeichens ein Pluszeichen, und es entsteht überdies die Konchoide einer Hyperbel[80a]).

71. Die Brennpunktskonchoiden der Kegelschnitte gaben soeben wieder ein Beispiel, daß es Fälle gibt, wo die Konchoide, die im allgemeinen von der Ordnung $2(2n - \beta - \alpha)$ ist (Nr. 36), in zwei voneinander verschiedene Kurven $(2n - \beta - \alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung zerfällt. Im allgemeinen entsteht die Polarkoordinatengleichung aus der kartesischen einfach dadurch, daß man $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$ setzt und höchstens mit einer Potenz von ϱ dividiert. Die so entstandene Gleichung in Polarkoordinaten wird nun gewiß dadurch nicht geändert, daß man θ durch $\theta + \pi$ und ϱ durch $-\varrho$ ersetzt; denn dabei ändern entweder alle Glieder ihre Vorzeichen oder keines. Ersetzt man nun in einer solchen Polarkoordinatengleichung ϱ durch $(\varrho - l)$, bildet also die Konchoide durch Addition des Zwischenstückes l und substituiert nun $(\theta + \pi)$ statt θ und $-\varrho$ statt ϱ, so ergibt sich wieder die ursprüngliche Gleichung, nur daß in ihr ϱ durch $(\varrho + l)$ ersetzt ist. Demnach vereinigen sich die durch Addition oder Subtraktion des Zwischenstückes entstandenen Züge im allgemeinen zu einer Kurve.

Nun gibt es aber Fälle, wo die vorliegende Polarkoordinatengleichung nur ein Faktor der Gleichung ist, die aus $f(x, y) = 0$ direkt entsteht. Dies ist vor allem immer dann der Fall, wenn ϱ sich als eine rationale Funktion von x, y darstellen läßt. Man kann nämlich die Gleichung $f(x, y) = 0$ immer in die Form

(7) $$\varrho^2\varphi(x, y) - \psi(x, y) = 0$$

[80a]) Weitere Ausführungen zu dieser Nr. findet der Leser bei G. Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables*, T. I, Coïmbre 1908, S. 312ff.

bringen, indem man nur etwa x^2 durch $\varrho^2 - y^2$ ersetzt, eventuell nach Multiplikation mit dem Faktor x. Hierbei kann nun der Fall eintreten, daß φ und ψ Quadrate rationaler Funktionen φ_1 und ψ_1 sind, so daß

$$(8) \qquad f \equiv (\varrho\varphi_1 + \psi_1)(\varrho\varphi_1 - \psi_1) = 0$$

wird. Dann wird die Kurve sowohl durch $\varrho = -\psi_1/\varphi_1$ als auch durch $\varrho = +\psi_1/\varphi_1$ dargestellt und beide Gleichungen sind rational, bleiben aber nicht ungeändert, wenn man θ durch $\theta + \pi$, ϱ durch $-\varrho$ ersetzt, sondern gehen ineinander über. Man sieht daraus im Zusammenhang mit dem oben Gesagten unmittelbar, daß die Kurven $\varrho = \psi_1/\varphi_1 + l$ und $\varrho = \psi_1/\varphi_1 - l$ voneinander verschieden sind.

Kurven, für die es Punkte in der Ebene gibt, die als Anfangspunkt genommen, bewirken, daß ϱ sich als rationale Funktion von x und y darstellt, nannte G. Halphen »von der ersten Kategorie«[81]). Ihre Konchoiden, von diesem Punkte aus genommen, zerfallen. Uns schon bekannte Beispiele sind der Kreis in bezug auf den Mittelpunkt, die Kegelschnitte in bezug auf die Brennpunkte, die Kappakurve in bezug auf den Berührungsknoten, die Strophoide in bezug auf den außerordentlichen Brennpunkt. Insbesondere gehört jede Konchoide selbst in bezug auf ihren Pol zur ersten Kategorie.

Zusatz. Die Polargleichung (12) des Cartesischen Ovals (S. 98) läßt sich schreiben $(\tau^2 - 1)(x^2 + y^2) + 2ax - 2\varrho l\tau + l^2 - a^2 = 0$ und gibt demnach ϱ als rationale Funktion von x, y. In der Tat ist (12) nur der eine Faktor der vollständigen Polargleichung, deren zweiter durch Änderung des Vorzeichens von l entstünde. Jedes Cartesische Oval ist also in bezug auf jeden der drei einfachen Brennpunkte der Symmetrieachse von der ersten Kategorie; die Pascalsche Schnecke demnach nicht bloß in bezug auf den Doppelpunkt, sondern auch in bezug auf den einzigen gewöhnlichen Brennpunkt, den sie noch besitzt.

---

[81]) Siehe den *Append. au traité de Géom. anal.* (*courb. pl.*) p. Salmon-Chemin, 2. Aufl. Paris 1903, S. 550.

III. ABSCHNITT.

WEITERE KURVEN MIT EINFACHER KINEMATISCHER ERZEUGUNG.

§ 16. Reguläre und schiefe Astroide.

72. Es ist wohl nicht schwer einzusehen, daß im Grunde jede irgendwie definierte Kurve auch einer kinematischen Erzeugung fähig sein muß. Wir wollen aber in diesem Abschnitt im Anschluß an das Vorhergegangene nur noch einige weitere Kurven betrachten, deren kinematische Erzeugung besonders einfach ist. Die Bewegung der zwei Ebenen $\varDelta$ und $\varDelta'$ gegeneinander war im vorigen Abschnitt dadurch gegeben, daß eine Gerade G von $\varDelta'$ durch einen festen Punkt O von $\varDelta$ gehen mußte, während ein Punkt P von $\varDelta'$ auf einer Kurve Γ von $\varDelta$ zu gleiten hatte. Wir wollen nun eine Bewegung dadurch definieren, daß wir zwei Punkte P, Q von $\varDelta'$ auf zwei Geraden G, Γ von $\varDelta$ gleiten lassen (Fig. 59), mit anderen Worten, *daß eine konstante Strecke $PQ = k$ gezwungen sei, mit ihren beiden Endpunkten auf zwei gegebenen Geraden zu gleiten.* Wir werden uns die Fragen vorlegen: Welche Kurve beschreibt ein beliebiger Punkt der Ebene $\varDelta'$; welche Einhüllende hat eine beliebige Gerade von $\varDelta'$?

Ist O der Schnittpunkt von G und Γ, PQ irgend eine Lage der gleitenden Strecke, so ergibt sich das Momentanzentrum M als Schnittpunkt der beiden Lote in P, Q auf G, Γ. OM ist dabei durch k und den Winkel ω von G und Γ gegeben $(a = k/\sin\omega)$. Daher ist die feste Polbahn der mit OM als Radius um O beschriebene Kreis. Denkt man die Ebene $\varDelta'(PQ)$ fest, dagegen O mit der Ebene $\varDelta$ beweglich, so läuft M auf dem Kreise mit dem Durchmesser OM. Dieser ist also die bewegliche Polbahn. Die Bewegung kann folglich dadurch

ersetzt werden, daß ein Kreis im Innern eines doppelt so großen Kreises abrollt. Wir haben also einen speziellen Fall einer zykloidischen Bewegung. Schneidet OP den festen Kreis in P_1, so ist, wie man leicht erkennt, arc $MP_1 =$ arc MP bei beliebiger Lage von OP; daher beschreibt bei dem Abrollen der beiden Kreise jeder Punkt (P) des beweglichen Kreises einen Durchmesser des festen[82]).

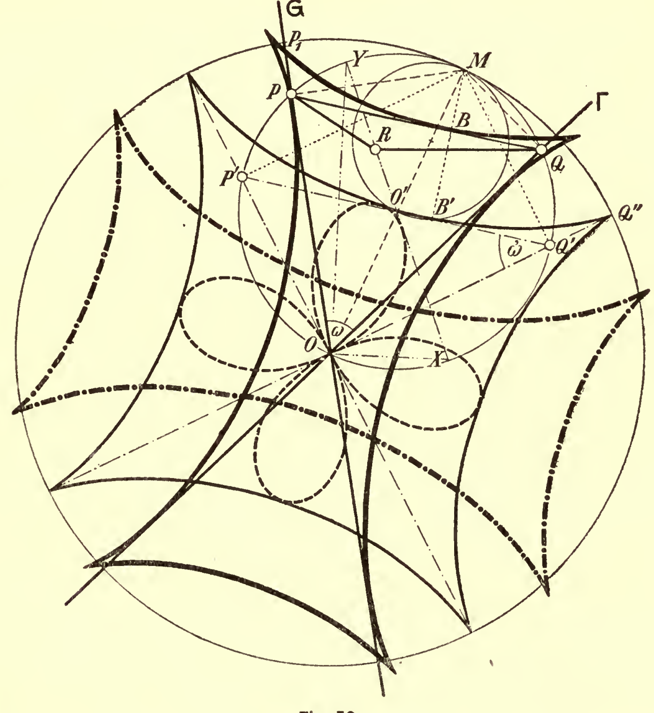


Fig. 59.

Es sei nun R ein beliebiger mit PQ fest verbundener Punkt, der natürlich auch auf PQ selbst liegen kann, so ziehe man durch R den Durchmesser YX des beweglichen Kreises, dann laufen während der Bewegung die Punkte Y

[82]) Diese Tatsache war schon Naṣîr Eddîn (1201—1274) und Copernicus (*De revol. orbium coelest.*, Norimb. 1543) bekannt.

und X auf den zueinander senkrechten Geraden OY und OX. Nimmt man diese Geraden als Achsen, setzt $YR = m$, $XR = n$, $\sphericalangle OXR = \vartheta$, so sind die Koordinaten von R

$$x = m \cos\vartheta\,, \quad y = n \sin\vartheta\,.$$

Daher beschreibt R eine Ellipse mit den beiden Halbachsen m und n[83]). Die Bewegung wird daher auch als »elliptische« bezeichnet.

73. Wir lassen alle hieraus entspringenden Folgerungen, als der Kegelschnittslehre angehörend, beiseite und wenden uns sofort zur zweiten der oben aufgeworfenen Fragen nach der Einhüllenden der beliebigen Geraden PQ. Den Berührungspunkt B dieser Geraden mit ihrer Enveloppe erhält man durch das Lot von M auf PQ. Die Gerade MB ist demnach die Normale für alle Kurven, die durch Gerade erzeugt werden, welche zu PQ parallel sind, und diese sämtlichen Kurven sind »Parallelkurven«. Unter ihnen befindet sich eine ausgezeichnete, d. i. die, welche durch den zu PQ parallelen Durchmesser $\overline{P'O'Q'}$ des beweglichen Kreises eingehüllt wird. Der zugehörige Berührungspunkt ist B'. Dieser liegt immer auf dem Kreis mit dem Durchmesser $O'M$. Läßt man diesen Kreis im Innern des beweglichen Kreises rollen, so läuft Punkt B', wenn man ihn als festen Punkt des kleinen Kreises betrachtet, auf dem Durchmesser $P'Q'$. Rollt gleichzeitig der bewegliche Kreis im festen, so werden sich immer alle drei Kreise in M berühren und schließlich wird B' nach Q', bzw. Q'' gelangen. Die Enveloppe von $P'Q'$ ist also identisch mit der Kurve, die von dem auf dem kleinen Kreise fest gedachten Punkt B' beschrieben wird, wenn dieser im Innern des festen rollt, dessen Durchmesser viermal so groß ist. Die von $P'Q'$ eingehüllte Kurve ist demnach wieder eine »zyklische Kurve« und zwar in diesem Falle eine »Hypozykloide« (s. Nr. 140). Sie hat offenbar in Q'' und in den um $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$ von Q'' entfernten Punkten des festen Kreises Spitzen und ist gegen die Durchmesser OP' bzw. OQ' symmetrisch. Man nennt sie »reguläre Astroide«.

---

83) Dieser schon im Altertum bekannte Satz wurde zuerst ausführlich behandelt bei F. Schooten, *De organica conicarum sectionum in plano descriptione,* Lugd. 1646.

Die von PQ eingehüllte Kurve wird von dem Punkte B beschrieben, der von dem entsprechenden Punkt B' immer dieselbe auf der Normale der regulären Astroide gemessene Entfernung BB' hat. Diese Parallelkurve zur regulären Astroide, die wir »schiefe Astroide« nennen, hat ebenfalls vier Spitzen, aber die Geraden G und Γ sind hier lediglich Doppeltangenten. Die Berührungspunkte haben von O die Entfernung k.

74. In bezug auf die Parallelkurve der regulären Astroide kann man nun zweierlei Bemerkungen machen. Verschiebt man PQ parallel zu $P'Q'$, so daß der Abstand BB' immer größer wird, so wird der Neigungswinkel der Geraden G und Γ immer kleiner, die gleitende Strecke PQ selbst immer kürzer. Wird BB' gleich oder größer $\frac{1}{2}P'Q'$ $(=\frac{1}{2}OM)$, so fallen zunächst G und Γ zusammen und werden dann infolgedessen imaginär. Die Parallelkurve der regulären Astroide erhält so zunächst in O einen Berührungsknoten und dann zwei getrennte Knoten. Aber sie kann dann nicht mehr reell als »schiefe Astroide« erzeugt werden. G. Loria nannte sie infolgedessen »Parastroide«[84]). Da wir aber die Normale der regulären Astroide in jedem Punkte konstruieren können, vermögen wir auch jede Parastroide punktweise zu zeichnen. Wir überlassen dies dem Leser und bemerken nur noch, daß sich für $BB' = \frac{3}{2}a$ ($OM = a$; vgl. Nr. 215) je zwei Spitzen und ein Knoten in einen sogenannten »Spitzpunkt« (*Alg. K.*, S. 135) vereinigen, während für noch größeren Abstand die Parastroide aus einem reinen Oval besteht.

Eine zweite Bemerkung bezüglich der Parallelkurve der regulären Astroide ist die, daß die behandelte schiefe Astroide oder Parastroide nur die eine Hälfte dieser Parallelkurve ist. Sie ist noch durch eine um 90° gedrehte kongruente Kurve zu ergänzen, die in Fig. 59 strichpunktiert wurde. Wir haben hier ein Zerfallen der Parallelkurve, ähnlich wie wir dies bei den Konchoiden der Kurven erster Kategorie bemerken konnten. Es sei einstweilen nur darauf hingewiesen, daß auch die Parallelkurven von Kreis und Gerade zerfallen. Der tiefere Grund

[84]) Mathesis (2) **10**, 1900; s. a. die folgende Note von J. Neuberg.

und die Bedingung für das Zerfallen wird sich unten ergeben (Nr. 77).

75. Wir wollen nun zunächst die Gleichung der regulären Astroide aufstellen. Nehmen wir OQ' und OP' als Achsen ($P'Q' = a$) und setzen $OQ' = -1/u$, $OP' = -1/v$, wo u und v Plückersche Linienkoordinaten bedeuten, so ist immer

(1) $$1/u^2 + 1/v^2 = a^2$$

oder

(1*) $$u^2 + v^2 = a^2 u^2 v^2 .$$

Dies ist die Gleichung in Linienkoordinaten. Macht man die Gleichung homogen, so lautet sie $(u^2 + v^2) w^2 - a^2 u^2 v^2 = 0$ oder $u^2(w^2 - a^2 v^2) + v^2 w^2 = 0$ oder $v^2(w^2 - a^2 u^2) + u^2 w^2 = 0$ und zeigt dadurch (*Alg. K.* Nr. 22, Beisp. 2), daß sowohl die Geraden $u = 0$, $w = 0$; $v = 0$, $w = 0$, das sind die Achsen, als auch die Gerade $u = 0$, $v = 0$, d. i. die unendlich ferne Gerade Doppeltangenten sind. Die Berührungspunkte sind durch die Klammerausdrücke gegeben; man erkennt die Punkte $u = \pm 1/a$, $v = \pm 1/a$ und die imaginären Kreispunkte $u^2 + v^2 = 0$. Daß die Berührungspunkte Spitzen sind, ersieht man daraus, daß jeweils die Glieder fehlen, die in den in der Klammer stehenden Variabeln dritten Grades wären; d. h. setzt man etwa in der zweiten Gleichungsform $w = \pm a v$, so ergibt sich $v^4 = 0$, also vier zusammenfallende Tangenten.

Wie Gleichung (1*) zeigt, ist die reguläre Astroide vierter Klasse. Um die Ordnung zu bestimmen, stellen wir auch die Gleichung in Punktkoordinaten auf. Zur Erreichung dieses Zieles kann man entweder von (1*) aus zu Punktkoordinaten transformieren, oder nach dem in der Differentialrechnung üblichen Verfahren die Enveloppe von $P'Q'$ bestimmen. Wir benutzen aber hier am bequemsten den Berührungspunkt B', für dessen Koordinaten man sofort aus der Figur abliest ($\sphericalangle OQ'P' = \mathring{\omega}$)

(2) $$x = a \cos^3 \mathring{\omega} , \qquad y = a \sin^3 \mathring{\omega} .$$

Aus dieser Parameterdarstellung ergibt sich die gesuchte Gleichung

(3) $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} ,$$

oder rationalisiert

$$(3^*)\qquad (x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27\,a^2 x^2 y^2 = 0\,.$$

Die reguläre Astroide ist also 6. Ordnung.

76. Heißt man die konstante Entfernung BB', in welcher zur regulären Astroide die Parallelkurve gezogen werden soll, c, so erhält man aus (2) sofort eine Parameterdarstellung der schiefen Astroide in der Form

$$(4)\qquad x = a\cos^3\bar{\omega} + c\sin\bar{\omega}\,,\qquad y = a\sin^3\bar{\omega} + c\cos\bar{\omega}\,,$$

woraus durch Elimination von $\bar{\omega}$ die Gleichung in Punktkoordinaten entsteht

$$(4^*)\qquad \begin{cases} [3(x^2 + y^2 - a^2) - 4\,c^2]^3 \\ + [27\,a\,x\,y - 9\,c(x^2 + y^2) - 18\,a^2 c + 8\,c^3]^2 = 0\,. \end{cases}$$

Also ist auch die schiefe und die Parastroide von der 6. Ordnung. Gleichung (4*) ist aber nicht sehr bequem. Man sieht jedoch schon aus ihr, daß die Änderung des Vorzeichens von c eine andere Kurve ergibt.

Größeres Interesse bietet die Gleichung in Linienkoordinaten. Ist allgemein $f(u\,,\,v\,,\,w) = 0$ die Gleichung einer Kurve, $u\,x + v\,y + w = 0$ die der Tangente mit den Koordinaten $u\,,\,v\,,\,w$, so ist die Gleichung einer zu ihr im Abstande c parallelen Geraden $u\,x + v\,y + w + c\sqrt{u^2 + v^2} = 0$. Diese Gerade hat also die Koordinaten $u\,,\,v\,,\,w + c\sqrt{u^2 + v^2}$ und $f(u\,,\,v\,,\,w + c\sqrt{u^2 + v^2}) = 0$ ist infolgedessen die Gleichung der Parallelkurve. Da die Quadratwurzel durch einmaliges Quadrieren beseitigt wird, hat im allgemeinen die Parallelkurve die doppelte Klassenzahl wie die Grundkurve. Es gibt aber Fälle, wo die schließliche Gleichung in zwei zerlegt werden kann, die sich nur durch das Zeichen von c unterscheiden. Ein solcher Fall liegt hier vor. Setzen wir $u^2 + v^2 = \sigma^2$, so ergibt sich aus (1*) die Linienkoordinatengleichung der Parallelkurve

$$(5)\qquad \sigma^2(w + c\,\sigma)^2 = a^2 u^2 v^2\,.$$

Zerlegen wir diese Gleichung in ihre beiden (irrationalen) Faktoren, so können wir nachher jeden Faktor für sich durch einmaliges Quadrieren rationalisieren. Es ergibt sich

$$\sigma(w + c\,\sigma) = \pm a\,u\,v$$

oder schließlich

$$(u^2 + v^2)\,w^2 = [a\,u\,v \pm c(u^2 + v^2)]^2 \tag{5*}$$

als Gleichung der beiden schiefen Astroiden, die zusammen die Parallelkurve der regulären Astroide bilden.

77. Das eben behandelte Beispiel gibt uns einen Fingerzeig, wann das Zerfallen der Parallelkurve im allgemeinen eintreten wird. Dies ist immer dann und nur dann der Fall, wenn die Linienkoordinatengleichung der Grundkurve in die Form

$$\sigma^2 \Phi^2(u\,,\,v\,,\,w) - \Psi^2(u\,,\,v\,,\,w) = 0$$

gebracht werden kann, d. h. wenn σ als rationale Funktion von $u\,,\,v$ darstellbar ist. Setzt man hier statt w die Summe $w + c\,\sigma$, so hat man nach dem Taylorschen Lehrsatz

$$[\sigma(\Phi + \Phi'_w c\,\sigma + \Phi''_w c^2\sigma^2 + \ldots) + (\Psi + \Psi'_w c\,\sigma + \Psi''_w c^2\sigma^2 + \ldots)]$$
$$\cdot[\sigma(\Phi + \Phi'_w c\,\sigma + \Phi''_w c^2\sigma^2 + \ldots) - (\Psi + \Psi'_w c\,\sigma + \Psi''_w c^2\sigma^2 + \ldots)] = 0\,.$$

Hier läßt sich in der Tat jeder einzelne Faktor rational machen durch einmaliges Quadrieren, und man erhält die Doppelgleichung

$$\sigma^2[\Phi + c^2\Phi'' + \ldots \pm c(\Psi' + c^2\Psi''' + \ldots)]$$
$$= [\Psi + c^2\Psi'' + \ldots \pm c(\Phi' + c^2\Phi''' + \ldots)]\,,$$

deren beide Komponenten sich nur durch das Vorzeichen von c unterscheiden.

Die in Frage stehenden Kurven haben noch eine andere charakteristische Eigenschaft. Die Gleichung der Tangente einer Kurve $f(x\,,\,y) = 0$ lautet im allgemeinen, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ laufende Koordinaten sind,

$$\mathfrak{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathfrak{y}\frac{\partial f}{\partial y} - \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0\,,$$

so daß

$$u = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}}\,, \qquad v = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}}\,.$$

Nun lassen sich aber bekanntlich, wie hier $u\,,\,v$ durch $x\,,\,y\,,$ in derselben Weise $x\,,\,y$ durch $u\,,\,v$ rational ausdrücken. Die Bedingung, daß $\sigma = \sqrt{u^2 + v^2}$ eine rationale

Funktion von u, v sei, ergibt also, daß auch $\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}$ eine rationale Funktion von u, v und damit auch von x, y ist. Damit sind dann auch die Größen $\cos\tau = dx/ds = -f_y'/\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}$ und $\sin\tau = dy/ds = f_x'/\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}$ rationale Funktionen der Koordinaten des Berührungspunktes. Solche Kurven wurden von E. LAGUERRE »Richtungskurven« genannt, weil sie als Enveloppen von mit Richtung versehenen Geraden aufgefaßt werden können[85]).

78. Schon die Gleichungsform der Richtungskurven in Linienkoordinaten weist eine merkwürdige Ähnlichkeit mit der in Nr. 71 gegebenen der Kurven erster Kategorie auf. Man bemerkt auch gleich, daß, wie jede Konchoide erster Kategorie, so auch jede Parallelkurve Richtungskurve ist. Aus einer Richtungskurve $(u^2 + v^2)\,\Phi^2(u, v) - \Psi^2(u, v) = 0$ entsteht eine Kurve erster Kategorie, wenn man nur u durch x, v durch y ersetzt. Das ist aber nichts anderes als die Bildung der Reziproken der Richtungskurve in bezug auf den (imaginären) Kreis um den Anfangspunkt $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Will man die Reziproke in bezug auf einen Kreis vom Radius r, so hat man nur mit w zu homogenisieren und es durch $-r^2$ zu ersetzen. Da aber die Gleichungsform der Richtungskurve von der Lage des Anfangspunktes nicht abhängt, können wir sagen: *Die Reziproke einer Richtungskurve in bezug auf einen beliebigen Kreis ist eine Kurve erster Kategorie in bezug auf den Kreismittelpunkt.* Ebenso ist die Reziproke einer Kurve erster Kategorie in bezug auf einen Kreis um den Pol eine Richtungskurve.

Es gibt aber außer dieser polaren Transformation eine ganze Anzahl anderer, die eine Richtungskurve und eine Kurve erster Kategorie wieder in eine solche, oder beide Gattungen ineinander transformieren. Eine Transformation der ersten Art ist die Transformation durch reziproke Radien (zirkulare Inversion). Setzt man

$$x = \frac{r^2\,\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{r^2\,\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad (\varrho \cdot \mathring{\varrho} = r^2)$$

[85]) Siehe Bull. Soc. math. France **8**, 1880; C. R. Ac. Paris **104**, 1882, p. 778; Nouv. Ann. math. (2) **2**, 1883, alle vereinigt im Bd. II der *Oeuvres*, Paris, Gauthier-Villars, 1905, S. 592ff.; ferner einen Aufsatz von P. APPELL in Nouv. Ann. math. (3) **15**, 1896.

so geht $x^2 + y^2$ über in $r^4/(\xi^2 + \eta^2)$. Ist also $\varrho = \mathfrak{R}(x, y)$ eine Kurve erster Kategorie, so ist die Transformierte $\bar{\varrho} = \mathfrak{R}'(\xi, \eta)$ wieder eine solche. Ferner ist

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\theta^2 = \frac{r^4}{\bar{\varrho}^4}(d\bar{\varrho}^2 + \bar{\varrho}^2 d\theta^2)$$

oder $ds = \frac{r^2}{\bar{\varrho}^2} ds'$, woraus folgt, daß auch eine Richtungskurve wieder in eine solche übergeht.

79. Mit Hilfe dieser Sätze können wir eine Reihe von Tatsachen, die uns schon begegneten, miteinander verknüpfen. Die einfachsten Richtungskurven sind Gerade und Kreis. Sie reproduzieren sich durch Inversion. Die Polarreziproke eines Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem des Grundkreises zusammenfällt, ist wieder ein Kreis, daher zerfällt auch die Konchoide eines Kreises in bezug auf den Mittelpunkt. Die Konchoide einer Pascalschen Schnecke in bezug auf den Doppelpunkt zerfällt; die Inverse in bezug auf einen Kreis um denselben Punkt ist ein Kegelschnitt mit diesem Punkt als Brennpunkt; daher müssen auch die Konchoiden der Kegelschnitte in bezug auf die Brennpunkte zerfallen. Die Kappakurve, deren Konchoide zerfällt, reproduziert sich durch Inversion.

Wir haben ferner schon in Nr. 5 bemerkt, daß man eine Fußpunktskurve einer gegebenen Kurve erhält, indem man zur polarreziproken die inverse Kurve nimmt. *Daher ist jede Fußpunktskurve einer Richtungskurve von der ersten Kategorie bezüglich des Poles;* jede Fußpunktskurve in bezug auf den Pol einer Kurve erster Kategorie ist umgekehrt eine Richtungskurve. Natürlich gilt dies auch rückwärts, d. h. für negative Fußpunktskurven. Bildet man also die Reihe der Fußpunktskurven einer Richtungskurve in bezug auf denselben Punkt, so ist die erste positive und die erste negative eine Kurve erster Kategorie, die zweite positive und negative wieder eine Richtungskurve usw. Zum Beispiel ist der Kreis eine Richtungskurve; seine erste positive Fußpunktskurve, die Pascalsche Schnecke und seine erste negative Fußpunktskurve, ein Mittelpunktskegelschnitt sind Kurven erster Kategorie in bezug auf den Doppelpunkt bzw. Brennpunkt. Die Gerade ist eine Richtungskurve, ihre negative Fußpunktskurve, die Parabel, ist erster Kategorie in bezug auf den Brennpunkt. Die

zweite negative Fußpunktskurve, die erste der Parabel, ist eine Tschirnhausensche Kubik; wir haben also den neuen Satz, daß *die Parallelkurve der Tschirnhausenschen Kubik zerfällt*, da sie Richtungskurve sein muß[86]. Auf die an die reguläre Astroide anschließenden Kurven kommen wir ohnehin gleich zu sprechen.

80. Sowohl die Fläche als die Bogenlänge der schiefen und der regulären Astroide sind durch elementare Funktionen ausdrückbar. Wir erhalten aus (4) für die Fläche das Integral

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \tfrac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx)\\ &= \tfrac{1}{2}\int [(\tfrac{3}{8}a^2 - c^2) + a\,c \sin 2\,\tilde{\omega} - \tfrac{3}{8}a^2 \cos 4\,\tilde{\omega}]\,d\tilde{\omega}\,.\end{aligned}$$

Dieses ist zwischen den Grenzen 0 und 2π zu nehmen. Daher ergibt sich

$$\mathcal{F} = (\tfrac{3}{8}a^2 - c^2)\,\pi\,, \tag{6}$$

für die reguläre Astroide demnach $\frac{3}{8}a^2\pi$. Des weiteren hat man

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (9\,a^2 \sin^2\tilde{\omega}\cos^2\tilde{\omega} - 6\,a\,c \sin\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega} + c^2)\,d\tilde{\omega}^2,$$

also ist ds^2 wirklich ein reines Quadrat (hier einer Funktion des Parameters). Es ist nämlich

$$ds = \pm(3\,a \sin\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega} - c)\,d\omega\,. \tag{7}$$

Hieraus ergibt sich die Länge eines zwischen zwei Spitzen enthaltenen Bogens durch Integration von $\tilde{\omega}_0$ bis $\tilde{\omega}$ als

$$s = \pm\Big\{-\tfrac{3}{4}\,a \cos 2\,\tilde{\omega} - c\,\tilde{\omega} + k\Big\}_{\tilde{\omega}_0}^{\tilde{\omega}}\,.$$

Insbesondere erhält man für die Gesamtlänge der regulären Astroide $6\,a$.

Auch der Krümmungsradius $\mathcal{R}$ läßt sich sehr einfach durch $\tilde{\omega}$ ausdrücken. Man bekommt $dx\,d^2y - dy\,d^2x = -(3\,a \sin\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega} - c)^2$; also $\mathcal{R} = ds^3/(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = c - 3\,a \sin\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega}$ $[= ds/d\tilde{\omega}]$. Die Bogen rechnet man gerne von einem »Scheitel« aus, d. h. einem Punkte, wo $\mathcal{R}$ einen extremen Wert besitzt, z. B. hier für $\tilde{\omega} = \frac{1}{4}\pi$.

---

[86] Die Aufstellung der Linienkoordinatengleichung (nach *Alg. K.* Nr. 123, Zusatz) und dann der Parallelkurve (4. Klasse) überlassen wir dem Leser.

Dann ist die Integrationskonstante $k = \frac{1}{4} c\pi$ zu nehmen und wir haben das System

(8) $\mathcal{R} = c - \frac{3}{2} a \sin 2\dot{\omega}\,, \qquad s = -\frac{3}{4} a \cos 2\dot{\omega} - c\dot{\omega} + \frac{1}{4} c\pi$

als Parameterdarstellung der schiefen Astroide in natürlichen Koordinaten. Für die reguläre Astroide ($c = 0$) läßt sich $\dot{\omega}$ leicht eliminieren und wir erhalten deren natürliche Gleichung in der an die gewöhnliche Ellipsengleichung erinnernden Form

(9) $$\frac{1}{4}\mathcal{R}^2 + s^2 = (\tfrac{3}{4} a)^2\,.$$

81. Die Betrachtung der ersten Gleichung (8) wird den Leser vor dem bei kleinem c naheliegenden Irrtum bewahren, daß die Spitzen der Grundkurve und der Parallelkurve sich entsprechen. Da in den Spitzen $\mathcal{R} = 0$ ist, erhält man für diese $\sin 2\dot{\omega} = 2c/3a$ und dann aus (4) die Koordinaten der Spitzen. Am leichtesten wird der Sachverhalt ersichtlich, wenn man nach dem Ort der Spitzen bei veränderlichem c frägt. Nun ergibt sich aber aus der ersten Gleichung von (8), daß der Krümmungsmittelpunkt für alle entsprechenden Punkte B, B', ... des Systems der Parallelkurven der nämliche ist, da die Krümmungsradien der Parallelkurven sich nur um die Länge c von dem der Grundkurve unterscheiden. D. h. zu allen Parallelkurven gehört dieselbe Evolute, nämlich die Evolute der Grundkurve. Diese selbst und die Parallelkurven sind das System aller Evolventen der Evolute, d. h. der Bahnen aller Punkte einer Geraden, die auf der Evolute abrollt. Der Krümmungsradius ist immer gleich dem Abschnitt der Geraden zwischen dem beschreibenden Punkt und dem Berührungspunkt. Fällt nun der Berührungspunkt auf die Grundkurve (Evolute), dann ist der Krümmungsradius der Bahnkurve (Evolvente) in diesem Punkte Null, der Punkt also eine Spitze der Evolvente, deren Tangente zur Evolute senkrecht steht.

Nennen wir also s_1 den Bogen der Evolute, gezählt von dem Punkte, wo die Evolvente mit einer Spitze ansetzt, so ist $s_1 = \mathcal{R}$. Nennt man ferner τ den Winkel, den die Tangente der Evolvente mit einer festen Richtung macht (»Tangentenwinkel«), τ_1 den entsprechenden für die Evolute, so hat man die beiden Gleichungen

$$ds = \mathcal{R}\, d\tau\,, \qquad ds_1 = \mathcal{R}_1\, d\tau_1\,,$$

aus denen sich wegen $d\tau = d\tau_1$ ergibt $\mathcal{R}_1 ds = \mathcal{R} ds_1 = \mathcal{R} d\mathcal{R}$. Um also aus den natürlichen Bestimmungsstücken $\mathcal{R}$, s einer Kurve dieselben Stücke $\mathcal{R}_1$, s_1 der Evolute zu berechnen, hat man die Gleichungen

$$(10) \qquad s_1 = \mathcal{R}\,, \qquad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}\, d\mathcal{R}/ds\,.$$

Wendet man diese auf das System (8) an, so ergibt sich für die Evolute unserer Astroiden

$$(11) \qquad \mathcal{R}_1 = 3\,a \cos 2\,\bar{\omega}\,, \qquad s_1 = c - \tfrac{3}{2}\,a \sin 2\,\bar{\omega}$$

oder

$$(11^*) \qquad \tfrac{1}{4}\mathcal{R}_1^2 + (s_1 - c)^2 = (\tfrac{3}{2}\,a)^2\,.$$

Hierbei ist nun s_1 immer von der Spitze der betreffenden Parallelkurve aus gerechnet. Rechnen wir s_1 von einem Scheitel der regulären Astroide aus, so lautet die Gleichung

$$(11^\dagger) \qquad \tfrac{1}{4}\mathcal{R}_1^2 + s_1^2 = (\tfrac{3}{2}\,a)^2 \quad [= (\tfrac{3}{4}\,a_1)^2]\,.$$

Die Evolute ist demnach selbst eine reguläre Astroide von den doppelten Dimensionen. Dasselbe Resultat hätte man direkt durch Differenzieren von (9) erhalten können.

Daß dieses Resultat allgemeinere Bedeutung hat, wird später erhellen. Wir wollten nur an einem Beispiele den Nutzen der natürlichen Koordinaten vor Augen führen.

Aber auch die Parallelkurven sind in sehr einfacher Weise mittels natürlicher Koordinaten aufzustellen. Sind $\mathcal{R}$, s die Koordinaten der Grundkurve, $\mathcal{R}_1$, s_1 die der Parallelkurve, $\tau = \tau_1$ der Tangentialwinkel, so hat man die leicht verständlichen Gleichungen $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} + c$, $ds_1 = \mathcal{R}_1 d\tau = \mathcal{R} d\tau + c\, d\tau$ oder

$$(12) \qquad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R} + c\,, \qquad s_1 = s + c\,\tau + k\,.$$

Man sieht, wie man mittels dieser Gleichungen (12) aus der Darstellung der regulären Astroide die der schiefen erhält. In (8) ist nämlich $\bar{\omega}$ mit τ zu identifizieren; die Bogen sind in umgekehrter Richtung gezählt.

82. Wir wollen nun noch einige Kurven ableiten, die in direktem Zusammenhange mit der regulären Astroide stehen, zunächst ihre Reziproke in bezug auf einen Kreis um den Anfangspunkt. Setzen wir $u = x$, $v = y$, $w = -r^2$ $(c = 0)$ in (5*), so erhalten wir

$$(13) \qquad (x^2 + y^2) r^4 = a^2 x^2 y^2\,.$$

Das ist aber nichts anderes als die gleichseitige Kreuzkurve (Nr. 15). Aus Nr. 78 wissen wir nun, daß die Konchoide dieser gleichseitigen Kreuzkurve in bezug auf ihren Mittelpunkt in zwei Kurven (6. Ordg.) zerfallen muß. In der Tat erhält man aus der Polargleichung

$$\varrho = r^2/a \sin\theta \cos\theta + l$$

die kartesische

(14) $$x^2 y^2 (x^2 + y^2) = [r^2(x^2 + y^2) + a\,l\,x\,y]^2\,,$$

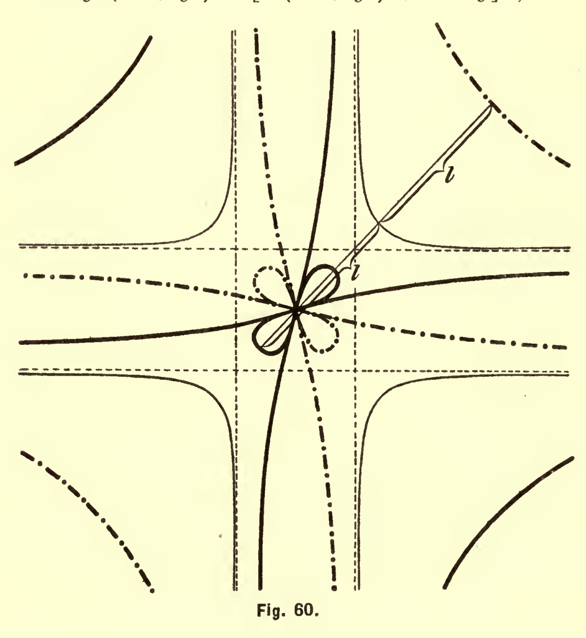


Fig. 60.

in welcher l auch im ersten Grade vorkommt. Die ausgezogene Linie der Fig. 60 gibt ein Bild dieser Kurve für negatives l, mit reellem vierfachen Punkte im Anfangspunkte (zwei doppeltzählende Tangenten). Für positives l erscheint dieselbe Kurve um $\frac{1}{2}\pi$ gedreht (die strichpunktierte Linie der Fig. 60), so daß die vierfache Symmetrie hergestellt wird. Die Bedingung für die Realität des vierfachen Punktes ist $l > 2\,r^2/a$; dies stimmt mit der Bedingung dafür überein, daß der Kreis um den Anfangspunkt mit l als Radius die Kreuzkurve schneidet.

Die Fußpunktskurve der gleichseitigen Kreuzkurve, deren Gleichung wir früher aufstellten (Fig. 11), muß nach dem obigen wieder eine Richtungskurve sein. In der Tat zeigt der Augenschein, daß ihre Parallelkurve zerfallen muß, da sie wie die Astroide 4 Spitzen hat.

Nimmt man die Inverse unserer Kreuzkurve in bezug auf denselben Kreis vom Radius r, der schon zur Bildung der Kreuzkurve als der Polarreziproken der Astroide diente, so ergibt sich die schon als regelmäßiges Vierblatt bezeichnete Kurve

(15) $$\varrho = a \sin\theta \cos\theta$$

oder in Punktkoordinaten

(16) $$(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2 .$$

Diese Kurve muß als Inverse der Polarreziproken die Fußpunktskurve der Astroide in bezug auf den Mittelpunkt sein. Man erhält wirklich die Gleichung (16) auf dem schon in Nr. 15 angewendeten Wege. Das Vierblatt (Quadrifolium) ist erster Kategorie in bezug auf den Mittelpunkt. Wir sehen in der Tat, daß die Kurve $\varrho = a \sin\theta\cos\theta + l$ für den Wert $l = \pm\frac{1}{2}a$ je eine Doppeleilinie vorstellt (Nr. 46). Denn die beiden Gleichungen werden $\varrho = \frac{1}{2}a\sin^2(\frac{1}{4}\pi + \theta)$ und $\varrho = -\frac{1}{2}a\sin^2(\frac{1}{4}\pi - \theta)$. Die ganze Konchoide besteht also aus zwei Kurven 6. Ordg., die für $l = \frac{1}{2}a$ zu zwei kongruenten Doppeleilinien werden.

83. Statt für das Vierblatt einzeln das Flächenintegral aufzustellen, wollen wir dies gleich für die ganze Familie der »Rosenkurven« (Rhodoneen) tun, zu denen es gehört. Diese haben die allgemeine Gleichung in Polarkoordinaten

(17) $$\varrho = m \sin\mu\,\theta$$

oder auch, wenn man $\theta = \pi/2\,\mu - \omega$ setzt,

(17*) $$\varrho = m \cos\mu\,\omega .$$

Ist μ hier eine Irrationalzahl, so geht die Kurve unendlich oft durch den Pol; ist aber μ eine rationale Zahl, so ist die Kurve algebraisch und besteht aus einer Anzahl von Blättern, die für μ gleich einer ganzen Zahl nicht übereinandergreifen. Im letzteren Falle ist die Anzahl der Blätter $2\,\mu$ für gerades μ, nur μ, wenn μ ungerade ist.

Ein solches Blatt beginnt für (17) bei $\theta = 0$ und endigt bei $\theta = \pi/\mu$. Das Maximum des Radiusvektors liegt bei $\theta = \pi/2\mu$. Da ϱ für $\theta_0 = \pi/2\mu - \alpha$ und $\theta_1 = \pi/2\mu + \alpha$ denselben Wert $m \cos \mu \alpha$ annimmt, ist das Blatt gegen den Maximalradius symmetrisch. Setzt man in (17) statt θ den Wert $\theta + n\pi/\mu$, so erhält man wieder die ursprüngliche Gleichung, eventuell mit einem Minuszeichen auf der rechten Seite. Daher sind alle Blätter kongruent.

Der Flächeninhalt eines solchen Blattes ist nun

(18) $$\mathcal{F} = \tfrac{1}{2} m^2 \int_0^{\pi/\mu} \sin^2 \mu\, \theta \, d\theta = \frac{m^2 \pi}{4\mu},$$

d. i. der μ^{te} Teil des Kreisquadranten vom Radius m. Diesen Satz stellte schon GUIDO GRANDI auf, der die Rosenkurven zuerst einer näheren Betrachtung unterzog[87]). Ein Blatt des Vierblattes ist demnach gerade der Hälfte eines Kreisquadranten gleich.

Zusatz. Der Leser möge den zweiten von GRANDI aufgestellten Satz selbst beweisen: Beschreibt man mit dem zu dem Winkel $\pi/4\mu$ gehörigen Radiusvektor einen Kreisbogen, so schneidet dieser von dem Blatt der Kurve ein Möndchen (Zweieck) ab, das die elementar quadrierbare Fläche $m^2/4\mu$ hat.

84. Daß die Rosenkurven ebenfalls zyklische Kurven sind, werden wir später sehen. Wir geben daher auch jetzt keine allgemeine Erzeugung an. Erwähnt sei nur noch, daß, wie zum Vierblatt die Kreuzkurve, so zu jeder Rosenkurve als Inverse eine andere Kurve gehört von der Gleichungsform

(19) $$\varrho = m/\sin \mu\, \theta.$$

Diese Kurvengattung nannte A. AUBRY »Ährenkurven« (épis)[88]). Zu ihnen gehört außer der Kreuzkurve für $\mu = 2$ von Kurven mit eigenem Namen die Trisektrix von DE LONGCHAMPS für $\mu = 3$ (s. Nr. 30). Die zugehörige Rosenkurve mit der Gleichung $\varrho = m \sin 3\theta$, das sogenannte »reguläre Dreiblatt« oder »Kleeblatt« wird uns bald begegnen (Nr. 105). Ferner ist eine Ährenkurve die Trisektrix des MACLAURIN für

---

[87]) Zuerst in Briefen an LEIBNIZ (1713), dann in dem Werkchen *„Flores geometrici ex rhodonearum et claeliarum descriptione resultantes“*. Florenz 1728.

[88]) Journ. math. spéc. (4) **4**, 1895, S. 201.

$\mu = \frac{1}{3}$ (s. Nr. 28). Die Rosenkurve $\varrho = m \sin \frac{1}{3} \theta$, die ihr invers entspricht, ist eine Quartik vom Aussehen einer Pascalschen Schnecke, aber mit Doppelpunkten in den Kreispunkten statt der Spitzen. Für $\mu = 1$ ergibt sich Gerade bzw. Kreis als Ähren- und Rosenkurve.

Eine Verallgemeinerung des Vierblattes ist diejenige Fußpunktskurve der regulären Astroide, deren Pol auf der Halbierungslinie des Winkels zweier Spitzentangenten liegt. Sie heißt wegen ihrer Gestalt »Skarabäe« oder »Käferkurve«, hat aber sonst keine große Bedeutung. Natürlich zerfällt auch die Konchoide der Skarabäe, da diese eine Kurve erster Kategorie sein muß.

§ 17. **Projektive Astroiden.**

85. Wenn wir die reguläre Astroide irgend einer Projektion unterwerfen, so erhalten wir immer eine Kurve 4. Klasse mit drei Spitzendoppeltangenten, die wir konsequenterweise »projektive Astroide« nennen. Wir werden demnach, um diese Kurven allgemein zu erzeugen, nur den § 4, der von den Quartiken mit drei Inflexionsknoten handelt, ins Dualistische umwerten müssen.

Zu diesem Zwecke gehen wir von einem auf ein Polardreieck bezogenen Kegelschnitte

$$(1) \qquad \mathsf{K} \equiv \begin{cases} \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 0 \\ \alpha_1^{-1} u_1^2 + \alpha_2^{-1} u_2^2 + \alpha_3^{-1} u_3^2 = 0 \end{cases}$$

aus und bestimmen zu irgend einem Punkte $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ von K die Polare in bezug auf das als Kubik betrachtete Fundamentaldreieck

$$(2) \qquad \Delta \equiv x_1 x_2 x_3 = 0 .$$

Diese hat die Gleichung

$$(3) \qquad \mathsf{T} \equiv x_1 \xi_1^{-1} + x_2 \xi_2^{-1} + x_3 \xi_3^{-1} = 0 .$$

Durchläuft P den Kegelschnitt K, so hüllt T eine Kurve ein, deren Gleichung in Linienkoordinaten man erhält, indem man aus den Gleichungen $\vartheta u_i = \xi_i^{-1}$, wo u_i die Koordinaten von T sind, und der Kegelschnittgleichung $\sum_1^3 \alpha_i \xi_i^2 = 0$ die ξ_i und ϑ eliminiert. So ergibt sich

$$(4) \qquad \mathsf{A} \equiv \alpha_1 u_1^{-2} + \alpha_2 u_2^{-2} + \alpha_3 u_3^{-2} = 0$$

oder

$$(4^*) \qquad \mathsf{A} \equiv \alpha_1 u_2^2 u_3^2 + \alpha_2 u_3^2 u_1^2 + \alpha_3 u_1^2 u_2^2 = 0$$

als Gleichung der Kurve. Um (4) zu Punktkoordinaten zu transformieren, bilde man die Koordinaten des jeweiligen Berührungspunktes Q $\vartheta x_i = -2\,\alpha_i u_i^{-3} = \vartheta' \alpha_i \xi_i^3$ und setze die Werte von ξ_i wieder in (1) ein. So kommt

$$(5) \qquad \mathsf{A} \equiv \alpha_1^{\frac{1}{3}} x_1^{\frac{2}{3}} + \alpha_2^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} + \alpha_3^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{2}{3}} = 0\,,$$

oder in rationaler Form

$$(5^*) \qquad \mathsf{A} \equiv (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)^3 - 27\,\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0\,.$$

Aus (4*) oder (5*) erkennt man die drei Fundamentalseiten als Spitzendoppeltangenten; die Spitzen liegen in den Punkten, wo die Fundamentalseiten von K geschnitten werden.

86. Wir wollen hier aber auch die Doppelpunkte bestimmen. Für diese müssen die drei Differentialquotienten $\partial \mathsf{A}/\partial x_i$ verschwinden. Das gibt die Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{cases} (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)^2 - 9\,\alpha_2 \alpha_3 x_2^2 x_3^2 = 0\,, \\ (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)^2 - 9\,\alpha_3 \alpha_1 x_3^2 x_1^2 = 0\,, \\ (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2)^2 - 9\,\alpha_1 \alpha_2 x_1^2 x_2^2 = 0\,, \end{cases}$$

die offenbar durch das Wertesystem

$$(7) \qquad \alpha_1 x_1^2 = \alpha_2 x_2^2 = \alpha_3 x_3^2$$

erfüllt werden. Demnach gibt es vier Doppelpunkte mit den Koordinaten

$$(7^*) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1^{-\frac{1}{2}} : \pm \alpha_2^{-\frac{1}{2}} : \pm \alpha_3^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Nach den Plückerschen Formeln ergibt sich hiernach aus der Ordnung 6 dieser Kurven wirklich die Klassenzahl 4 $(6 \cdot 5 - 6 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 4)$.

Zusatz. Ist das Polardreieck $A_1 A_2 A_3$, so erhält man die Polare von P, indem man, wie in Fußnote [16]) angedeutet, PA_1, PA_2, PA_3 zieht, an jeder Ecke den vierten harmonischen Strahl bestimmt und diesen mit der Gegenseite in E_1, E_2, E_3 zum Schnitte bringt. Diese drei Punkte liegen dann auf T. Die drei Geraden $A_i E_i$ haben nun die Gleichungen $x_1 \xi_1^{-1} + x_2 \xi_2^{-1} = 0$, $x_2 \xi_2^{-1} + x_3 \xi_3^{-1} = 0$, $x_3 \xi_3^{-1} + x_1 \xi_1^{-1} = 0$. Sie bilden selbst ein $\triangle B_1 B_2 B_3$, dessen Ecken die Koordinaten haben $-\xi_1, \xi_2, \xi_3$; $\xi_1, -\xi_2, \xi_3$; $\xi_1, \xi_2, -\xi_3$ und

also mit P auf K liegen. A_1, A_2, A_3 sind dann die Diagonalpunkte des durch P, B_1, B_2, B_3 bestimmten vollständigen Vierseits. Legt man nun in B_1, B_2, B_3 die Tangenten an K mit den Gleichungen $(-\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3)(\alpha_1 \xi_1 - \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3)(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 - \alpha_3 \xi_3) = 0$, so entsteht ein neues Dreieck $C_1 C_2 C_3$, dessen Ecken die Koordinaten haben

$$0,\ (\alpha_2 \xi_2)^{-1},\ (\alpha_3 \xi_3)^{-1};\quad (\alpha_1 \xi_1)^{-1},\ 0,\ (\alpha_3 \xi_3)^{-1};\quad (\alpha_1 \xi_1)^{-1},\ (\alpha_2 \xi_2)^{-1},\ 0.$$

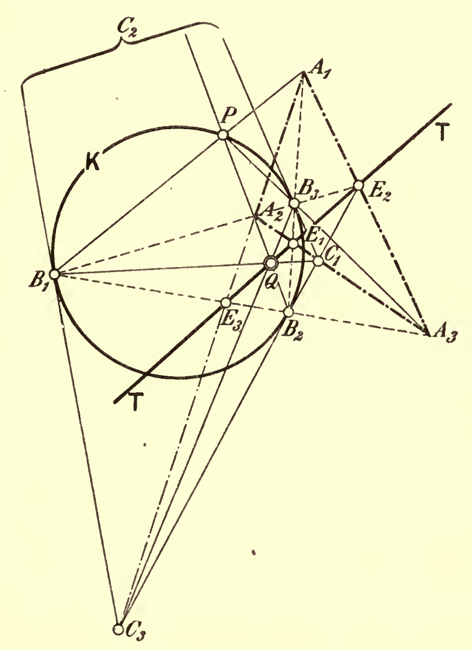


Fig. 61.

Dann haben die Verbindungslinien $B_1 C_1$, $B_2 C_2$, $B_3 C_3$ bzw. die Gleichungen

$$\alpha_2 \xi_2^2 (x_1 \xi_1^{-1} + x_2 \xi_2^{-1}) - \alpha_3 \xi_3^2 (x_3 \xi_3^{-1} + x_1 \xi_1^{-1}) = 0,$$
$$\alpha_3 \xi_3^2 (x_2 \xi_2^{-1} + x_3 \xi_3^{-1}) - \alpha_1 \xi_1^2 (x_1 \xi_1^{-1} + x_2 \xi_2^{-1}) = 0,$$
$$\alpha_1 \xi_1^2 (x_3 \xi_3^{-1} + x_1 \xi_1^{-1}) - \alpha_2 \xi_2^2 (x_2 \xi_2^{-1} + x_3 \xi_3^{-1}) = 0.$$

Bekanntlich laufen diese drei Geraden durch einen Punkt Q. Man findet für ihn die Koordinaten $\alpha_1 \xi_1^3$, $\alpha_2 \xi_2^3$, $\alpha_3 \xi_3^3$. Demnach ist

dieser Punkt mit dem Berührungspunkte von T identisch. Daher kann man die oben gegebene Erzeugung so aussprechen[89]):

Ist $B_1 B_2 B_3$ auf einem Kegelschnitt K, *den ein veränderliches Projektionszentrum P durchläuft, die jedesmalige Projektion eines festen Polardreiecks $A_1 A_2 A_3$, und $C_1 C_2 C_3$ das Dreieck der in B_1, B_2, B_3 an* K *gelegten Tangenten, so umhüllt die Perspektivitätsachse* T *der Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ eine projektive Astroide, während der jeweilige Berührungspunkt Q auf* T *durch das Perspektivitätszentrum der Dreiecke $C_1 C_2 C_3$ und $B_1 B_2 B_3$ gegeben ist.*

87. Bezüglich der durch Gleichung (5) dargestellten Kurvenformen müssen wir, wie früher, unterscheiden, ob alle drei Fundamentalseiten reell sind, oder nur eine. Ist das erstere der Fall, so ist der Kegelschnitt K nur reell, wenn eines der α_i negativ ist. Es sind dann 4 von den 6 Spitzen, aber kein Doppelpunkt reell. Setzen wir nun etwa $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, wobei die x- und y-Achse schief zueinander sein mögen, $z = 0$ die unendlich ferne Gerade bedeutet, so ist der Kegelschnitt K auf konjugierte Durchmesser bezogen. Das Polardreieck besteht aus den beiden Achsen und der unendlich fernen Geraden, und die Konstruktion läuft darauf hinaus, daß zwischen zwei Geraden (den Achsen) zu jedem Durchmesser des Kegelschnittes eine parallele Strecke gleich der halben Länge des Durchmessers gezogen wird. Wir überlassen diese Feststellung dem Leser. Macht man die Länge gleich dem ganzen Durchmesser, wie dies A. Ameseder tat, der diese Erzeugung zuerst angab[90]), so erhält die Kurve doppelte Dimensionen. Die Gleichung dieser Kurven ergibt sich aus (24), wenn a, b die Halbachsen des zugrunde liegenden Kegelschnittes sind, als

$$(x/a)^{\frac{2}{3}} + (y/b)^{\frac{2}{3}} = 1\,, \tag{8}$$

ganz gleichgültig, welchen Winkel die gegebenen Achsen einschließen. Geht man von einer Hyperbel aus, so ist nur b^2 negativ zu nehmen.

Sind die Achsen rechtwinklig, so stellt, wie wir wohl als bekannt voraussetzen dürfen, (27) die Gleichung der Evolute eines mit dem Grundkegelschnitte ähnlichen, aber

---

[89]) G. Kober in Z. math. Unterr. **38**, 1907, 278.

[90]) Archiv Math. Phys. **64**, 1879, 177—181.

um 90° gedrehten Kegelschnittes dar[91]). Die Halbachsen des zu (8) als Evolvente gehörigen Kegelschnittes sind nämlich

$$a' = a\,b^2/(b^2 - a^2)\,, \quad b' = a^2\,b/(b^2 - a^2)\,,$$

so daß $a'/b' = b/a$ ist. Die besonderen Eigenschaften dieser Evoluten kann sich der Leser aus unserer allgemeinen Entwicklung entnehmen. Wir möchten nur darauf hinweisen, daß bei der Hyperbelevolute die Spitzen auf der y-Achse imaginär, dafür aber die unendlich fernen reell sind, so zwar, daß sich die Züge des ersten und dritten, sowie des zweiten und vierten Quadranten zu je einer Spitze mit der unendlich fernen Geraden als Tangente vereinigen.

Nimmt man als Grundkegelschnitt einen Kreis, so kommt man durch Anwendung der projektiven Konstruktion auf die reguläre Astroide und deren gewöhnliche metrische Erzeugung zurück.

Bem. Zu derselben Kegelschnittevolute gehören auch alle Parallelkurven des Kegelschnittes als Evolventen. Da der Kegelschnitt keine Richtungskurve ist, gehören die Zweige mit positiv und negativ gleichem Abstand ein und derselben Kurve an. Ihre Gleichung in Linienkoordinaten ist nach Nr. 76 leicht aufzustellen. Fig. s. *Alg. K.* S. 288.

88. Da die Evolute der Ellipse aus der regulären Astroide durch die (affine) Transformation $y_E = y_A \cdot b/a$ hervorgeht, ist die Fläche der Kurve

$$\mathfrak{F}_E = \frac{b}{a} \cdot \mathfrak{F}_A = \frac{b}{a} \cdot \frac{3}{8}\, a^2 \pi = \tfrac{3}{8}\, a\, b\, \pi\,. \tag{9}$$

Bei schiefen Achsen ist dieser Wert noch mit dem Sinus des Achsenwinkels zu multiplizieren.

Auch das Bogenelement der Kegelschnittevoluten ist durch elementare Funktionen darstellbar. Aus (8) ergibt sich

$$\frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}} dx + \frac{1}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}} dy = 0\,; \qquad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

---

[91]) Vgl. die Note des Verfassers: *Die Evoluten der Kegelschnitte*, Z. math. Unterr. **37**, 1906, 249—252. Zeichnungen dieser Evoluten z. B. bei W. Fr. Meyer, *Diff.-R.*, S. 175, Serret-Scheffers, Bd. I., S. 381.

also
$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{b^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$
$$ds = a^{-1}x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b^2 a^{\frac{2}{3}} + (a^2-b^2)x^{\frac{2}{3}}}\,dx \qquad [x = a\,t^3]$$
$$= 3\,t\sqrt{b^2 + (a^2-b^2)\,t^2}\,dt\,.$$

Hieraus erhält man

(10) $$s(a^2-b^2) = \left\{[b^2 + (a^2-b^2)\,t^2]^{\frac{3}{2}} - b^3\right\}_0^t.$$

Nimmt man hier $t = a$, so ergibt sich für einen Quadranten die Länge $(a^3 - b^3)/(a^2 - b^2)$, woraus für den Quadranten der regulären Astroide wieder $\frac{3}{2}a$ folgt.

Zusatz. 1. Die Evolute der Ellipse kann als Enveloppe eines Systems von Ellipsen $x^2/m^2 + y^2/n^2 = 1$ betrachtet werden, wenn die Halbachsen m, n der Bedingung genügen $\varphi \equiv m/a + n/b - 1 = 0$. Setzt man $x = m\cos u$, $y = n\sin u$, so hat man nach dem Czuberschen Verfahren[92] die Funktionaldeterminante zu bilden $\frac{\partial(x, y, \varphi)}{\partial(u, m, n)} = 0$. Dies ergibt
$$\begin{vmatrix} -m\sin u & n\cos u & 0 \\ \cos u & 0 & 1/a \\ 0 & \sin u & 1/b \end{vmatrix} \equiv \frac{m}{a}\sin^2 u - \frac{n}{b}\cos^2 u = 0\,.$$

Also kann man setzen $\sin^2 u = \vartheta \cdot n/b$, $\cos^2 u = \vartheta \cdot m/a$, $\vartheta = m/a + n/b = 1$. Hieraus folgt $x = m^{\frac{3}{2}}/a^{\frac{1}{2}}$, $y = n^{\frac{3}{2}}/b^{\frac{1}{2}}$ oder $m = x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}$, $n = y^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. Setzt man diese Werte in die Bedingungsgleichung, so erhält man in der Tat $(x/a)^{\frac{2}{3}} + (y/b)^{\frac{2}{3}} = 1$. Die reguläre Astroide ist demnach die Einhüllende eines Systems von konzentrischen, koaxialen Ellipsen bei konstanter Summe a der Halbachsen[93]). Der ganze Satz ist aber in einem viel allgemeineren über symmetrische Dreieckskurven enthalten (Nr. 256, Zus.).

2. Es ist nicht schwer zu beweisen, daß die Diakaustik einer Geraden die Evolute einer Ellipse ist, die den leuchtenden Punkt und dessen Spiegelpunkt zu Brennpunkten hat (Salmon Fiedler, *Höh. K.*, S. 126/7).

89. Wir haben noch ein Wort zu sagen über den Fall, daß zwei der Seiten des Fundamentaldreiecks in Gleichung (24*) konjugiert imaginär sind. Sei etwa
$$x_1 = \mathfrak{x}_1 + i\,\mathfrak{x}_2\,, \quad x_2 = \mathfrak{x}_1 - i\,\mathfrak{x}_2\,, \quad x_3 = \mathfrak{x}_3\,,$$

---

[92]) Arch. Math. Phys. (3) **2**, 1902, 113—122; *Alg. K.* S. 49—52.
[93]) Desgranges, Nouv. Ann. Math. (1) **20**, 1861, 351.

dann muß, wenn die Kurve reell sein soll, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ $(\alpha_3 = \beta)$ sein und es lautet ihre Gleichung

$$(11) \quad \mathsf{B} \equiv [2\alpha(x_1^2 - x_2^2) + \beta x_3^2]^3 - 27\alpha^2\beta(x_1^2 + x_2^2)^2 x_3^2 = 0.$$

In diesem Falle sind nur zwei Spitzen reell (auf $x_3 = 0$), aber auch zwei Doppelpunkte (auf $x_2 = 0$, wenn $\alpha > 0$, $\beta > 0$; auf $x_1 = 0$, wenn $\alpha > 0$, $\beta < 0$), wie man aus (7*) ersieht.

Um eine typische Form zu erhalten, setzen wir etwa $x_1 = 1$, $x_2 = y$, $x_3 = x$ für rechtwinklige Koordinaten, $\beta = 2\alpha$. Dann bekommen wir aus (11) die Kurve

$$(12) \quad \mathsf{C} \equiv 4(x^2 - y^2 + 1)^3 - 27(1 + y^2)^2 x^2 = 0\,.$$

Diese Kurve C hat auf der y-Achse zwei Spitzen mit der Achse als Tangente und den Ordinaten $y = \pm 1$; auf der x-Achse zwei Doppelpunkte mit den Abszissen $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ und zwei einfache imaginäre Schnittpunkte $(x = \pm 2i)$, außerdem auf der unendlich fernen Geraden zwei imaginäre Doppelpunkte $\left(y = \pm i x \sqrt{2}\right)$ und noch zwei reelle Punkte mit den Asymptoten $y = \pm\frac{1}{2}x$. Die beiden übrigen Spitzenpaare liegen auf den Geraden $y = \pm i$ und sind natürlich imaginär. Die Kurve B ist eine reelle Projektion der durch Fig. 62 wiedergegebenen Kurve C. Besonders benannte Kurven gehören nicht zu dieser Gattung, die überhaupt noch nicht näher untersucht erscheint.

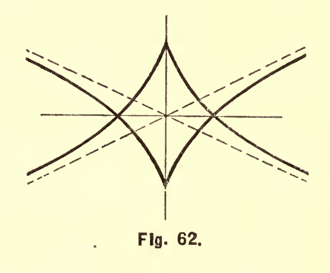


Fig. 62.

§ 18. Die Kardioide und mit ihr zusammenhängende Kurven (Sinusspiralen).

90. Nach dem Exkurs auf die zur regulären Astroide projektiven Kurven wollen wir die Umkehrung der elliptischen Bewegung betrachten. Wir geben dann in der festen Ebene $\varDelta$ zwei Punkte P, Q und lassen durch diese zwei feste Gerade G und Γ von $\varDelta'$ schleifen. Ist deren Schnittpunkt O, ihr Neigungswinkel ω (vgl. Fig. 63), so ist der Kreis POQ (Mittelpunkt O') fest und zugleich der

Ort des Momentanzentrums M, des Gegenpunktes von O, in der festen Ebene. Wie bei der Astroide findet man sodann als bewegliche Polbahn den Kreis um O mit OM als Radius, so daß also die Bewegung ersetzt werden kann durch das Abrollen eines Kreises mit der Innenseite auf

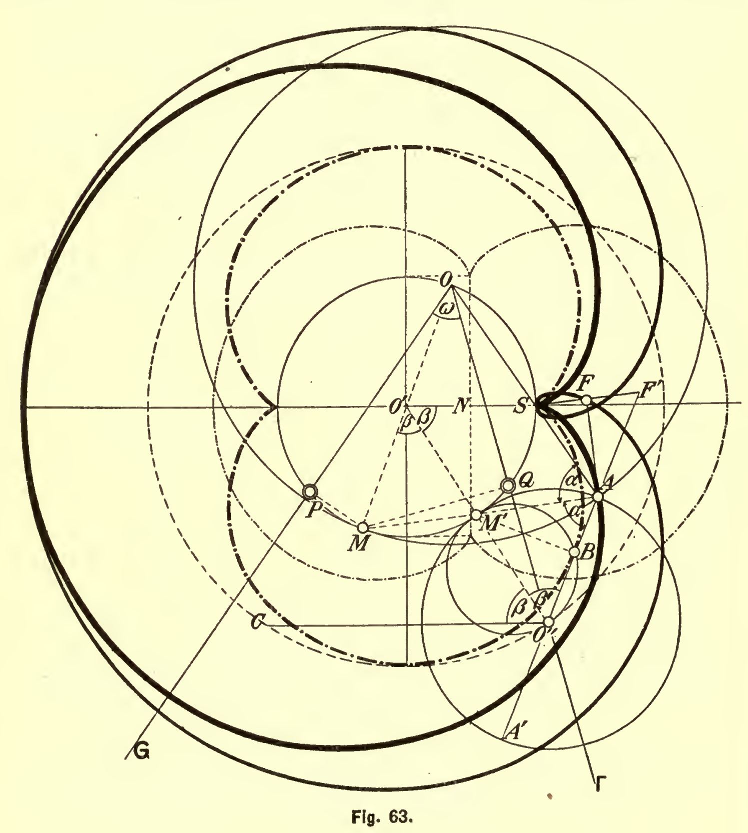


Fig. 63.

einem Kreise vom halben Radius. Es sind das die Polbahnen, die wir bei Erzeugung der Pascalschen Schnecken fanden. Nehmen wir in der Tat auf dem Kreise (O) einen beliebigen Punkt A, so schneidet OA den Kreis (O') in S, dem Punkte, auf welchen A beim Abrollen einmal zu liegen kommt. Lassen wir nun den Kreis (O) rollen, so bleibt S

wegen der Konstanz des Winkels (POA) auf dem Kreise (O') fest und OA ist immer gleich OM. Daher beschreibt A gemäß der konchoidalen Erzeugungsweise eine Kardioide, jeder andere Punkt der Geraden OA eine Pascalsche Schnecke.

Die Frage nach der Einhüllenden irgend einer Geraden der Ebene beantwortet sich im Anschluß hieran leicht. Jede Gerade OA durch O hüllt einen Punkt S des festen Kreises ein (MS ist immer $\perp OA$), jede Parallele zu OA umhüllt demnach einen Kreis um S, da ihr Berührungspunkt auf MS liegt (vgl. Zus. 2 in Nr. 59). Alle Geraden der Ebene erzeugen also bei der »kardioidischen Bewegung«, wie man die betrachtete oft nennt, Kreise, bzw. Punkte, wenn sie durch O gehen.

91. Der Kardioide wollen wir, wie in Nr. 60 angekündigt, noch etwas näher treten. Nehmen wir $O'S$ als Polarachse, S als Pol, so ist die Gleichung der Kardioide bei der angenommenen Lage

(1) $$\varrho = 2r - 2r\cos\theta = 4r\sin^2\tfrac{1}{2}\theta .$$

Hieraus ergibt sich $ds = 4r\sin\frac{1}{2}\theta\, d\theta$, also

(2) $$s = -8r\cos\tfrac{1}{2}\theta ,$$

wenn man die Bogen von dem der Spitze entgegengesetzten Punkte der Kurve aus zählt. Die Gesamtlänge der Kardioide ist also $16r$ [94]).

Für den Krümmungsradius erhält man

(3) $$\mathcal{R} = \tfrac{8}{3}r\sin\tfrac{1}{2}\theta ,$$

so daß wir die natürliche Gleichung der Kardioide in der Form bekommen

(4) $$9\mathcal{R}^2 + s^2 = (8r)^2 .$$

Wir merken einstweilen an, daß diese an die Ellipsengleichung erinnernde Gleichungsform allen Zykloidalen eigentümlich ist (vgl. die Gleichung der Astroide (9) in Nr. 80).

Zusatz. Aus Gleichung (4) erhält man durch Differenzieren $\mathcal{R}\,d\mathcal{R}/ds = -\frac{1}{9}s$. Daher ist für die Evolute nach Nr. 81 (10) $\mathcal{R}_1 = -\frac{1}{9}s$, $s_1 = \mathcal{R}$ und durch Substitution in (4) ergibt sich die Gleichung
$$9\mathcal{R}_1^2 + s_1^2 = (\tfrac{8}{3}r)^2 .$$

---

[94]) Zuerst gefunden von DE LA HIRE in d. Abh. *Des conchoïdes en général*, Mém. Ac. Sc. 1708, Paris 1730, 32—60.

Also ist die Evolute der Kardioide eine Kardioide von $\frac{1}{3}$ der Dimensionen der Grundkurve. Und damit ist der Satz: „*Die Katakaustik des Kreises für einen leuchtenden Punkt der Peripherie ist eine Kardioide*" bewiesen (vgl. Nr. 66, Zus. 2).

92. Für den Winkel μ zwischen Tangente und Radiusvektor ergibt sich $\operatorname{tg}\mu = \varrho/\varrho' = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$, also $\mu = \frac{1}{2}\theta$. Ferner ist die Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvektor gleich $\mathcal{R}\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{8}{3}r\sin^2\frac{1}{2}\theta = \frac{2}{3}\varrho$. Diese beiden Sätze erinnern an ähnliche bei der Bernoullischen Lemniskate (Nr. 13). Wir sagten dort, solche Sätze seien für Sinusspiralen charakteristisch. Da wir nun schon zwei Beispiele haben, wollen wir die allgemeine Gleichung der Sinusspiralen und die Verallgemeinerung der eben erwähnten Eigenschaften angeben. Die Sinusspirale[95]) vom Index n ist definiert durch die Polargleichung

$$(5) \quad \varrho = a\sin^{\frac{1}{n}} n\theta \qquad \left[= a\cos^{\frac{1}{n}} n\tilde{\omega}, \quad \text{wo} \quad \tilde{\omega} = \frac{\pi}{2n} - \theta\right].$$

Für die Bernoullische Lemniskate ist demnach der Index $n = 2$, für die Kardioide $n = \frac{1}{2}$. Allgemein hat man nun $\varrho' = a\sin^{\frac{1}{n}-1} n\theta\cos n\theta$, folglich $\varrho/\varrho' = \operatorname{tg} n\theta$ oder

$$(6) \qquad \mu = n\theta.$$

Dreht sich also der Radiusvektor gleichförmig um den Pol, so dreht sich die Tangente (oder Normale) mit n-facher Geschwindigkeit gleichförmig um den Berührungspunkt.

Für den Krümmungsradius erhält man durch leichte Rechnung

$$(7) \qquad \mathcal{R} = \frac{1}{n+1}a\sin^{\frac{1}{n}-1} n\theta.$$

Projiziert man nun den Krümmungsradius auf den Radiusvektor, bildet also $\mathcal{R}_p = \mathcal{R}\sin\mu = \mathcal{R}\sin n\theta$, so ergibt sich ohne weiteres

$$(8) \qquad \mathcal{R}_p : \varrho = 1 : (n+1),$$

d. h. *die Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvektor steht zu diesem in konstantem Verhältnis.*

---

[95]) So genannt wurden die Kurven von Hâton de la Goupillière, Nouv. Ann. math. (2) **15**, 1876, 97. Doch wurden die Kurven schon von Maclaurin betrachtet.

93. Wir wollen noch eine kleine Weile mit den Sinusspiralen uns beschäftigen, um einige weitere ganz nahe liegende Eigenschaften zu behandeln. Zunächst werde die natürliche Gleichung in ihrer allgemeinen Form aufgestellt. Da $ds = a \sin^{\frac{1}{n}-1} n\theta\, d\theta$ ist, so hat man noch $d\theta$ durch $\mathcal{R}$ und $d\mathcal{R}$ auszudrücken, um schließlich die gewünschte Gleichung zu erhalten

$$(9) \qquad s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\mathcal{R}}{\sqrt{\left(\frac{n+1}{a}\mathcal{R}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}} .$$

Der Leser möge sich selbst überzeugen, daß für $n = 2$ bzw. $n = \frac{1}{2}$ hieraus die angegebenen Gleichungen für die Bernoullische Lemniskate und die Kardioide folgen.

Invertiert man eine Sinusspirale in bezug auf ihren Pol, so kann man das Resultat schreiben

$$(10) \qquad \varrho = a \cos^{-\frac{1}{n}} (-n\, \tilde{\omega}) .$$

Die Inverse ist demnach eine Sinusspirale mit dem negativen Index der ursprünglichen. Wir kennen die Inversen der Lemniskate und der Kardioide. Die erstere ist eine gleichseitige Hyperbel, die zweite eine Parabel. Diese beiden Linien sind demnach Sinusspiralen mit dem Mittelpunkt bzw. dem Brennpunkt als Pol und den Indizes $n = -2$, bzw. $n = -\frac{1}{2}$. Daraus ergeben sich die natürlichen Gleichungen für die gleichseitige Hyperbel und die Parabel in der Form

$$(11) \qquad s = \frac{1}{3} \int \frac{d\mathcal{R}}{\sqrt{(\mathcal{R}/a)^{\frac{4}{3}} - 1}} , \qquad s = \frac{1}{3} \int \frac{d\mathcal{R}}{\sqrt{(\mathcal{R}/p)^{\frac{2}{3}} - 1}} ,$$

wo bei der Parabel $2a = p$ gesetzt wurde.

Der Leser wird auch gleich bemerken, daß für die Indizes 1 und -1 der Kreis und die Gerade mit den Gleichungen $\varrho = a \sin\theta$ und $\varrho \sin\theta = a$ als Sinusspiralen auftreten.

94. Aber wir haben noch eine andere interessante Sinusspirale bereits kennen gelernt, das ist die Tschirnhausensche Kubik, deren Gleichung lautet [Nr. 34 (9)]

$$\varrho = a \cos^{-3} \tfrac{1}{3} \theta \,. \tag{12}$$

Sie entspricht daher dem Index $n = -\frac{1}{3}$. Eine neue Kurve ergibt sich, wenn wir zur Tschirnhausenschen Kubik die Inverse bestimmen. Diese hat dann die Gleichung

$$\varrho = a \cos^3 \tfrac{1}{3} \theta \tag{13}$$

oder in Punktkoordinaten

$$[4(x^2 + y^2) - a\,x]^3 = 27\, a^2 (x^2 + y^2)^2 \,. \tag{14}$$

Es ist dies also eine Potenzkurve 6. Ordnung. Sie wurde von Archibald »Cayley-Sextik« genannt, welchen Namen wir beibehalten wollen[96]). Setzt man $x + i\,y = \xi$, $x - i\,y = \eta$ und führt eine dritte Variable ζ ein, so lautet die Gleichung

$$[4\,\xi\,\eta - \tfrac{1}{2} a\,\xi\,\zeta - \tfrac{1}{2} a\,\eta\,\zeta]^3 = 27\, a^2\, \xi^2\, \eta^2\, \zeta^2 \,. \tag{14*}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß der Anfangspunkt und die beiden imaginären Kreispunkte ganz dieselbe Rolle auf der Kurve spielen. Sie sind nämlich alle dreifache Punkte und zwar solche, für die die drei Tangenten koinzidieren (Spitzpunkte). Denn die Tangenten jedes auf der Kurve liegenden Punktes sind immer durch die niedrigsten Glieder in den beiden in Frage kommenden Variabeln gegeben. So findet man hier $(\xi + \eta)^3 \equiv x^3$, $(4\,\xi - a\,\zeta)^3$, $(4\,\eta - a\,\zeta)^3$ als Tangententripel. Außerdem hat die Kurve auf der x-Achse noch einen Doppelpunkt für $x = a$ (s. Fig. 63). Da ein Spitzpunkt für zwei Spitzen und einen Doppelpunkt zählt, ist die Klasse der Cayley-Sextik $\nu = 6 \cdot 5 - 6 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 4$.

95. Der Leser mag aber wohl schon einige Zeit denken, wir entfernten uns allzuweit von der Kardioide. Es wird

---

[96]) Weil Cayley sich mit ihr viel beschäftigte in seinen Arbeiten über Kaustiken, bes. Phil. Trans. **157**, 1867, 7—16 = Coll. Pap. **5**, 454—464. S. die sehr lesenswerte Diss. von R. C. Archibald *„The Cardioide and some of its related curves“* Straßburg (J. Singer) 1900. Dort ist eine Fülle von Beziehungen der bekanntesten Kubiken und Quartiken untereinander angegeben, mit reichen bibliographischen Noten.

sich aber sofort herausstellen, daß dies nicht der Fall ist. Wir müssen uns zuvor nur noch die Fußpunktskurven der Sinusspiralen, in bezug auf den Pol O natürlich, etwas näher ansehen. Nennen wir die Polarkoordinaten für den Fußpunkt Q eines Lotes auf die Tangente eines Kurvenpunktes P $\mathring{\varrho}$ und $\tilde{\omega}$ (Fig. 64), so ist $\mathring{\varrho} = \varrho \sin n\,\theta$ und $\tilde{\omega} = (n+1)\,\theta - \frac{1}{2}\pi$; daher $n\,\theta = \frac{n}{n+1}(\tilde{\omega} + \frac{1}{2}\pi)$ und da für P $\varrho \sin n\,\theta$ gemäß (5) gleich $a \sin^{\frac{n+1}{n}}(n\,\theta)$ wird, schließlich, wenn man noch $\tilde{\omega} + \frac{1}{2}\pi = \mathring{\omega}$ setzt, die Gleichung der Fußpunktskurve

$$(15)\qquad \mathring{\varrho} = a \sin^{\frac{n+1}{n}}\left(\frac{n}{n+1}\,\mathring{\omega}\right).$$

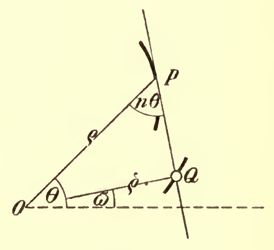


Fig. 64.

Daher der Satz: *Die Fußpunktskurve des Poles einer Sinusspirale vom Index n ist eine Sinusspirale vom Index $n/(n+1)$.*

Setzt man $n/(n+1) = \nu$, so ist $n = \nu/(1-\nu)$ der Index der ersten negativen Fußpunktskurve. Gehen wir also vom Kreise mit dem Index 1 aus, so erhalten wir folgende Reihe von Indizes für die sukzessiven Fußpunktskurven des Kreises in bezug auf einen Punkt seiner Peripherie

(16)

...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	...
...	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	−1	∞	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...

Diese Reihe setzt mit einem Schlage alle unsere bisherigen Betrachtungen zur Kardioide in Beziehung. Allerdings sehen wir, daß wir als Ausgangspunkt besser den Index ∞, den wir dem Punkte zuweisen müssen, genommen hätten. Dann lautet die Reihe folgendermaßen

(17)

...	Tschirnh. Kubik	Parabel	Gerade	Punkt	Kreis	Kardioide	Cayley-Sextik	...

Die Cayley-Sextik ist demnach die (erste positive) Fußpunktskurve der Kardioide in bezug auf die Spitze, die Tschirnhausensche Kubik die fünfte negative Fußpunktskurve. Zueinander invers sind überhaupt immer

zwei von der Mitte gleichweit abstehende Kurven der Reihe (17). Die Reihe gibt außerdem ein hübsches Beispiel für eine alternierende Folge von Richtungskurven und Kurven erster Kategorie. Die Tschirnhausensche Kubik und die CAYLEY-Sextik sind Richtungskurven (mit zerfallender Parallelkurve), ebenso Gerade und Kreis; die Parabel und die Kardioide sind erster Kategorie (mit zerfallender Konchoide). Da die Fußpunktskurve die Inverse der Polarreziproken ist, haben wir den weiteren Satz: *Die Polarreziproke der Kardioide in bezug auf einen Kreis um die Spitze ist eine Tschirnhausensche Kubik.* Wir überlassen es dem Leser, diesen Satz direkt zu bestätigen.

96. Des weiteren wollen wir nun eine zweite Erzeugung der Kardioide mittels zweier rollenden Kreise aus der ersten herleiten. Diese wird uns mit Leichtigkeit auf eine andere mit der Kardioide in engem Zusammenhang stehende Kurve führen. Zwar wird diese zweite Erzeugung sich bald als eine ganz allgemeine Eigenschaft der Zykloidalen ergeben, aber wir bitten den Leser überhaupt, diesen Abschnitt als Vorbereitung und Entlastung des folgenden nehmen zu wollen. Verbinden wir nun in Fig. 63 den erzeugenden Punkt A mit M, so schneidet diese Gerade (die Normale zur Kardioide ist) den Grundkreis in einem weiteren Punkte M', dem Mittelpunkte von MA. Der Kreis (O'') nun, der den Grundkreis in M' berührt und denselben Radius hat wie dieser, geht, da $OO'O''A$ ein Parallelogramm ist, durch A. Die Kardioide kann demnach auch durch das Rollen eines Kreises auf einem gleichgroßen erzeugt werden.

Nach dieser Feststellung betrachten wir S als leuchtenden Punkt und suchen die Katakaustik der Kardioide in bezug auf die Spitze. Ist SA der leuchtende Strahl, $\sphericalangle SAM = \alpha$ der Einfallswinkel, so geht der reflektierte Strahl, da $\triangle O'MM' \cong \triangle O''AM'$, durch O'' und ist also immer mit dem Durchmesser AA' des rollenden Kreises O'' identisch. Da sein Berührungspunkt B mit der Enveloppe, der gesuchten Katakaustik, durch das Lot von M' aus ausgeschnitten wird und demnach immer auf dem Kreis über $M'O''$ als Durchmesser liegt, so finden wir, daß B eine Kurve (Epizykloide) beschreibt, die entsteht, wenn auf einem Kreis (O') ein Kreis von den halben Dimensionen

außen rollt. Diese Kurve ist also die gesuchte Katakaustik. Sie hat offenbar zwei reelle Spitzen in S und dem Gegenpunkt von S auf (O'). Wir nennen sie mit PROCTOR[97]) wegen ihrer Gestalt »Nephroide« (ὁ νεφρός = die Niere), wenngleich dieser Name auch gelegentlich anders verwendet wurde. Die Gleichung der Kurve werden wir nachher aufstellen. Hier müssen wir zunächst noch folgende Bemerkungen machen.

97. Zieht man durch O'' eine Parallele CO'' zur Achse der Kardioide, so ist der $\sphericalangle \beta$, den sie mit $O'O''$ bildet, so groß wie $\sphericalangle SO'O''$, also auch gleich $\sphericalangle M'O'M$ und $\sphericalangle O'O''A$. Beschreibt man also um O' mit $O'O'' = 2r$ als Radius einen Kreis, so ist, wenn man CO'' als Lichtstrahl betrachtet, $O''A$, d. i. der die Nephroide einhüllende Durchmesser des Kreises (O''), der zurückgeworfene Strahl. *Die Nephroide ist daher auch die Katakaustik eines Kreises für parallel eintretende Srahlen.* Diese Tatsache kann man in jeder Kaffeetasse beobachten.

Aber auch mit der CAYLEY-Sextik ist die Nephroide aufs engste verwandt. Denn verlängern wir $A'A$ bis zu dem Punkte F', in welchem das von S auf die Kardioidentangente in A gefällte Lot trifft, so ist, wenn F der Fußpunkt des Lotes ist, $SF = FF'$. F beschreibt aber die CAYLEY-Sextik, also F' eine doppelt so große. Die Normale in F an die CAYLEY-Sextik ist aber nach einem früheren Satze (Nr. 66, Zus. 1) die zweite Diagonale des durch S, F, A bestimmten Rechtecks. Daher ist $F'A$ die Normale der doppelt so großen Sextik in F'. Da nun diese eine Nephroide berührt, so sehen wir, *daß die Cayley-Sextik eine Nephroide zur Evolute hat*, d. h. zu den Evolventen der Nephroide gehört.

98. Nun ist aber die Bewegung der Normale $M'B$ an die Nephroide um den Punkt M' eine gleichförmige Drehung mit derselben Geschwindigkeit, wie sie der Radius $O'M'$ hat; das ist dieselbe Bewegung, wie die des Durchmessers $A'A$. Auch $M'B$ wird daher eine Nephroide einhüllen; d. h. *die Evolute der Nephroide ist wieder eine solche von den halben Dimensionen der ursprünglichen* (in Fig. 63 nicht gezeichnet). Man erkennt auch ohne

---

[97]) PROCTOR, *A treatise on the cycloid etc.*, London 1878.

weiteres, daß die beiden Nephroiden um 90^0 gegeneinander gedreht sind. *Die Cayley-Sextik ist also auch eine Parallelkurve der Nephroide.* Und zwar liegt hier die Sache folgendermaßen. Diejenige Nephroide, die zu der von F beschriebenen, in der Fig. 63 gezeichneten Cayley-Sextik als Evolute gehört, ist zu der von AA' umhüllten homothetisch in bezug auf S und von den halben Dimensionen, hat also ihre beiden Spitzen in S und O', ihren Mittelpunkt in N, dem Mittelpunkt von SO'. Die Evolvente dieser nicht gezeichneten Nephroide hat denselben Mittelpunkt N, dieselben Dimensionen wie die von AA' eingehüllte, hat aber ihre Scheitel auf der Achse der Kardioide, in der Entfernung $\frac{3}{2}r$ von N, wenn r der Radius des Grundkreises ist. Zu dieser (gestrichelt gezeichneten) Nephroide ist unsere Cayley-Sextik parallel in der Entfernung $\frac{3}{2}r$. Zeichnet sich der Leser eine etwas nähere Parallelkurve (am besten geschieht dies durch eine sehr enge Folge kongruenter Kreise mit den Mittelpunkten auf der Grundkurve), so wird er selbst bemerken, wie der Spitzpunkt S aus zwei Spitzen und einem Doppelpunkt entsteht. Natürlich besteht die ganze Parallelkurve der Nephroide immer aus zwei Kurven, die im Abstande $\frac{3}{2}r$ zu Cayley-Sextiken werden. Daß diese Sextik eine Richtungskurve ist, erscheint hiernach selbstverständlich, da sie selbst eine Parallelkurve ist (Nr. 78).

99. Nun müssen wir aber auch die Gleichung der Nephroide aufstellen und ihre Charaktere als algebraische Kurve bestimmen. Man erhält für die Koordinaten des Punktes B (y positiv gerechnet) leicht die Werte

(18) $$x = 3r\cos\beta - 2r\cos^3\beta\,, \qquad y = 2r\sin^3\beta\,.$$

Eliminiert man aus dieser Parameterdarstellung β, so ergibt sich die Gleichung 6. Ordnung

(19) $$4(x^2 + y^2 - r^2)^3 = 27r^4y^2\,.$$

Diese zeigt schon durch ihre Form ($\mathsf{K}^3 = \mu y^2 z^4$), daß in den imaginären Kreispunkten ($\mathsf{K} = 0$, $z = 0$) Spitzpunkte, in den beiden auf der x-Achse liegenden Punkten des Grundkreises Spitzen mit $y = 0$ als Tangente sind. Setzt man in (19) $x = 0$ und scheidet den selbstverständlichen Faktor $(y^2 - 4r^2)$ ab, so findet man noch zwei Doppel-

wurzeln $y = \pm i r \sqrt{\frac{1}{2}}$, die konjugiert imaginären Doppelpunkten entsprechen. So ergibt sich die Klasse der Nephroide als $6 \cdot 5 - 6 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 4$.

Wir bestätigen diese Zahl durch Aufstellung der Gleichung in Linienkoordinaten. Drückt man die Abschnitte, die der verlängerte Durchmesser AA' auf den Achsen macht, durch r und β aus, so erhält man zunächst die Parameterdarstellung

$$(20) \qquad 2ru = -\sin 2\beta / \sin\beta, \qquad 2rv = \cos 2\beta / \sin\beta,$$

und hieraus die Gleichung

$$(21) \qquad 4r^4 v^2(u^2+v^2) = [2r^2(u^2+v^2) - 1]^2.$$

Diese bestätigt wirklich einerseits die Klassenzahl und zeigt andererseits durch ihre Form an, daß die Nephroide Richtungskurve ist. Setzt man rechts statt 1 den Wert $1 + c\sqrt{u^2+v^2}$ und radiziert auf beiden Seiten, so erhält man schließlich die Parallelkurven in der Form

$$(22) \quad 2(r^2 v \pm c)^2 (u^2+v^2) = [(2r^2 - c^2)(u^2+v^2) - 1]^2.$$

Hieraus entsteht für $c = \frac{3}{2} r$ die Liniengleichung der Cayley-Sextik

$$(23) \qquad r^2(2rv \pm 3)^2 (u^2+v^2) = [r^2(u^2+v^2) + 1]^2.$$

Wir stellten schon oben fest, daß auch für sie die Klasse 4 sei.

Aus der Darstellung (18) erhält man $ds = 3r\sin\beta$, mithin

$$(24) \qquad s = -3r\cos\beta \quad \text{und} \quad \mathcal{R} = \tfrac{3}{2} r \sin\beta.$$

Hieraus bekommt man einerseits für die Gesamtlänge der Nephroide $12r$, andererseits die natürliche Gleichung

$$(25) \qquad 4\mathcal{R}^2 + s^2 = (3r)^2,$$

wieder die für Zykloidalen charakteristische Form. Die Bogen sind hierbei immer von einem Scheitel aus gezählt. Die Evolute, die wir oben geometrisch bestimmten, mag hier der Leser aus (25) selbst ableiten. Da die Drehung der Tangente bei Erzeugung der ganzen Nephroide 4π beträgt, ergibt sich nach Formel (12) in Nr. 81 für die Gesamtlänge der Cayley-Sextik $12r + 6r\pi$.

Auch die Fläche der Nephroide ist sehr einfach zu bestimmen. Man hat

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(x\,dy - y\,dx) = 3r^2\int_0^{2\pi}\sin^2\beta\,d\beta = \frac{3}{2}r^2\Big\{\beta - \frac{1}{2}\sin 2\beta\Big\}_0^{2\pi},$$

also $\mathcal{F} = 3r^2\pi$. Demnach ist jedes der über dem Grundkreis stehenden Möndchen an Fläche diesem gleich.

Zusatz. Ohne Beweis führen wir noch folgende leicht zu erhärtende Sätze an: *Die Fußpunktskurve der Kardioide in bezug auf den Mittelpunkt des Grundkreises ist die* (in Nr. 84 erwähnte) *Rosenkurve für* $\mu = \frac{1}{3}$, *die Polarreziproke also in bezug auf einen Kreis um denselben Punkt eine Maclaurinsche Trisektrix.*

§ 19. Die Steinersche Kurve (dreispitzige Hypozykloide).

100. Die Kardioide, deren Betrachtung wir eben abschlossen, ist eine Kurve 4. Ordnung und 3. Klasse, wie wir schon früher (Nr. 58) feststellten. Sie hat drei Spitzen, von denen zwei in den imaginären Kreispunkten liegen und eine Doppeltangente mit reellen Berührungspunkten. Wir möchten nun auch hier, wie bei der Astroide, wenn auch nicht die ganze Klasse aller zur Kardioide projektiven Kurve, so doch eine einzelne höchst merkwürdige C_4^3 näher betrachten, die aus der Kardioide durch eine imaginäre Projektivität entsteht, die »Steinersche Kurve«[98]). Wollen wir diese erhalten, so müssen wir die Doppeltangente der Kardioide ins Unendliche legen, aber so, daß die Berührungspunkte in die imaginären Kreispunkte fallen; dann werden von selbst die imaginären Kreispunkte der Kardioidenebene im Endlichen als zwei Spitzen der neuen Kurve erscheinen.

Ohne daß wir diese Transformation ausführen wollten, die uns doch nichts über die metrischen Eigenschaften der neuen Kurve sagen könnte, gehen wir von einer Enveloppenkonstruktion aus, die die wichtigsten Eigenschaften leicht abzuleiten gestattet und sich ohne weiteres auf eine uns schon geläufige kinematische Erzeugung zurückführen läßt. Es sei ein Kreis vom Radius $OS = r$ gegeben. Von einem Punkte S ausgehend, lassen wir auf

[98]) J. Steiner, J. f. Math. **53**, 1856, S. 231 ff.

der Peripherie zwei Punkte X, Y in entgegengesetzter Richtung, so laufen (Fig. 65), daß Y die doppelte Geschwindigkeit hat wie X. Die Enveloppe von XY wollen wir bestimmen. Setzen wir $\sphericalangle XOS = \alpha$, so ist $\sphericalangle SOY = 2\alpha$. Die Anfangslage der erzeugenden Ge-

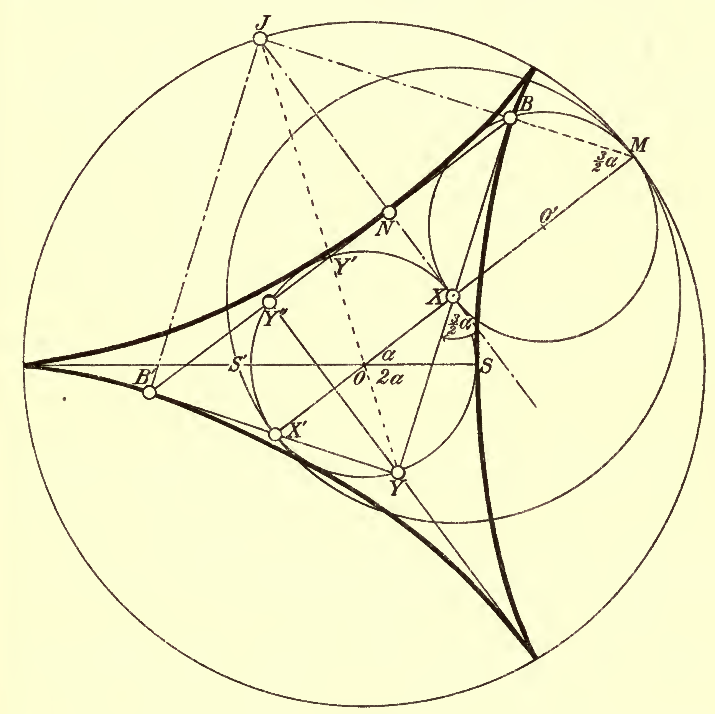


Fig. 65.

raden ist offenbar die Kreistangente in S. Die Gerade XY bildet mit der Tangente in X an den Kreis den Winkel $\frac{3}{2}\alpha$. Wir können daher die Bewegung auch so auffassen: Ein Punkt X läuft auf dem Kreise mit einer Winkelgeschwindigkeit w; um ihn dreht sich eine Gerade mit der relativen Winkelgeschwindigkeit $\frac{3}{2}w$[99]) und

[99]) Die absolute Winkelgeschwindigkeit der Geraden ist $-\frac{1}{2}w$; d. h. wenn X um α fortschreitet, bildet die neue Lage von XY mit der alten den Winkel $\frac{1}{2}\alpha$.

zwar im entgegengesetzten Sinne. Wenn wir nun an die Erzeugung der Nephroide im vorigen Kapitel uns erinnern (auch an die der regulären Astroide), so werden wir hieraus den Schluß ziehen, daß wir die Gerade als Durchmesser eines Kreises um X betrachten dürfen, der auf einem anderen Kreise von $\frac{3}{2}$-fachem Radius, und zwar hier — wegen der entgegengesetzten Drehrichtung — innen, rollt. Dann muß aber $OX = r$ der dritte Teil des Radius des festen Kreises OM sein. XM ist der Radius des rollenden Kreises, M ist das Momentanzentrum; das Lot von M auf XY gibt den Berührungspunkt B, und wir wissen nun schon, daß dieselbe Kurve punktweise durch Rollen des um O' über $XM = 2r$ als Durchmesser beschriebenen Kreises im Innern des Kreises mit $OM = 3r$ als Radius erzeugt wird. Da der kleine Kreis auf dem großen dreimal abrollt, so werden wir unschwer zu der Folgerung gelangen, daß die so erzeugte Kurve in den Punkten $\varrho = 3r$, $\theta = \frac{1}{3}\pi$, π, $-\frac{1}{3}\pi$ Spitzen hat und gegen die drei entsprechenden Radien symmetrisch ist[100]. Die Punkte $\varrho = r$, $\theta = 0$, $\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{2}{3}\pi$ sind Scheitel der Kurve. In ihnen treffen sich die erzeugenden Punkte X und Y.

Bem. Denselben Gedankengang benutze der Leser, um direkt zu zeigen, daß die Katakaustik eines Kreises für einen Punkt auf dem Kreise eine Kardioide ist (Nr. 91, Zus.); ferner versuche er auf demselben Wege zu zeigen, daß die Einhüllende des zweimal reflektierten von einem Punkte des Kreises ausgehenden Strahles (die zweite Katakaustik) eine Nephroide ist.

101. Da $XY = 2r \sin\frac{3}{2}\alpha$ und $\sphericalangle XMB = \frac{3}{2}\alpha$, so ersieht man, daß immer $YX = XB$. Man erhält hieraus für die Koordinaten von B die Werte $x = r\cos\alpha + 2r\sin\frac{3}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha$, $y = r\sin\alpha + 2r\sin\frac{3}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$, die man besser in der Form schreibt

$$(1)\quad x = 2r\cos\alpha - r\cos 2\alpha\,, \qquad y = 2r\sin\alpha + r\sin 2\alpha\,.$$

Die Elimination von α ergibt die Gleichung in Punktkoordinaten

$$(2)\quad (x^2+y^2)^2 + 8rx(x^2-3y^2) + 18r^2(x^2+y^2) - 27r^4 = 0\,.$$

[100]) Daß die Kurve eine Hypozykloide ist, bemerkte L. Schläfli. S. den von J. H. Graf herausgeg. Briefwechsel zwischen Steiner und Schläfli (Bern 1896) S. 206/8. Steiner betrachtete sie nur als C_4^3.

Diese läßt sich in die übersichtlichere Form bringen

$$(2^*) \quad (x^2 + y^2 - 12rx + 9r^2)^2 + 4r(2x - 3r)^3 = 0.$$

Hier stellt die erste Klammer einen durch die beiden Spitzen im ersten und vierten Quadranten gehenden Kreis vom Radius $6r$ dar, die zweite die Gerade der beiden Spitzen. Die Form von (2*) zeigt an, daß die Kurve in den Schnittpunkten von Kreis und Gerade Spitzen hat und daß die Spitzentangenten Tangenten des Kreises sind.

Die Koordinaten der zur Tangente XY symmetrischen sind

$$(3) \qquad -\frac{1}{u} = \frac{r\cos\frac{3}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha}, \qquad -\frac{1}{v} = \frac{r\cos\frac{3}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

die Gleichung dieser Tangente also

$$(4) \qquad x\cos\tfrac{1}{2}\alpha + y\sin\tfrac{1}{2}\alpha = r\cos\tfrac{3}{2}\alpha\,.$$

Eliminiert man aus (3) den Winkel α, so ergibt sich die Gleichung in Linienkoordinaten

$$(5) \qquad u^2 + v^2 = rv(3u^2 - v^2)\,.$$

Aus dieser sieht man am besten, daß die imaginären Kreispunkte ($u^2 + v^2 = 0$) auf der unendlich fernen Geraden Berührungspunkte sind.

Bem. Gleichung (5) zeigt auch sofort, daß die Steinersche Kurve keine Richtungskurve ist. Ihre Parallelkurve, die natürliche Gleichung, sowie ihre Evolute (Steinersche Kurve von dreifacher Dimension) aufzustellen, überlassen wir hier dem Leser. Auf dieselbe Weise, wie etwa bei der Kardioide findet man für die Gesamtlänge der Kurve $12r$ und für die Fläche $2r^2\pi$.

102. Wir nennen mit A. Gob[101]) X den primären, Y den sekundären Punkt der Tangente (Fig. 65); ebenso die Tangente primär zu X, sekundär zu Y. Da X den Kreis einmal, Y aber zweimal durchläuft, gibt es von jedem Punkte des Kreises aus eine primäre, zwei sekundäre Tangenten, also im ganzen drei, wie aus (5) ersichtlich. Diese haben eine eigentümliche Lage zueinander. Bestimmen wir sie etwa für den Punkt Y, so ist zu bedenken, daß, während Y eine ganze Umdrehung vollendet,

[101]) S. die Abhdlg. in Mém. Soc. Sc. Liége (3) **6**, 1906; auch die daran anschließende von J. Neuberg in demselben Bande.

X in seinen Gegenpunkt X' gelangt. Daher ist YX' die zweite sekundäre Tangente in Y und wir haben den Satz: *Von jedem Punkte des Inkreises gehen zwei zueinander senkrechte (sekundäre) Tangenten an die Steinersche Kurve.* Betrachtet man ferner Y als primären Punkt, ist also X bis Y gelangt, so kommt Y nach dem Punkt Y'', dem Spiegelpunkt von Y in bezug auf den Durchmesser XX'. YY'' ist also die primäre Tangente von Y aus.

Auf dieser Tangente ist demnach Y'' sekundär. Die zweite sekundäre Tangente von Y'' aus geht durch den Gegenpunkt Y' zu Y. Nennt man die beiden Punkte, in denen $Y''Y'$ die Tangenten XY und $X'Y$ trifft, B und B', so ist offenbar $YX = XB$ und $YX' = X'B'$; also sind B und B' die Berührungspunkte der beiden genannten Tangenten. Der Berührungspunkt N von $Y''Y'$ ist von B so weit entfernt, wie Y'' von B'. Wir können so folgenden Satz formulieren: *Jede Tangente einer Steinerschen Kurve trifft diese in zwei (assoziierten) Punkten B, B'. Der Mittelpunkt (Y') von BB' liegt auf dem Inkreis, die Länge BB' ist immer gleich dem doppelten Durchmesser des Inkreises ($= 2XX' = 4r$). Die Tangenten in B, B' an die Kurve schneiden sich rechtwinklig in einem Punkte (Y) des Inkreises, dem Gegenpunkt von Y', während die dritte von Y an die Kurve gehende Tangente auf BB' senkrecht steht.*

Es ist weiter offensichtlich, daß die Normalen der drei Punkte B, B', N sich in einem Punkte J des Umkreises der Hypozykloide schneiden, der auf dem Durchmesser YY' liegt.

103. Es sei nun (Fig. 66) ABC ein beliebiges Dreieck, AA_1, BB_1, CC_1 die drei Höhen, H der Höhenschnittpunkt, M der Mittelpunkt des Umkreises. Dann ist bekannt, daß die Fußpunkte A', B', C' der drei Lote, die von irgend einem Punkte P des Umkreises auf die drei Dreiecksseiten gefällt werden, auf einer Geraden W, der sogenannten Wallaceschen Geraden[102]), liegen. Wir wollen nun den Satz beweisen, der Steiner als Ausgangspunkt diente, *daß nämlich die Einhüllende aller Wallaceschen Geraden eines*

[102]) Leybourns Math. Repository (old series) **2**, 1799/00, 111. Die Gerade wurde lange Zeit R. Simson zugeschrieben.

Dreiecks eine dreispitzige Hypozykloide ist, die den Feuerbachschen Kreis des Dreiecks als Inkreis hat[103]).

Verlängert man etwa PB' bis zum zweiten Schnittpunkte B_2 mit dem Kreis, so ist $\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle APB' = \sphericalangle ABB_2$, also $B'C' \parallel BB_2$. Da man nun ebenso beweisen kann, daß $A'B'$ und $A'C'$ bzw. zu den ebenso

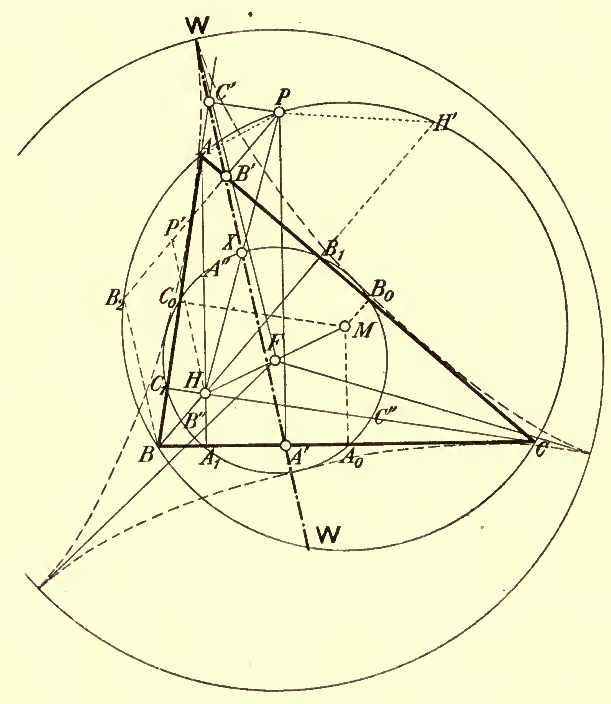


Fig. 66.

erhaltenen Geraden CC_2 und AA_2 parallel sind (die nicht mehr gezeichnet wurden) und diese wieder unter sich parallel

[103]) Alle von STEINER ohne Beweis angegebenen und viele neue Sätze wurden aus der allgemeinen Kurventheorie hergeleitet von L. CREMONA, J. f. Math. **64**, 1865, 101—123. Bez. proj. Erzeugung s. a. H. SCHRÖTER, ebd. **54**, 1857, 31—47. Wir zogen es oben vor, direkte geometrische Beweise zu geben, die an die kinematische Erzeugung anschließen.

laufen, so liegen A', B', C' in einer Geraden W. Nun ist bekanntlich der Mittelpunkt F von HM der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises, der durch die Höhenfußpunkte A_1, B_1, C_1 und durch die Seitenmitten A_0, B_0, C_0 geht, sowie die oberen Höhenabschnitte AH, BH, CH in A'', B'', C'' halbiert. Da demnach $FA'' \parallel MA$, so ist auch $FA'' = \frac{1}{2} MA$. D. h. der Feuerbachsche Kreis hat den halben Radius des Umkreises, und der Höhenschnittpunkt H ist äußerer Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Daher wird auch jede von H aus nach dem Umkreis gehende Strecke vom Feuerbachschen Kreise halbiert. Z. B. wird PH durch den Feuerbachschen Kreis in X halbiert, und wenn man andererseits etwa HB_1 um sich selbst bis H' verlängert, so liegt H' auf dem Umkreis.

Bestimmt man also zu P in bezug auf AC den symmetrisch gelegenen Punkt P', so ist HP' antiparallel zu $H'P$ und daher parallel mit BB_2 und W. Demnach geht W immer durch den auf dem Feuerbachschen Kreise liegenden Mittelpunkt X von PH. Dreht sich nun der Radius MP um den Winkel ε, so dreht sich auch der (parallele) Radius FX um ε, während AP sich nur um $\frac{1}{2}\varepsilon$ dreht, alle in demselben Sinne. Da aber, wie schon oben bemerkt, immer $\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle APB$, macht auch W eine Drehung um $\frac{1}{2}\varepsilon$, aber im entgegengesetzten Sinne. In bezug auf den Radius FX_ε beträgt dann die Drehung $\frac{3}{2}\varepsilon$. Somit ist der angekündigte Satz bewiesen.

Fällt P nach A, so geht W in die Höhe AA_1 über. Also sind sämtliche drei Höhen Tangenten der Steinerschen Kurve mit A'', B'', C'' als primären, A_1, B_1, C_1 als sekundären Punkten. Demnach sind auch die Seiten BC, CA, AC des Dreiecks, da sie in A_1, B_1, C_1 senkrecht auf den Höhen stehen, Tangenten der Steinerschen Kurve und ihre primären Punkte sind A_0, B_0, C_0.

Zusatz. Ohne Beweis führen wir an, daß erstens die drei Fußpunkte A', B', C' auf einer Geraden W bleiben, auch wenn man die drei Lote PA', PB', PC' um denselben Winkel δ in demselben Sinne dreht, zweitens auch diese Gerade W_δ eine Steinersche Kurve einhüllt (s. z. B. bei Gob, S. 10).

104. Die Steinersche Kurve hat eine Anzahl interessanter Fußpunktskurven, von denen wir zunächst die

betrachten wollen, deren Pol auf einer Spitzentangente (der x-Achse) liegt, die also alle wenigstens einfach symmetrisch sind. Hat der Pol die Abszisse a, so lauten die Gleichungen der Tangente (4), wenn man noch $\cos\frac{3}{2}\alpha = \cos^3\frac{1}{2}\alpha - 3\cos\frac{1}{2}\alpha\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ setzt, und der Normale vom Anfangspunkte auf die Tangente

$$(6)\quad \begin{cases} x\cos\frac{1}{2}\alpha + y\sin\frac{1}{2}\alpha - r(\cos^3\frac{1}{2}\alpha - 3\cos\frac{1}{2}\alpha\sin^2\frac{1}{2}\alpha) = 0\,, \\ (x-a)\sin\frac{1}{2}\alpha - y\cos\frac{1}{2}\alpha = 0\,. \end{cases}$$

Aus der letzteren Gleichung ergibt sich, wenn man $\Theta = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ setzt,

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = y/\Theta\,, \qquad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = (x-a)/\Theta\,,$$

ferner durch Substitution dieser Werte in die Tangentengleichung, wobei noch der Anfangspunkt in den Pol gelegt ist

$$(7)\qquad (x^2+y^2)^2 + [(a+3r)y^2 + (a-r)x^2]\cdot x = 0\,.$$

Diese Gleichung stellt eine Potenzkurve 4. Ordg. mit dreifachem Punkt im Pole vor. Eine Tangente desselben ist immer parallel zur y-Achse. Die unendlich ferne Gerade ist, wie bei der Grundkurve, Doppeltangente in den Kreispunkten. Gehen wir zu Polarkoordinaten über, so wird aus (7)

$$(8)\qquad \varrho = 4r\cos^3\theta - (a+3r)\cos\theta\,.$$

105. Wir wollen mit $a = 0$ beginnen. Das ist mit der Fußpunktskurve der Steinerschen Kurve in bezug auf den Mittelpunkt. Diese hat die kartesische und Polargleichung

$$(9)\qquad (x^2+y^2)^2 + rx(3y^2 - x^2) = 0\,,$$

$$(10)\qquad \varrho = r\cos 3\theta\,.$$

Aus beiden ist ersichtlich, daß die Tangenten im Anfangspunkt gegeneinander Winkel von 60^0 bilden. Die Kurve muß ja auch notwendig dreifache Symmetrie haben. Wir haben hier das schon in Nr. 84 angekündigte »regelmäßige Dreiblatt«, eine spezielle Rosenkurve, deren Inverse die Trisektrix von de Longchamps ist (vgl. Fig. 67). Für die Fläche eines Blattes erhalten wir aus dem dort aufgestellten Integral $\frac{1}{12}r^2\pi$. Wegen der folgenden Kurven

wollen wir aber das Flächenintegral gleich für die allgemeine Gleichung (8) aufstellen. Es ergibt sich

$$(11)\quad \begin{cases} \mathcal{F} = \frac{1}{2}\int \varrho^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int \big(16\, r^2 \cos^6\theta - 8\, r(a + 3\, r) \cos^4\theta \\ \qquad\qquad + (a + 3\, r)^2 \cos^2\theta\big)\, d\theta \\ = \frac{4}{3}\, r^2 \sin\theta \cos^5\theta - \frac{1}{3}\, r(3\, a + 4\, r) \sin\theta \cos^3\theta \\ \qquad\qquad + \frac{1}{4}\,(a^2 + r^2)(\sin\theta\cos\theta + \theta)\,. \end{cases}$$

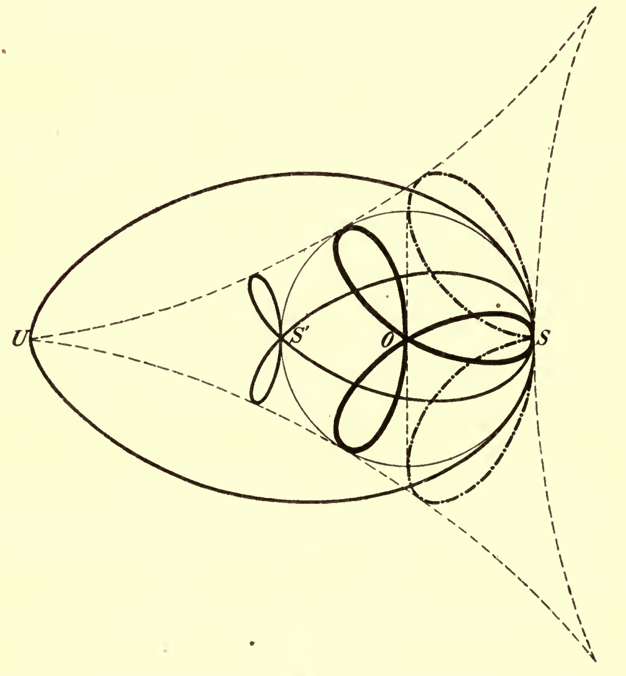


Fig. 67.

Auch hieraus erhält man für $a = 0$ zwischen den Grenzen $-\frac{1}{6}\pi$ und $+\frac{1}{6}\pi$ den Wert $\frac{1}{12} r^2 \pi$. Die Konchoide des Dreiblatts zerfällt nicht. Wir können hieran überhaupt die Bemerkung knüpfen: Ist μ eine ganze Zahl, so zerfällt die Konchoide der Rosenkurve $\varrho = m \cos\mu\,\theta$, wenn μ eine gerade Zahl ist; für ungerades μ aber nicht.

106. Wir wollen nun die Fußpunktskurve der Steinerschen Kurve für den Scheitel S aufstellen ($a = r$). Die kartesische und Polargleichung lauten

$$(x^2 + y^2)^2 + 4\,r\,y^2 x = 0\,, \tag{12}$$

$$\varrho = -4\,r \cos\theta \sin^2\theta\,. \tag{13}$$

Demnach besteht hier der dreifache Punkt aus einer Spitze mit durchgehendem Zweig. Wir nennen diese Kurve »gerades Zweiblatt«. Man wird leicht bemerken, daß die Doppeltangente dieser Kurve der durch O gehende zu OS senkrechte Durchmesser des Inkreises der Steinerschen Kurve ist, während die Berührungspunkte in den Endpunkten des Durchmessers liegen (vgl. Fig. 67). Da man nun für die Fläche eines Blattes $\mathfrak{F} = \frac{1}{4} r^2 \pi$ findet, so sieht man, daß einerseits der Kreisquadrant durch das Zweiblatt, andererseits das eine Blatt des Zweiblattes durch den Kreisbogen halbiert wird.

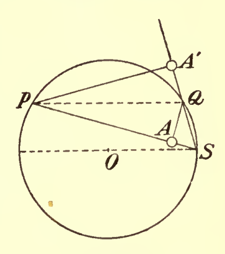


Fig. 68.

Zusatz. Das gerade Zweiblatt kann sehr einfach konstruiert werden: Man ziehe im Inkreis der Steinerschen Kurve eine beliebige parallele Sehne PQ zu OS (Fig. 68) und projiziere P in A' auf SQ, Q in A auf SP, so beschreiben A, A' das Zweiblatt. Denn verschiebt man PQ, und dreht sich hierhei der Radius OQ etwa um ε, so dreht sich SQ um $\frac{1}{2}\varepsilon$, SP um $-\frac{1}{2}\varepsilon$, also auch QA um $-\frac{1}{2}\varepsilon$; daher hüllt QA die Steinersche Kurve ein. Ähnlich ist dies für PA' zu zeigen. Damit ist zugleich eine neue Fassung der Erzeugung der Steinerschen Kurve gegeben. Man kann auch bemerken, daß QA bzw. $A'P$ verlängert mit QS, bzw. PS und der Geraden OS gleichschenklige Dreiecke bilden.

107. Nehmen wir jetzt den Gegenpunkt S' zu S auf dem Inkreise als Pol ($a = -r$; vgl. wieder Fig. 67), so erhalten wir als Gleichungen der Fußpunktskurve

$$(x^2 + y^2)^2 + 2\,r\,x(y^2 - x^2) = 0\,, \tag{14}$$

$$\varrho = 2\,r \cos\theta \cos 2\,\theta\,. \tag{15}$$

Der dreifache Punkt hat hier außer der y-Achse die Halbierenden der Achsen zu Tangenten. Wir haben das »gerade Dreiblatt« (trifolium droit), wie es von

G. DE LONGCHAMPS[104]) und H. BROCARD[105]) genannt wurde. Man findet hier für die Fläche des großen Blattes $\mathcal{F}_1 = \frac{1}{12} r^2 (3\pi + 8)$, für die jedes kleinen $\mathcal{F}_2 = \frac{1}{24} r^2 (3\pi - 8)$; die Fläche der ganzen Kurve ist also, da der Radiusvektor immer im selben Sinne rotiert,

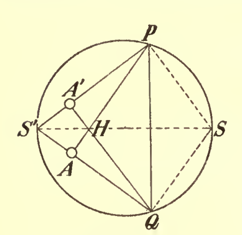


Fig. 69.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + 2\mathcal{F}_2 = \tfrac{1}{2} r^2 \pi .$$

Denselben Wert erhält man aus (4), wenn man die Grenzen 0 und π nimmt.

Zusatz. Eine einfache Konstruktion ist unter anderen folgende. PQ sei eine beliebige Sehne des Inkreises der Steinerschen Kurve, dann beschreiben die Fußpunkte A, A' der Höhen PA, QA' des $\triangle PS'Q$ das gerade Dreiblatt (Fig. 69). Denn $\triangle HPS$ und $\triangle HQS$ sind gleichschenklige Dreiecke, also hüllen PA und QA' die Hypozykloide ein. Damit ist zugleich wieder eine neue Form der Erzeugung dieser Kurve gegeben.

108. Zuletzt wählen wir die Spitze U der Steinerschen Kurve selbst als Pol $(a = -3r)$. Dann lauten die bezüglichen Gleichungen

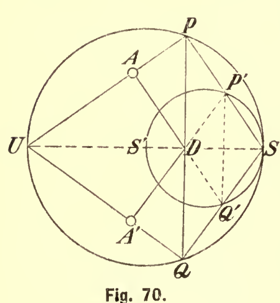


Fig. 70.

(16) $$(x^2 + y^2)^2 = 4 r x^3 ,$$

(17) $$\varrho = 4 r \cos^3 \theta .$$

Der Anfangspunkt ist demnach ein Spitzpunkt, die Kurve hat eine eiförmige Gestalt (Fig. 67). Wir nennen sie konsequenterweise »Einblatt«[106]). Historisch merkwürdig ist diese Kurve dadurch, daß u. a. KEPLER sie zur Darstellung der Bahn des Planeten Mars anwendete[107]). KEPLER versuchte auch die Fläche vergebens zu bestimmen, die wir gleich $\frac{5}{2} r^2 \pi$ finden.

---

[104]) *Traité de Géom. anal.*, Paris (Ch. Delagrave) 1884, S. 512; J. math. spéc. 1887.

[105]) J. math. spéc. 1887 u. 1891 an mehreren Stellen.

[106]) »Folium simple« nach G. DE LONGCHAMPS. S. dessen *Géom. de la Règle*[38]), Paris (Ch. Delagrave) 1890, S. 126. — H. BROCARD im J. math. spéc., 1891. — Auch »Ovoide« und »eigentliches Oval« wurde die Kurve genannt.

[107]) *Astronomia nova*, Prag 1609, S. 337.

Zusatz. Das Einblatt zeichnet man sehr einfach folgendermaßen: SP beliebig, $UP \perp SP$, $PD \perp US$, $DA \perp UP$; dann beschreibt A die Kurve. Einen symmetrischen Punkt A' erhält man durch SQ, UQ, DA' (s. Fig. 70). Um die Richtigkeit der Konstruktion geometrisch zu erweisen, müssen wir wieder zeigen, daß DA bzw. DA' die Hypozykloide einhüllen. Nun ist PQ immer Sehne des Kreises über SU als Durchmesser. Schneidet nun der Inkreis SP in P', SQ in Q', so ist $PP' = SP'$, $QQ' = SQ'$, $P'Q' \perp\!\!\!\perp PD(QD)$. Also ist DQ' die Verlängerung von AD, DP' die von $A'D$. Da aber $DQ'SP'$ ein Rhombus ist, hüllen DP' und DQ' die Steinersche Kurve ein.

109. Wir erhalten eine bemerkenswerte Verallgemeinerung des geraden Dreiblatts und des geraden Zweiblatts, wenn wir den Pol für die Fußpunktskurve in einen beliebigen Punkt J des Inkreises der Steinerschen Kurve legen. Um für einen solchen Punkt die Fußpunktskurve aufzustellen, kann man eine Bemerkung benutzen, die wir schon in Nr. 5 machten. Es seien nämlich (Fig. 71) B bzw. A die Fußpunkte der Lote vom Mittelpunkte O bzw. vom Punkte J auf irgend eine Kurventangente. Fällt man $OC \perp JA$, so liegt, während in jeder Lage $CA = OB$, Punkt C immer auf dem Kreis über JO als Durchmesser.

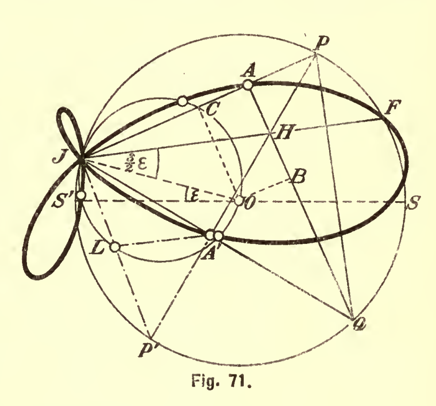


Fig. 71.

Diese Tatsache hätte natürlich auch für alle bisher betrachteten Fußpunktskurven verwendet werden können, sowohl zur Konstruktion als auch zur Aufstellung der Gleichung. Im vorliegenden Falle nehmen wir JO als Polarachse. Ist $\sphericalangle JOS' = \varepsilon$, $\sphericalangle AJO = \theta$, so ist $\sphericalangle BOS = \theta - \varepsilon$ und daher $JA = \varrho = CA + JC = r\cos 3(\theta - \varepsilon) + r\cos\theta$. Setzt man noch $\frac{3}{2}\varepsilon = \alpha$, so kann man die Gleichung schreiben

$$(18) \qquad \varrho = 2r\cos(2\theta - \alpha)\cos(\theta - \alpha).$$

Aus dieser Gleichung geht in der Tat für $\varepsilon = 0$ die Gleichung (15), für $\varepsilon = \frac{1}{3}\pi$ (oder auch $\varepsilon = \pi$) die Gleichung (13)

hervor. Die Kurve heißt das »schiefe Dreiblatt« (trèfle oblique).

Zusätze. 1. Wir erhalten eine Konstruktion, die der für das gerade Dreiblatt durchaus analog ist, wenn wir nur in J die Kreissehne JF ziehen, die Tangente an die Steinersche Kurve mit J als primärem Punkt ist. Aus dem Früheren wissen wir aber, daß diese mit JO den Winkel $\frac{3}{2}\varepsilon$ bildet. Legen wir dann (im Inkreis) irgend eine Sehne $PQ \perp JF$, so sind die Fußpunkte A, A' der Höhen QA, PA' des $\triangle PJQ$ Punkte des schiefen Dreiblatts, da die Höhen selbst die Hypozykloide einhüllen; denn die Dreiecke HPF und HQF sind wieder gleichschenklig.

2. Verlängert man etwa PA' bis P' auf dem Inkreise, so ist wieder $JP' = JH$, $P'A' = HA'$. Ist nun L der Schnittpunkt von JP' mit dem Kreise über JO, so ist $JL = LP'$ und daher $LA' \parallel JH$ und $LA' = JL$. Dies gibt eine neue, sehr bequeme Konstruktionsmethode für das schiefe Dreiblatt. Selbstverständlich muß aber LA' auch nach rückwärts um sich selbst verlängert werden.

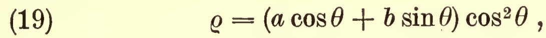
Schneidet man ferner das schiefe Dreiblatt mit dem Kreise über JO, so muß für die Schnittpunkte $\cos 3(\theta - \varepsilon) = 0$ sein, wie man aus der ursprünglichen Form der Gleichung (18) schließt. Das gibt für θ die drei Werte $\varepsilon + \frac{1}{6}\pi$, $\varepsilon + \frac{1}{2}\pi$, $\varepsilon + \frac{5}{6}\pi$, deren Unterschiede je 60^0 betragen. Also ist das Dreieck der drei Schnittpunkte (außer J und den imaginären Kreispunkten, die zusammen für $3 + 2 = 5$ zählen) gleichseitig.

110. Auch die Konstruktion des Einblattes ist einer ähnlichen Erweiterung fähig, wenn wir, statt von der Spitze U, von einem beliebigen Punkte J der Steinerschen Kurve selbst die Fußpunktskurve zu bestimmen suchen. Statt US haben wir dann die Tangente JF der Hypozykloide zugrunde zu legen (Fig. 72). F sei der sekundäre Punkt der Tangente auf dem Inkreise; von F geht dann, senkrecht zu JF, eine zweite Tangente FJ' an die Steinersche Kurve, deren sekundärer Punkt F und deren Berührungspunkt J' sei. Dann liegt nach den Ausführungen von Nr. 102 der Mittelpunkt F' von JJ' in dem Gegenpunkte von F auf dem Inkreise, der Kreis um F' mit Radius $F'J = F'F = F'J'$ berührt also den Inkreis in F. In diesem Kreise vom Radius $2r$ ziehen wir irgend eine Sehne $PQ \perp JF$, deren Fußpunkt D sei, und projizieren D auf JP und JQ in A und A'.

Da nun $\sphericalangle ADJ = \sphericalangle JPD = \sphericalangle QFD$, so schneidet AD die Hypotenuse FQ im Mittelpunkte Q', der also auf dem

Inkreise liegt. Da $\triangle FQ'D$ gleichschenklig ist, hüllt DQ' die Hypozykloide ein und A beschreibt die Fußpunktskurve. Ebenso ist $\sphericalangle QJD = \sphericalangle QPF = \sphericalangle QDA'$; also schneidet DA' verlängert die Hypotenuse FP im Mittelpunkte P' auf dem Inkreise. DP' ist ebenfalls Tangente der Hypozykloide, A' ein Punkt derselben Fußpunktskurve.

Setzt man $JF = a$, $J'F = b$, nimmt JF als Polarachse, $\sphericalangle AJF = \theta$, so findet man $JA = \varrho = JD\cos\theta = JP\cos^2\theta$. Da nun $JP = a\cos\theta + b\sin\theta$, so ist die Polargleichung der Kurve, die wir »schiefes Zweiblatt«[107a]) nennen,



(19) $$\varrho = (a\cos\theta + b\sin\theta)\cos^2\theta\,,$$

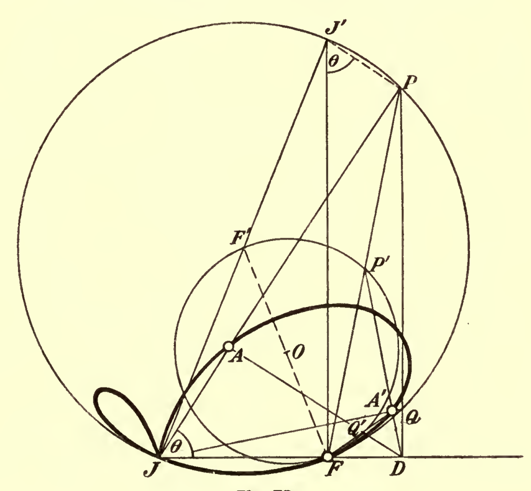


Fig. 72.

oder, wenn wir $a = 4r\cos\alpha$, $b = 4r\sin\alpha$ setzen,

(20) $$\varrho = 4r\cos^2\theta\cos(\theta - \alpha)\,.$$

Für $\alpha = 0$ $(b = 0)$ gehen Konstruktion und Gleichung wirklich in die des Einblattes über. Für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ $(a = 0)$ geht aber die Konstruktion in die für das gerade Zweiblatt

[107a]) G. de Longchamps, J. math. spéc. 1886. *Géom. de la Règle*[38]) S. 122. Daß dieses Zweiblatt Fußpunktskurve der Steinerschen Kurve ist für einen Punkt der Kurve, zeigte J. Neuberg[101]), S. 19/20.

angegebene über. Die Gleichung wird $\varrho = 4r\cos^2\theta\sin\theta$. Auch diese entspricht der des Zweiblattes, wenn nur die Polarachse um 90^0 gedreht wird. Daß die Kurve (20) eine Spitze mit durchgehendem Zweige hat, ist auch aus der Polargleichung zu ersehen. Die Aufstellung der kartesischen Gleichung in den letzten zwei Fällen und alle näheren Betrachtungen überlassen wir dem Leser.

§ 20. **Die Koppelkurve des Kurbelgetriebes.**

111. Nachdem wir die Bewegung einer Ebene $\varDelta'$ gegen eine feste Ebene $\varDelta$ betrachtet haben, wo zwei Punkte P, Q von $\varDelta'$ auf zwei Geraden G, Γ von $\varDelta$ glitten (sowie deren Umkehrung), läge es nahe, zunächst die Bewegung zu studieren, bei welcher der eine Punkt (P) als Bahn einen Kreis hätte, der andere (Q) eine Gerade. Das ist die Bewegung, die man in der Kinematik Schubkurbelbewegung nennt. Aber die bei dieser Bewegung auftretenden Bahn- bzw. Polkurven bieten einerseits keine interessanteren speziellen Kurven dar, andererseits ist die Schubkurbelbewegung nur ein spezieller Fall derjenigen allgemeineren Bewegung, wo P und Q je auf einem festen Kreise von $\varDelta$ zu gleiten haben. Der eine Kreis, auf dem P läuft, sei O (Mittelpunkt O, Radius R), der andere O' (Mittelpunkt O', Radius r), der Zentralabstand $OO' = a$, die feste Strecke $PQ = l$. Die ganze Bewegung wird nun durch das Viereck $OO'QP$ vermittelt, dessen Seiten konstant, aber in den Ecken gegeneinander drehbar sind. Ein solches Viereck heißt »Gelenkviereck«, das Ganze ein »Kurbelgetriebe«. OO' nennt man den Steg, der in unserem Falle feststehend gedacht wird, OP und OQ die Arme, PQ die Koppel. Wir fragen nach der Kurve, die ein mit der Koppel starr verbundener Punkt L beschreibt, wenn diese verschoben wird. Die Seiten und Winkel des festen Dreiecks LPQ seien der Reihe nach l, p, q; λ, φ, ψ.

112. Um zunächst die Gleichung dieser Kurve aufzustellen, nehmen wir O als Anfangspunkt, OO' als x-Achse. Nennen wir dann noch den Winkel, den die Seite PL mit der x-Achse bildet, ω, so hat man, wenn L, P, Q bzw. die Koordinaten x, y; ξ, η; ξ', η' haben

$$\xi = x - q\cos\omega\,, \quad \eta = y - q\sin\omega\,, \qquad \xi' = x - p\cos(\omega+\lambda)\,, \quad \eta' = y - p\sin(\omega+\lambda)\,.$$

Setzt man diese Werte in die Kreisgleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2\,, \qquad (\xi' - a)^2 + \eta'^2 = r^2\,,$$

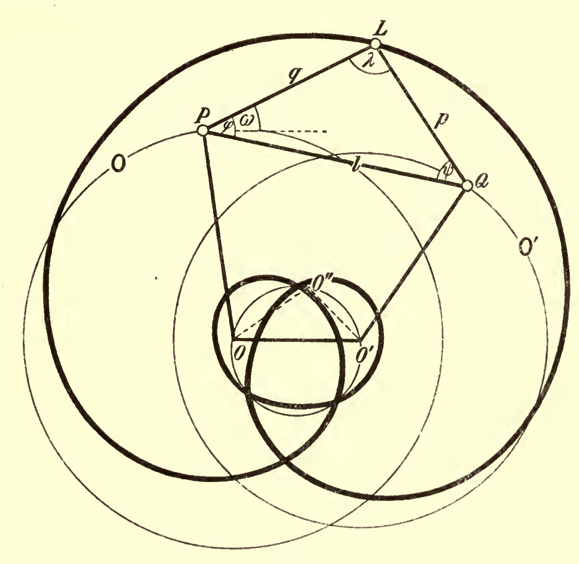


Fig. 73.

so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$2p\,[(x-a)\cos\lambda + y\sin\lambda]\cos\omega - [(x-a)\sin\lambda - y\cos\lambda]\sin\omega$$
$$= (x-a)^2 + y^2 + p^2 - r^2,$$
$$2\,q\,x\cos\omega + 2\,q\,y\sin\omega = x^2 + y^2 + q^2 - R^2\,.$$

Berechnet man hieraus $\cos\omega$ und $\sin\omega$ und setzt die gefundenen Werte in die Gleichung $\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$, so erhält man für die gesuchte Gleichung der Koppelkurve

(1) $$\mathsf{U}^2 + \mathsf{V}^2 = \mathsf{W}^2\,,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(2)\quad \begin{cases} \mathsf{U} \equiv p[(x-a)\cos\lambda + y\sin\lambda]\,(x^2+y^2+q^2-R^2) \\ \qquad\qquad - q\,x[(x-a)^2+y^2+p^2-r^2]\,, \\ \mathsf{V} \equiv p[(x-a)\sin\lambda - y\cos\lambda]\,(x^2+y^2+q^2-R^2) \\ \qquad\qquad + q\,y[(x-a)^2+y^2+p^2-r^2]\,, \\ \mathsf{W} \equiv 2\,p\,q\sin\lambda[x^2+y^2-a\,x-a\,y\operatorname{ctg}\lambda]\,. \end{cases}$$

Das Quadrieren von U und V, sowie das Ordnen der Glieder, wie auch im folgenden einige Rechnungen, müssen wir dem Leser überlassen. Wir sehen, daß die Koppelkurve eine Kurve 6. Ordg. ist. Auch bemerkt man sofort, daß die unendlich ferne Gerade die Kurve nur in den imaginären Kreispunkten (je dreimal) trifft. Bestimmen wir die Tangenten in diesen Punkten nach einer der von uns schon öfter angewendeten Methoden, so ergeben sich die drei Geradenpaare

$$(3)\quad \begin{cases} x^2+y^2=0\,, \\ (x-a)^2+y^2=0\,, \\ \left(x-\dfrac{q\,a}{l}\cos\varphi\right)^2+\left(y-\dfrac{q\,a}{l}\sin\varphi\right)^2=0\,. \end{cases}$$

Die Kurve hat also die imaginären Kreispunkte zu dreifachen Punkten und die Punkte $O(x=0\,,\ y=0)$, $O'(x=a\,,\ y=0)$, ferner einen weiteren Punkt O'' mit den Koordinaten $x=q\,a\cos\varphi/l\,,\ y=q\,a\sin\varphi/l$ zu außerordentlichen Brennpunkten. Setzt man nun diese Koordinaten x, y in die Gleichung des Kreises $\mathsf{W}=0$, so erfüllen sie diese, denn es kommt $q/l=\sin(\varphi+\lambda)/\sin\lambda$. Alle drei außerordentlichen Brennpunkte O, O', O'' liegen also auf dem Kreise W.

113. Der Kreis W kann aber auch Doppelpunkte enthalten. Denn in allen Punkten der Koppelkurve, wo etwa $\mathsf{W}=0$ und $\mathsf{V}=0$ ist, woraus von selbst $\mathsf{U}=0$ folgt, sind solche, nach der Form der Gleichung (1). Nun ist aber V (wie auch U) eine zirkulare Kubik und hat demnach mit dem Kreis W im Endlichen nur noch vier Schnittpunkte. Einer davon ist $x=a\,,\ y=0$, d. i. der Punkt O'. Dieser liegt aber nicht auf U. Es bleibt nachzuweisen, daß U durch die drei anderen Schnittpunkte

geht[108]). Betrachten wir die Schnittpunkte von V und U. Deren müssen es 9 sein. Davon fallen 4 in die Kreispunkte, da sich die Kubiken dort berühren, 2 liegen dort, wo der Kreis $\mathsf{K} \equiv x^2 + y^2 + q^2 - R^2 = 0$ den Kreis $\mathsf{K}' \equiv (x-a)^2 + y^2 + p^2 - r^2 = 0$ schneidet. Nun findet man ohne Schwierigkeit

$$(4) \qquad 2q(y\,\mathsf{U} + x\,\mathsf{V}) \equiv \mathsf{K} \cdot \mathsf{W}\,.$$

Wo also $\mathsf{U} = 0$ und $\mathsf{V} = 0$ ist, muß entweder $\mathsf{K} = 0$ oder $\mathsf{W} = 0$ sein. Da nun auf K nur 2 endliche Schnittpunkte liegen können, liegen in der Tat die 3 übrigen auf dem Kreise W und sind Doppelpunkte der Koppelkurve.

Der Kreis W hat aber den Mittelpunkt $x = \frac{1}{2}a$, $y = \frac{1}{2}a \operatorname{ctg}\lambda$. Es ist also der Kreis über dem Steg OO', der den Peripheriewinkel λ faßt. Daher ist $\sphericalangle OO''O' = \lambda$, und da sich außerdem für O'' ergibt $y/x = \operatorname{tg}\varphi$, so ist $\triangle O''OO' \sim \triangle LPQ$. Wir können so das Ergebnis unserer Betrachtungen in folgenden Satz zusammenfassen[109]):

Die Koppelkurve des Kurbelgetriebes ist eine trizirkulare Sextik mit drei außerordentlichen Brennpunkten, deren zwei in die Stegenden fallen, während der dritte mit dem Steg ein dem erzeugenden Dreieck gleichsinnig ähnliches Dreieck bildet. Sie hat ferner immer drei Doppelpunkte, die auf dem Umkreise des Dreiecks der drei Brennpunkte liegen.

Wir bemerken noch, daß der eine dieser drei Doppelpunkte immer reell sein muß, während die beiden anderen konjugiert imaginär sein können. Da eine Sextik im Maximum $\frac{1}{2}(6-1)(6-2) = 10$ Doppelpunkte besitzen kann und wir schon $2 \cdot 3 + 3 = 9$ gefunden haben, kann

[108]) Dieser Nachweis fehlt bei F. Ebner, *Leitfaden der techn. wichtigen Kurven*, Leipzig 1906, S. 49. Auf dieses Buch verweisen wir im übrigen den Leser, der eine ausführliche analytische Darlegung der bei der »Dreistabbewegung«, wie man die oben behandelte Bewegung auch nennt, und deren Unterfällen auftretenden Bahn- und Polkurven wünscht. Synthetisch behandelt dasselbe Burmester, *Lehrb. d. Kinematik*, Leipzig, Arthur Felix, 1886, S. 283—354; beide mit vielen Figuren.

[109]) Diesen Satz stellte zuerst S. Roberts auf in der Abhandlg.: *On three-bar motion in plane space*, Proc. Lond. math. Soc. **7**, 1876, 14—23, wozu man auch Cayley, ebd. S. 136—166 (= *Coll. Pap.* IX, S. 551—581) vergleiche.

höchstens noch einer vorhanden sein. Einen solchen Fall, wo also die Kurve rational ist, zeigt unsere Figur. Dieser zehnte Doppelpunkt kann aber auch fehlen, und man erhält durch Lösen des Knotens (*Alg. K.* § 24) sofort zwei neue Formen der Koppelkurve[110]).

Zusatz. Es wird dem Leser, wenn er etwa an die drei Brennpunkte der kartesischen Ovale denkt, einleuchten, daß auch hier von den drei Brennpunkten O, O', O'' nicht einer, etwa O'', ausgezeichnet sein kann. In der Tat stellte schon S. Roberts den Satz auf, daß dieselbe Koppelkurve noch durch zwei andere Kurbelgetriebe über OO'' bzw. $O'O''$ als Stegen und mit Koppeldreiecken, die dem ursprünglichen ähnlich sind, wobei nur immer eine andere Seite als Koppel auftritt, erzeugt werden kann. Den Beweis dieses Satzes übergehen wir hier.

114. Eine auch praktisch besonders wichtige Spezialisierung der Bahnkurve des Kurbelgetriebes tritt dann ein, wenn der beschreibende Punkt L auf der Koppel PQ selbst liegt. Diese werde durch L im Verhältnis $q:p$ geteilt. Der Kreis W geht dann in die x-Achse (zusammen mit der unendlich fernen Geraden) über. Der dritte Brennpunkt O'' teilt die Strecke OO' im Verhältnis $q:p$ und die drei notwendigen Doppelpunkte liegen auf derselben Geraden, gegen die die Kurve symmetrisch ist. Auch diese besondere Koppelkurve hat natürlich noch die verschiedensten Formen. Der meist verwendete Fall ist der, daß $R=r$ und $q=p$ genommen wird. Setzt man dann $2l$ statt l und $2a$ statt a, so wird die Gleichung der Kurve, die nun »Wattsche Kurve«[111]) genannt wird, wenn man noch den Anfangspunkt in den Mittelpunkt von OO' legt,

$$(5)\qquad (x^2+y^2)(x^2+y^2+l^2-r^2-a^2)^2+4a^2y^2(x^2+y^2-r^2)=0\,.$$

Die Kurve ist nun gegen beide Achsen symmetrisch. Der eine Doppelpunkt liegt im Anfangspunkt (zugleich mit dem dritten außerordentlichen Brennpunkt), die beiden anderen haben die Abszissen $\pm\sqrt{r^2+a^2-l^2}$. Verlegt man

[110]) Die Koppelkurven zeichnet man sehr leicht mittels des auf Pauspapier gezeichneten $\triangle LPQ$.

[111]) Bibliographie im Interméd. math. **4**, 1897, 184.

in einen solchen Punkt den Anfangspunkt, so findet man als Gleichung des Tangentenpaares

$$x^2(r^2 + a^2 - l^2)^2 + a^2 y^2 (a^2 - l^2) = 0 .$$

Diese Doppelpunkte sind also Knoten, wenn $l > a$ (Fig. 74), isolierte Punkte für $l < a$ (Fig. 75). Dazwischen liegt der

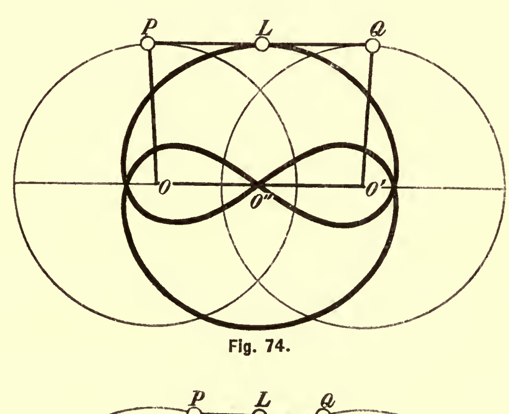


Fig. 74.

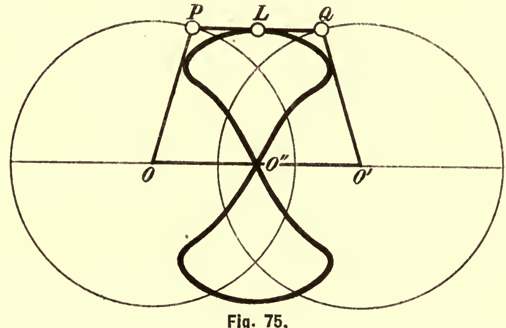


Fig. 75.

Fall $l = a$. Für diesen Wert von l zerfällt aber (5) offensichtlich in den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ und die Kurve

(6) $$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - r^2) + 4\,a^2 y^2 = 0 .$$

Dies ist, wie der Vergleich mit Gleichung (1) in Nr. 9 zeigt, eine Boothsche Lemniskate. Hienach wird sich der Leser den Übergang unschwer vorstellen. Der Grund für das Auftreten der Boothschen Lemniskate wird in Nr. 118 deutlicher werden.

Der Anfangspunkt O'' ist, wie schon gesagt, selbst ein Doppelpunkt und zwar, da in der Gleichung (5) die Glieder 3. Ordg. in x, y fehlen, ein Inflexionsknoten. Wenn $l < a$, welche Bedingung in der Praxis immer erfüllt ist, treten noch weitere vier Inflexionspunkte auf (Fig. 75), die bewirken, daß, insbesondere bei günstigem Verhältnis von a, r, l, die Kurve sich im Anfangspunkt an eine Gerade ziemlich eng anschließt, so daß das Getriebe auf eine kurze Strecke, wie sie etwa für den Kolben einer Dampfmaschine nötig ist, eine angenäherte Geradführung leistet. Selbstverständlich gilt dies überhaupt nur, wenn der Doppelpunkt ein Knoten ist. Da aber das zugehörige Tangentenpaar die Gleichung hat

$$x^2(r^2+a^2-l^2)^2+y^2(r+a+l)(r+a-l)(r-a+l)(r-a-l)=0\,,$$

so gibt es eine Anzahl von Fällen, wo ein isolierter Punkt (auch ein Berührungsknoten) auftritt, deren nähere Diskussion wir dem Leser überlassen.

115. Die Polkurven für ein Kurbelgetriebe, dem ein Gelenkviereck von allgemeinem Typus zugrunde liegt, sind zu kompliziert, als daß sie für die tiefere Einsicht in die Natur der Bewegung von Nutzen sein könnten. Wenn wir aber ein spezielles Viereck wählen, so vereinfachen sich Pol- und Bahnkurven durch Abtrennen von Kreisen und Geraden, und wir erhalten Resultate, die auf früher schon betrachtete Kurven ein neues Licht werfen. Der erzeugende Punkt L sei dabei zunächst wieder ein beliebiger Punkt der Koppelebene.

Das Gelenkviereck möge erstens ein Parallelogramm sein $(R = r,\ l = a)$. Wir sahen schon in der vorigen Nummer, daß der Mittelpunkt der Koppel PQ dann eine Boothsche Lemniskate beschreibt. Wenn der Leser aber die Fig. 74 betrachtet, oder noch besser sich selbst entwirft, so wird er bemerken, daß nur der äußere Teil, der schließlich (für $l = a$) in einen Kreis vom Radius r übergeht, von dem konvexen Viereck $POO'Q$ beschrieben wird, während für den inneren Zug, der bei $l = a$ allein in Betracht kommt, das Viereck sich überschlägt, so daß es die Form der Fig. 76 oder Fig. 77 annimmt. Das System heißt dann eine »Zwillingskurbel«. Wir betrachten zunächst die erstere Figur, wo, $a > r$ vorausgesetzt, OO'

wie bisher als fest betrachtet wird. In diesem Falle drehen sich die Radien OP und $O'Q$ immer im entgegengesetzten Sinne, weshalb das Getriebe »gegenläufig« genannt wird.

Das Momentanzentrum M befindet sich im Schnittpunkte der beiden verlängerten Kreisradien OP und $O'Q$. Da nun die Figur in jeder Lage symmetrisch gegen die Winkelhalbierende MS des Winkels (OMO') bleibt, so ist $MP = MO'$ und daher $OM - MO' = OP = r$. Aus diesem Grunde beschreibt M in der festen Ebene eine Hyperbel H

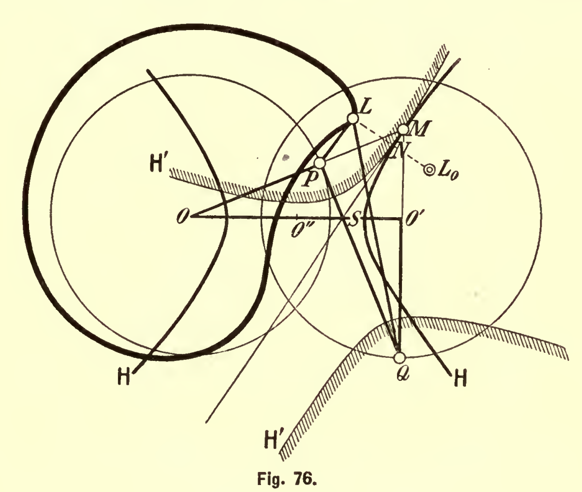


Fig. 76.

mit O und O' als Brennpunkten und der Achsenlänge r. Für die bewegliche Polbahn muß man einen Augenblick P und Q fest denken. Dann ist ebenso $QM - MP = QO' = r$. Die durch ein Kurbelgetriebe vermittelte Bewegung ist ja überhaupt zu sich selbst dualistisch. Die bewegliche Polbahn ist also eine der festen kongruente Hyperbel H′, die zu ihr immer symmetrisch liegt in bezug auf die gemeinschaftliche Tangente MS. Die Hyperbeln H und H′ rollen demnach so aufeinander ab, daß sie sich stets in homologen Punkten berühren.

116. Wenn wir uns nun an den beim Abrollen zweier kongruenten Parabeln schon beobachteten Vorgang erinnern, finden wir hier ebenso leicht die Trajektorie eines

mit der Koppel PQ bzw. mit der Hyperbel H′ fest verbundenen Punktes L. Diesem Punkte L entspricht nämlich bei jeder Lage des Systems derselbe Punkt L_0 der festen Ebene als Symmetriepunkt in bezug auf MS. Der Schnittpunkt N von LL_0 mit der Symmetrieachse MS beschreibt aber, wenn H′ auf H abrollt, die Fußpunktskurve von L_0 in bezug auf die Hyperbel H. Die Trajektorie des Punktes L ist also die von L_0 aus durch Verdoppeln der Radienvektoren erhaltene ähnliche Kurve, Fußpunktskurve einer Hyperbel von den doppelten Dimensionen[112]). Wir haben den erzeugenden Punkt L im Innern der Hyperbel H′ angenommen, so daß die Kurve, im Gegensatz zu der von Fig. 6, einen isolierten Punkt in L_0 erhält.

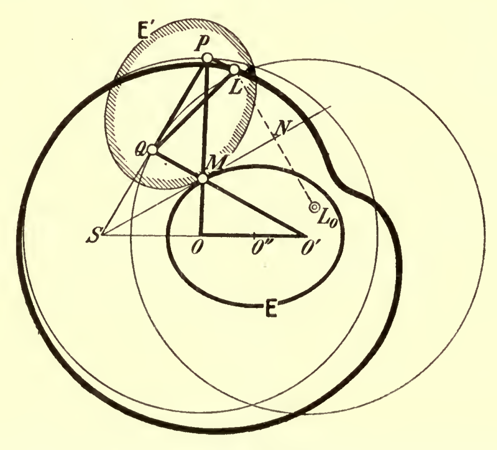


Fig. 77.

117. Nicht wesentlich anders sind die Verhältnisse, wenn $a < r$ (Fig. 77). Das Getriebe ist dann »gleichläufig«. Das Momentanzentrum M liegt immer im Kreuzungspunkt der beiden Arme OP, $O'Q$. Da die Figur wieder gegen die den Winkel (OMQ) halbierende Gerade MS symmetrisch ist, hat man $OM + O'M = OM + MP = r$. Daher sind die feste wie die bewegliche Polbahn Ellipsen E bzw. E′ mit

[112]) Die Rollkurven, die beim Zwillingskurbelgetriebe auftreten, werden schon in KLÜGELS Math. Wörterbuch, Leipzig 1805, II. Bd., S. 128 erwähnt.

O, O' bzw. P, Q als Brennpunkten und r als großer Achse. Sie berühren sich in M und liegen immer symmetrisch zu MS. Der mit der Koppel PQ fest verbundene Punkt L beschreibt die Fußpunktskurve einer Ellipse, die man erhält, wenn man die Figur von dem zu L in bezug auf MS symmetrisch liegenden Punkte L_0 aus ähnlich verdoppelt. Wir haben auch hier den beschreibenden Punkt so gewählt (im Innern der Ellipse E), daß eine Form mit isoliertem Punkt auftritt.

118. Irgend ein Punkt der Koppel selbst ist symmetrisch zu einem Punkte der großen Achse OO'. Daher beschreibt ein solcher Punkt eine symmetrische Kurve. Der Mittelpunkt Λ von PQ entspricht aber dem Mittelpunkt O'' des Kegelschnitts. Daher beschreibt Λ eine Boothsche Lemniskate. Ist das System gegenläufig und $a = r\sqrt{2}$, so ist die Bahn von Λ eine Bernoullische Lemniskate. Die Punkte P und Q selbst beschreiben, wie wir wissen, Kreise. Dies könnte umgekehrt zum Beweise dafür dienen, wenn diese Tatsache dem Leser nicht schon aus der Kegelschnittslehre bekannt wäre, daß die Fußpunktskurven der Kegelschnitte in bezug auf die Brennpunkte O, O' die Kreise über der großen Achse als Durchmesser sind. Sie haben O'' als Mittelpunkt und $\frac{1}{2}r$ zum Radius.

Bem. Wir glaubten dem Leser diese geometrischen Ableitungen nicht vorenthalten zu sollen, da sie leicht und nützlich sind, müssen aber dann auf die analytische Bestätigung, die ja der Leser sich selbst verschaffen kann, verzichten. Wir erwähnten schon, daß im Falle der Schubkurbel, wo einer der Grundkreise in eine Gerade ausartet, keine bemerkenswerten Kurven auftreten. Die Umkehrung der Schubkurbelbewegung ergibt die Schleifkurbelbewegung, die, wenn dann der zweite Kreis ebenfalls in eine Gerade ausartet, in die Schleifschieberbewegung übergeht. Diese haben wir, soweit sie uns Interesse bot, schon in § 11 betrachtet. Vor allem sahen wir, daß beim symmetrischen Schleifschiebergetriebe als Polkurven kongruente Parabeln auftreten, denen die Fußpunktskurven der Parabel als Bahnkurven entsprechen. Eine abschließende Diskussion aller kinematischen Möglichkeiten liegt nicht in unserem Plane.

119. Zum Schlusse betrachten wir nur noch eine spezielle Form des Gelenkvierecks. Sind nicht die gegenüberliegenden, sondern die anstoßenden Seiten gleich —

das Viereck also ein Deltoid. — und liegt OO' fest, so daß $OO' = O'Q = a$, $OP = PQ = l$, so sei wieder Punkt L mit der Koppel PQ fest verbunden (Fig. 78). Um zu erkennen, welche Kurve von L beschrieben wird, müssen wir ein zweites der drei möglichen Getriebe angeben, durch die L dieselbe Kurve beschreibt.

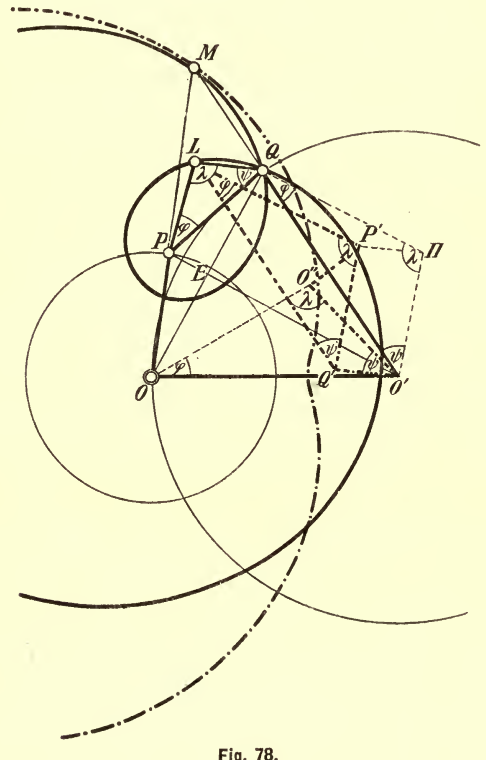


Fig. 78.

Wir bestimmen zu diesem Zwecke zunächst den dritten Brennpunkt O'', so daß $\triangle O''OO' \sim \triangle LPQ$, legen dann an QO' das $\triangle \Pi QO' \cong \triangle O''OO'$ an und verschieben dies parallel LQ bis in die Lage $P'LQ'$. Dann ist, wie auch die momentane Stellung des ursprünglichen Vierecks $POO'Q$ sei, $Q'P' \doteq O'O''(= O'\Pi) = \text{konst.}$, $O'Q' = QL = \text{konst.}$

Da die Punkte $O'O''$ fest bleiben, handelt es sich nur noch um die Strecke $O''P'$. Bleibt auch diese während der Bewegung konstant, so können wir $O'O''P'Q'$ als ein zweites Gelenkviereck nehmen, das mit Hilfe des festen Dreiecks $LQ'P'$ ($\sim \triangle PQL$) dieselbe Bewegung vermittelt.

Nun ist aber $LQ : QP = \Pi O' : O'Q$, also $P'\Pi : \Pi O' = QP : O'Q$ und $\sphericalangle P'\Pi O' = \sphericalangle PQO'$, da $P'\Pi$ gegen PQ und $\Pi O'$ gegen QO' um $\sphericalangle \psi$ geneigt sind. Also ist $\triangle P'\Pi O' \sim \triangle PQO'$. Ferner ist infolgedessen $\sphericalangle O''O'P = \sphericalangle P'O'\Pi$ $(= \frac{1}{2} \sphericalangle OO'Q)$ und $\triangle O''O'P \cong \triangle \Pi O'P'$ (Viereck $O''O'\Pi P' \sim$ Viereck $OO'QP$). Hieraus folgt nicht bloß, daß $O''P'$ wirklich konstant bleibt, sondern wir sehen, es ist immer $O''P' = Q'O'$ und das neue Gelenkviereck vermittelt also eine Zwillingskurbelbewegung. Daher ist die Bahnkurve von L auch hier die Fußpunktskurve eines Kegelschnittes. Dieser, sowie der Pol bestimmen sich mittels des Vierecks $O'O''P'Q'$ wie in der vorigen Nummer.

Auch diese Bewegung kann also durch das Rollen kongruenter Kegelschnitte (Ellipsen oder Hyperbeln) aufeinander vermittelt werden. Ist $O'O'' > O''P'$, also $a > l$, so sind es Hyperbeln; wenn $a < l$ ist, Ellipsen. Gehen wir aber vom ursprünglichen Getriebe aus, so ergeben sich andere Polkurven. Das Momentanzentrum M liegt dann im Schnittpunkte der Radien OP und $O'Q$ (Fig. 78). Ist E der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks $OO'QP$, und betrachten wir das Dreieck MOQ als durch die Transversale PO' geschnitten, so ist nach dem Satz des Menelaos (ohne Rücksicht auf Streckenvorzeichen)

$$OP \cdot MO' \cdot QE = MP \cdot QO' \cdot OE \tag{7}$$

oder, wenn wir $OM = \varrho_1$, $O'M = \varrho_2$ setzen und da $QE = OE$ ist,

$$l\varrho_2 = a(\varrho_1 - l)\,. \tag{8}$$

Schreibt man dies in der Form

$$\frac{a}{l}\varrho_1 - \varrho_2 = a\,, \tag{8*}$$

so erkennt man, daß dies die bipolare Gleichung einer Pascalschen Schnecke ist (Nr. 64) mit O als Doppelpunkt

und OO' als Achse. Betrachtet man PQ als fest und setzt $PM = \varrho'$, $QM = \varrho''$, so erhält man ebenso aus (7) die Gleichung

$$\varrho' - \frac{l}{a}\varrho'' = l\,. \tag{9}$$

Das ist eine andere Pascalsche Schnecke mit Q als Doppelpunkt und PQ als Achse. Ist $a > l$, wie in unserer Figur, so hat (8*) einen isolierten Punkt, (9) einen Knoten; für $a < l$ ist es umgekehrt. Dies kann man aus (8*) und (9) direkt ersehen, oder mittels Nr. 51 schließen.

IV. ABSCHNITT.

ROULETTEN, INSBESONDERE ZYKLISCHE KURVEN.

§ 21. **Grundbegriffe der natürlichen Geometrie.**

120. Indem wir dieses Kapitel den Kurven widmen, die beim Abrollen einer Kurve Λ auf einer festen Kurve L durch Punkte der Ebene von Λ erzeugt werden, treten wir durchaus nicht aus dem Gesichtskreise der kinematischen Geometrie. Wir setzen nur von vornherein die beiden Polkurven L und Λ als bekannt voraus. Auch definiert der Begriff »Rollkurve« oder »Roulette« nicht eine abgegrenzte Familie von Kurven. Vielmehr kann jede Kurve durch Abrollen geeigneter Polkurven aufeinander erzeugt werden. Wir wollen jedoch in diesem Kapitel vorzugsweise diejenigen Kurven betrachten, die den einfachsten Polkurven entsprechen. Das ist in erster Linie die große Familie der zyklischen Kurven, für die L bzw. Λ Kreise oder Geraden sind. Des weiteren werden wir verschiedene allgemeine Theoreme, besonders in bezug auf Krümmungsmittelpunkte, aufstellen, die auf die schon behandelten Rollkurven rückwirkende Anwendung finden können. Außer den Krümmungsradien spielen bei Rouletten natürlich die Bogenlängen der Polkurven eine hervorragende Rolle. Wir werden durch diese Überlegung an die schon öfter gelegentlich eingeführten »natürlichen Koordinaten« $\mathcal{R}$, s erinnert. In der Tat lassen sich diese besonders bei Rollkurven in sehr eleganter Weise verwenden. Da wir indessen die Kenntnis von deren Anwendung beim Leser nicht voraussetzen wollen, müssen wir einiges Allgemeinere vorausschicken.

Wir haben bisher unsere Kurven immer mittels irgendwelcher, zur Kurve eigentlich nicht in Beziehung stehender Koordinaten untersucht. Wirklich war es erst seit Er-

findung der analytischen Geometrie möglich, eine solche Fülle von geometrischen Tatsachen zu entdecken und zu beherrschen. Die sogenannte projektive Geometrie ist heute noch keineswegs imstande, auch nur die projektiven Eigenschaften der algebraischen Kurven befriedigend darzustellen. Für metrische Eigenschaften und für transzendente Kurven versagt sie fast völlig. Trotzdem ist nicht zu bestreiten, daß die Anwendung der kartesischen Koordinaten auf die geometrischen Gebilde deswegen etwas Mißliches hat, weil sich die Gleichung sofort vollständig ändert, wenn wir der Kurve eine andere Lage geben, oder, was dasselbe ist, das Koordinatensystem ändern.

121. Aus diesem Grunde hat man schon vom Anfange des 19. Jahrhunderts an den Versuch gemacht, solche Größen als Koordinaten einzuführen, die der Kurve selbst eigentümlich, vom Achsensystem aber unabhängig sind[113]. Erst die Lehre von den kontinuierlichen Transformationsgruppen, die das Lebenswerk von Sophus Lie (1842—1899) bildet, entschied endgültig, welche Größen dies seien und gab den eigentlichen Grund dafür an. Danach müssen diese Größen gegenüber der dreigliedrigen Gruppe der Bewegungen in der Ebene (d. h. gegenüber den ∞^2 Translationen in Verbindung mit je ∞^1 Rotationen) »invariant« bleiben. Da dies für jede stetig ausgeführte Bewegung gelten muß, die man sich aus unendlich vielen unendlich kleinen Bewegungen zusammengesetzt denken kann, nennt man Größen solcher Art »Differentialinvarianten«. Eine solche Größe ist offenbar das Krümmungsmaß k oder dessen reziproker Wert $1/k = \mathcal{R}$, der Krümmungsradius. Dieser ist eine »Differentialinvariante zweiter Ord-

---

113) K. Chr. Fr. Krause, *Novae Theoriae linearum curvarum etc.* hrsg. v. H. Schröder, München 1835. — A. Peters, *Neue Kurvenlehre,* Dresden 1838. — W. Whewell in Trans. Cambr. Phil. Soc. **8** (1849) und **9** (1851). Dieser nannte solche Koordinaten »intrinsic«, was von E. Lampe im Jahrb. Fortschr. Math. **19** (1890), S. 699 mit »natürlich« wiedergegeben wurde. Auch l'Abbé Aoust gebraucht in seinem noch nicht genügend gewürdigten Buche *„Analyse infinitésimale des Courbes planes“* Paris (Gauthier-Villars) 1873, 418 S. 8°, die Bezeichnung »coordonnées naturelles« für diejenigen Größen, auf denen er sein System aufbaut. S. den *Bericht über den gegenw. Stand der Lehre von den natürl. Koord.* von E. Wölffing, Bibl. math. (3) **1**, 1900, 142—159.

nung«, da sein Ausdruck in x, y den zweiten Differentialquotienten enthält. Nun läßt sich zeigen[114]), daß jede andere Differentialinvariante eine Funktion von $\mathcal{R}$ (bzw. k) und den Ableitungen von $\mathcal{R}$ nach dem Tangentenwinkel τ, den die Tangente mit einer festen Richtung bildet, oder, da $ds = \mathcal{R}\,d\tau$, nach dem Bogen s ist.

122. Sind nun z. B. der Krümmungsradius $\mathcal{R}$ und seine Ableitung nach s als Funktionen der Abszisse x gegeben

$$(1) \qquad \mathcal{R} = \Phi(x)\,, \qquad \frac{d\mathcal{R}}{ds} = \Psi(x)\,,$$

so liefert die Elimination von x eine Gleichung

$$(2) \qquad \frac{d\mathcal{R}}{ds} = \Omega(\mathcal{R})\,,$$

die vom Koordinatensystem ganz unabhängig ist und die Kurve vollständig charakterisiert. Es ist diese Gleichung (2) immer eine gewöhnliche Differentialgleichung 3. Ordnung in x, y, deren Lösung nach einem Lieschen Satze, da ihre Gruppe bekannt ist, immer durch Quadraturen möglich ist[115]). Beachten wir die geometrische Bedeutung der vorkommenden Größen, so erhalten wir aus (2) zunächst

$$(3) \qquad \mathcal{R} = f(s)\,,$$

wobei die Integrationskonstante in f eingeschlossen sein mag. Diese Gleichung (3) im speziellen heißen wir »natürliche Gleichung« einer Kurve. Gegenüber (2) hat sie den kleinen Nachteil, daß sie eine zu s additive Konstante enthält, die durch den Anfangspunkt der Bogen bestimmt werden muß, aber den großen praktischen Vorteil, daß sie keine Differentialquotienten enthält. Ihre Theorie hat besonders E. Cesàro ausgebaut, dessen Entwicklungen wir im folgenden häufig benutzen[116]). Da ferner, wenn τ gegen eine als x-Achse dienende Gerade gemessen wird,

$$(4) \qquad \frac{dx}{ds} = \cos\tau\,, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\tau\,,$$

---

[114]) Siehe z. B. *Einführung in die Theorie der Curven* von G. Scheffers. Leipzig (Veit & Comp.) 1901, S. 42—55.

[115]) Vgl. Lie-Scheffers, *Diff.-Gl. mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Leipzig 1891, S. 562—66.

[116]) Vgl. dessen *Vorl. über natürliche Geometrie*, herausgeg. von G. Kowalewski, Leipzig 1901.

während man für τ ($\mathcal{R}\, d\tau = ds$) hat

(5) $$\tau = \int \frac{ds}{\mathcal{R}},$$

so ergibt sich die Parameterdarstellung in rechtwinkligen Koordinaten

(6) $$x = \int \cos\tau\, ds\,, \qquad y = \int \sin\tau\, ds$$

oder

(6*) $$x = \int \mathcal{R} \cos\tau\, d\tau\,, \qquad y = \int \mathcal{R} \sin\tau\, d\tau\,,$$

die durch Elimination von τ (oder s) auf die kartesische Gleichung führt. Diese enthält in der Tat drei willkürliche Konstante, die durch die Quadraturen (5) und (6*) hereinkommen. Setzen wir $\tau = t + \alpha$, so ergibt sich nach (6*)

(6†) $$\begin{cases} x = \cos\alpha \int\limits_{t_0}^{t} \mathcal{R} \cos t\, dt - \sin\alpha \int\limits_{t_0}^{t} \mathcal{R} \sin t\, dt + a \\ y = \cos\alpha \int\limits_{t_0}^{t} \mathcal{R} \sin t\, dt + \sin\alpha \int\limits_{t_0}^{t} \mathcal{R} \cos t\, dt + b\,. \end{cases}$$

Die so dargestellte Kurve geht aber durch die Transformation der Koordinaten

(7) $$\begin{cases} x = \mathfrak{x} \cos\alpha - \mathfrak{y} \sin\alpha + a \\ y = \mathfrak{x} \sin\alpha + \mathfrak{y} \cos\alpha + b \end{cases}$$

aus der Kurve

(8) $$\mathfrak{x} = \int\limits_{t_0}^{t} \mathcal{R} \cos t\, dt\,, \qquad \mathfrak{y} = \int\limits_{t_0}^{t} \mathcal{R} \sin t\, dt$$

hervor. Gleichung (6†) gibt also nur alle ∞^3 Lagen der Kurve (8) gegen ein festes Koordinatensystem. Damit ist erwiesen, daß alle durch Gleichung (3) oder (2) dargestellten Kurven kongruent sind. Umgekehrt entspricht jeder Kurve eine einzige Gleichung (2), aber ∞^1 Gleichungen (3), die alle durch die Transformation $s = \bar{s} + c$ auseinander hervorgehen.

Beisp. Da wir Kurven mit einfachen natürlichen Gleichungen noch nicht kennen, wollen wir nur den Fall betrachten, daß die Krümmung konstant, $\mathcal{R} = a$ sei. Wir erhalten aus (5) $\tau = s/a$, aus (6*) $x = -a \sin\tau$, $y = a \cos\tau$, wo wir alle Konstanten auf

Grund des gegebenen Beweises wegließen. Die kartesische Gleichung ist also $x^2 + y^2 = a^2$. Das ist, wie vorauszusehen war, der Kreis mit dem Radius a. Ist $a = 0$, so geht er in einen Punkt über. Wird $a = \infty$, so ergibt sich $\tau = 0$ (oder konstant) und $x/y = 0$ (oder konstant); das ist selbstverständlich die Gerade.

123. Die natürlichen Koordinaten würden wenig Wert haben, wenn wir sie nicht ohne Vermittlung eines festen rechtwinkligen Achsensystems zu gebrauchen verständen. Freilich können wir, um die Lage eines Punktes gegenüber der Kurve zu fixieren, ein solches doch nicht ganz entbehren. Aber wir werden es mit dem Punkte A, auf den sich $\mathcal{R}$ und s der natürlichen Gleichung beziehen, beweglich machen, so zwar, daß die Tangente des Kurvenpunktes x-Achse, die Normale y-Achse ist. Nennen wir dann x und y die Koordinaten eines (im allgemeinen nicht fest gegen die Kurve gedachten) Punktes P in bezug auf das System der Tangente und Normale des Kurvenpunktes A, so sind x, y Funktionen von s, und die Koordinaten des Punktes P', der aus P hervorgeht, indem man A in die unendlich benachbarte Lage A' überführt (Fig. 79), sind in bezug auf das System der Tangente und Normale in A' bzw. $x + dx$, $y + dy$. Nennen wir die Verschiebungen von P gegen das ursprüngliche System δx und δy, so bestehen zwischen den Koordinaten von P' in bezug auf beide Systeme die folgenden Gleichungen, wo Δx, Δy, $\Delta\tau$ die Koordinaten von A' im alten System sind:

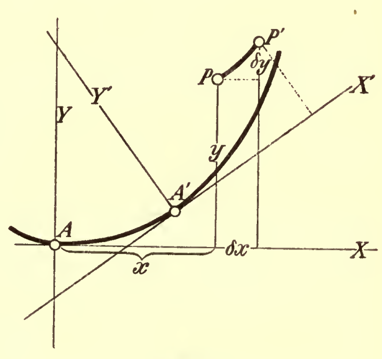


Fig. 79.

$$x + \delta x = \Delta x + (x + dx)\cos\Delta\tau - (y + dy)\sin\Delta\tau$$

$$= x + \Delta x + dx - y\,\Delta\tau\,,$$

$$y + \delta y = \Delta y + (x + dx)\sin\Delta\tau + (y + dy)\cos\Delta\tau$$

$$= y + \Delta y + dy + x\,\Delta\tau\,.$$

Dividiert man hier mit ds $(= \varDelta s = \delta s)$ und bemerkt, daß $\lim \varDelta y/\varDelta x = 0$ und also $\lim \varDelta y/\varDelta s = 0$, $\lim \varDelta x/\varDelta s = 1$ ist, so erhält man die wichtigen Fundamentalformeln

$$(9) \qquad \frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{\mathfrak{R}} + 1\,, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\mathfrak{R}}\,.$$

Ist der Punkt P in der Ebene der Kurve fest, so sind δx und δy Null, und wir erhalten aus (9) die für die Unbeweglichkeit von P notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen

$$(10) \qquad \frac{dx}{ds} = \frac{y}{\mathfrak{R}} - 1\,, \qquad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\mathfrak{R}}\,.$$

Dieselben Bedingungen lauten in Polarkoordinaten

$$(11) \qquad \frac{d\varrho}{ds} = -\cos\theta\,, \qquad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\mathfrak{R}} + \frac{\sin\theta}{\varrho}\,.$$

Will man ferner die Bedingungen für die Unbeweglichkeit einer Geraden aufstellen, die durch den Abstand p vom Anfangspunkt und den Neigungswinkel ω gegen die Tangente gegeben ist und also die Gleichung hat

$$(12) \qquad x \sin\omega - y \cos\omega + p = 0\,,$$

so ist zu bedenken, daß all ihre Punkte (x, y) den Gleichungen (10) genügen müssen. Differenziert man nun (12), so ergibt sich unter Benutzung von (10)

$$(x\cos\omega + y\sin\omega)\left[\frac{1}{\mathfrak{R}} + \frac{d\omega}{ds}\right] + \left[\frac{dp}{ds} - \sin\omega\right] = 0\,.$$

Es müssen demnach, soll diese Gleichung für unendlich viele Werte von x, y erfüllt sein, die Ausdrücke der eckigen Klammern einzeln verschwinden, d. h. es muß

$$(13) \qquad \frac{d\omega}{ds} = -\frac{1}{\mathfrak{R}}\,, \qquad \frac{dp}{ds} = \sin\omega$$

sein. Diese beiden Bedingungen sind auch direkt geometrisch verständlich.

124. Ist nun aber der Punkt P gegen die Kurve nicht unbeweglich, seine Koordinaten x, y also solche Funktionen von s, daß die Gleichungen (10) nicht erfüllt

sind, so müssen wir uns die Aufgabe stellen, den Ort P von P in natürlichen Koordinaten $\bar{\mathcal{R}}$, $\bar{s}$ darzustellen. Wir müssen demnach versuchen, auch $\bar{\mathcal{R}}$ und $\bar{s}$ als Funktionen von s darzustellen. Nun hat man ohne weiteres $d\bar{s}^2 = \delta x^2 + \delta y^2 = \varkappa^2 ds^2$, also

$$(14) \quad \bar{s} = \int \varkappa\, ds\,, \quad \text{wo} \quad \varkappa^2 = \left(\frac{dx}{ds} - \frac{y}{\mathcal{R}} + 1\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} + \frac{x}{\mathcal{R}}\right)^2.$$

Um $\bar{\mathcal{R}}$ in gleicher Weise als Funktion von s zu erhalten, müssen wir die Relation zwischen den Tangentenwinkeln betrachten. Nennen wir die Neigung der Tangente von P im Punkte P gegen die x-Achse ϑ, dann ist $\operatorname{tg}\vartheta = \delta y / \delta x$ und der Neigungswinkel der Tangente in P' gegen die x'-Achse gleich $\vartheta + d\vartheta$. Nennen wir ferner den Tangentenwinkel der Kurve P selbst $\bar{\tau}$, so daß also die Tangenten in P und P' den Winkel $d\bar{\tau}$ bilden, so ist offenbar (vgl. Fig. 80) $\vartheta + d\bar{\tau} = d\tau + \vartheta d\vartheta$, also $d\bar{\tau} = d\tau + d\vartheta$, wenn $d\bar{\tau}$ und $d\tau$ im nämlichen Sinne gemessen sind. Hieraus ergibt sich aber durch Division mit ds

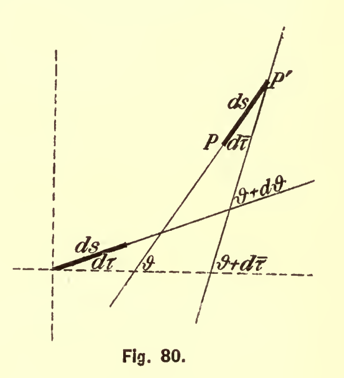


Fig. 80.

$$(15) \qquad \frac{\varkappa}{\bar{\mathcal{R}}} = \frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{d\vartheta}{ds}\,, \qquad \text{wo} \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\delta y}{\delta x}\,,$$

so daß aus (14) und (15) schließlich nur noch s zu eliminieren ist, damit die natürliche Gleichung von P sich ergebe.

Beisp. Wir tragen auf der Tangente vom Berührungspunkte A aus die von einem festen Punkte S der Kurve (im Sinne der Drehung der Tangente) gemessene Bogenlänge bis P auf. Dann hat der Punkt P die Koordinaten $x = -s$, $y = 0$. Der Ort des Punktes P ist nach unseren früheren Erläuterungen (Nr. 81) die Evolvente P der Grundkurve, die in S mit einer Spitze ansetzt. Wir erhalten nach (9) $\delta x / ds = 0$, $\delta y / ds = s / \mathcal{R}$, also $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, $\varkappa = s / \mathcal{R}$. Hiernach kommt aus (14) $d\bar{s} = s\, ds / \mathcal{R}$ und aus (15) $\bar{\mathcal{R}} = s$. Diese Gleichungen stimmen mit den seinerzeit für die Evolute gegebenen [Nr. 81 (10)] völlig überein. Für $s = 0$ ist

wirklich $\overline{\mathcal{R}} = 0$, d. h. die Evolvente hat eine Spitze, die wegen $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ auf der Grundkurve senkrecht steht.

Für die bekannteste und in natürlichen Koordinaten einfachste Evolvente, die »gewöhnliche Kreisevolvente«, ergibt sich hiernach die Gleichung

(15 a) $$\mathcal{R}^2 = 2as,$$

wo a der Radius des Kreises ist und die Striche über den Koordinaten weggelassen wurden. Da man für τ den Wert $\mathcal{R}/a$ erhält, $\mathcal{R}$ aber mit dem abgewickelten Kreisbogen ins Unendliche wächst, so wächst auch τ unbegrenzt, d. h. die Kurve geht von der Spitze für $s = 0$ aus nach beiden Seiten in immer flacher werdenden Windungen um den Grundkreis herum ins Unendliche. Nach (6*) erhalten wir für die Kurve die bekannte Parameterdarstellung in kartesischen Koordinaten, auf die Tangente und Normale der Spitze bezogen

(15 a*) $$\begin{cases} x = a\int\limits_0^\tau \tau\cos\tau\, d\tau = a(\cos\tau + \tau\sin\tau) \\ y = a\int\limits_0^\tau \tau\sin\tau\, d\tau = a(\sin\tau - \tau\cos\tau) . \end{cases}$$

125. In gleicher Weise wie den Ort eines Punktes P müssen wir die Einhüllende einer mit s veränderlichen Kurve $\mathsf{U}(x, y, s) = 0$ bestimmen. Wir setzen aus der gewöhnlichen Differentialgeometrie als bekannt voraus, daß die Einhüllende identisch ist mit dem Orte der Schnittpunkte unendlich benachbarter Kurven $\mathsf{U}(s)$ und $\mathsf{U}(s+ds)$. Demnach haben wir nur U nach s zu differenzieren und die Unbeweglichkeitsbedingungen (10) zu beachten. Bestimmt man also x und y aus den beiden Gleichungen

(16) $$\mathsf{U}(x, y, s) = 0, \qquad \left(\frac{y}{\mathcal{R}} - 1\right)\frac{\partial \mathsf{U}}{\partial x} - \frac{x}{\mathcal{R}}\frac{\partial \mathsf{U}}{\partial y} + \frac{\partial \mathsf{U}}{\partial s} = 0$$

als Funktionen von s, so ist das Problem auf das in der vorigen Nummer behandelte zurückgeführt.

Beisp. 1. Suchen wir die Einhüllende der Kurvennormale, welche die Gleichung $x = 0$ hat, so ergibt sich durch Differentiation sofort $y/\mathcal{R} - 1 = 0$ oder $y = \mathcal{R}$, d. h. die Normale berührt ihre Enveloppe im Krümmungszentrum. Hieraus erhält man $\delta x/ds = 0$, $\delta y/ds = d\mathcal{R}/ds$, also wieder $\bar{s} = \int d\mathcal{R} = \mathcal{R}$ und $d\mathcal{R}/\overline{\mathcal{R}}\, ds = 1/\mathcal{R}$, das sind dieselben Gleichungen wie oben für die Evolvente, nur daß die gestrichenen und ungestrichenen Koordinaten vertauscht sind.

2. Wir können ebenso die Einhüllende einer Geraden bestimmen, die durch den Kurvenpunkt geht und gegen die Kurvennormale immer unter dem Winkel ε geneigt ist. Man heißt solche Kurven »Evolutoiden« der gegebenen Kurve. Sie gehen für $\varepsilon = 0$ in die gewöhnliche Evolute über. Die Gleichung der erzeugenden Geraden ist $U \equiv y - x \operatorname{ctg} \varepsilon = 0$. Die Differentiation ergibt $(y - \mathcal{R}) \operatorname{ctg} \varepsilon + x = 0$. Also ist für den momentanen Berührungspunkt $x = \mathcal{R} \sin\varepsilon \cos\varepsilon$, $y = \mathcal{R} \cos^2\varepsilon$ oder in Polarkoordinaten $\varrho = \mathcal{R} \cos\varepsilon$, $\theta = \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$. Das gibt den schon von Réaumur[117]) ausgesprochenen Satz: *Der Berührungspunkt einer unter festem Winkel gegen die Kurvennormale geneigten Geraden mit ihrer Enveloppe liegt im Fußpunkt des vom Krümmungszentrum des zugehörigen Kurvenpunktes auf die Gerade gefällten Lotes.*

Aus den Werten für x und y hat man ferner

$$\frac{\delta x}{ds} = \sin\varepsilon \left(\frac{d\mathcal{R}}{ds} \cos\varepsilon + \sin\varepsilon\right), \qquad \frac{\delta y}{ds} = \cos\varepsilon \left(\frac{d\mathcal{R}}{ds} \cos\varepsilon + \sin\varepsilon\right),$$

so daß $\varkappa$ gleich dem Klammerausdruck wird. Demnach ist für die Evolutoide

$$(17) \qquad \begin{cases} \overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \sin\varepsilon + \dfrac{d\mathcal{R}}{d\tau} \cos\varepsilon \\ \overline{s} = s \sin\varepsilon + \int d\mathcal{R} \cos\varepsilon \,. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen heißt die Habichsche[118]) Formel. Diese wird uns später nützlich sein. Hier sei nur bemerkt: Ist $\mathcal{R} = a$, so wird $\overline{\mathcal{R}} = a \sin\varepsilon$. Die Evolutoide eines Kreises ist also ein konzentrischer Kreis.

126. Als größere Anwendung der allgemeinen Ausführungen wollen wir noch die natürliche Gleichung eines Kegelschnittes aufstellen. Diese ist zwar an sich nicht einfach; aber sie interessiert uns, da wir schon Gelegenheit hatten, die natürlichen Gleichungen der Parabel und gleichseitigen Hyperbel als spezieller Sinusspiralen kennen zu lernen (Nr. 93); andererseits wird sie uns unten (Nr. 199) von Wert sein.

Der Kegelschnitt habe, auf eine Tangente als x-Achse und die zugehörige Normale als y-Achse bezogen, die Gleichung

$$(18) \qquad y = \tfrac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta x y + \gamma y^2)\,.$$

Es sei gleich bemerkt, daß die Parabel $y = \frac{1}{2}\alpha x^2$ den Kegelschnitt im Anfangspunkt dreipunktig berührt, so daß

117) Mém. Ac. Sc. Paris 1709.
118) Les Mondes **19**, 1869, 33.

sie denselben Krümmungsradius $\mathcal{R} = \lim x^2/2y = 1/\alpha$ wie der Kegelschnitt hat (s. die Formel in Nr. 54). Um die natürliche Gleichung von (18) zu finden, suchen wir die Einhüllende des Kegelschnittes nach (16), die mit diesem identisch sein muß. Wir differenzieren also (18), wobei zu beachten ist, daß auch die Koeffizienten α, β, γ Funktionen von s sind und stellen die Bedingungsgleichungen auf, daß die neue Gleichung (19) mit (18) identisch sei. Man erhält

$$(19)\quad \begin{cases} \left(\alpha - \frac{1}{\mathcal{R}}\right)x + \beta y = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{d\alpha}{ds} - \frac{2\beta}{\mathcal{R}}\right) + xy\left(\frac{d\beta}{ds} + \frac{\alpha-\gamma}{\mathcal{R}}\right) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}y^2\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{2\beta}{\mathcal{R}}\right). \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichungen sind dann

$$(20)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\mathcal{R}}, \quad \frac{d\alpha}{ds} = \beta\left(\alpha + \frac{2}{\mathcal{R}}\right), \\ \frac{d\beta}{ds} = \beta^2 - \frac{\alpha-\gamma}{\mathcal{R}}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \beta\left(\gamma - \frac{2}{\mathcal{R}}\right). \end{cases}$$

Die erste derselben bestätigt nur unsere obige Bemerkung; in Verbindung mit der rechts von ihr stehenden ergibt sie sofort

$$(21)\qquad \beta = \frac{\mathcal{R}}{3}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\mathcal{R}}\right) = -\frac{1}{3\mathcal{R}}\cdot\frac{d\mathcal{R}}{ds} = \frac{d}{ds}\log\mathcal{R}^{-\frac{1}{3}}.$$

Im weiteren ist es von Vorteil, die orthogonalen Invarianten des Kegelschnittes zu berechnen. Diese sind $\alpha + \gamma$ und $\Delta \equiv \alpha\gamma - \beta^2$. Beide Größen bleiben völlig ungeändert, welches rechtwinklige System man auch zugrunde legen möge. Nun ist

$$\frac{d}{ds}(\alpha + \gamma) = \beta(\alpha + \gamma), \qquad \frac{d\Delta}{ds} = 2\beta\Delta$$

oder

$$\frac{d}{ds}\log(\alpha+\gamma) = \frac{d}{ds}\log\mathcal{R}^{-\frac{1}{3}}, \qquad \frac{d}{ds}\log\Delta = \frac{d}{ds}\log\mathcal{R}^{-\frac{2}{3}},$$

also, wenn μ und ν zwei Konstante sind,

$$(22)\qquad \alpha + \gamma = \mu\mathcal{R}^{-\frac{1}{3}}, \qquad \Delta = \nu\mathcal{R}^{-\frac{2}{3}}.$$

Um nun zur natürlichen Gleichung des Kegelschnittes zu gelangen, müssen wir uns nur noch nach einer Relation

zwischen α, β und den zwei Größen von (22) umsehen. Es ist aber

$$\beta^2 = -\Delta + \alpha\gamma = -\Delta + \alpha(\alpha+\gamma) - \alpha^2$$

oder, wenn wir die bezüglichen Werte einsetzen,

$$(23) \qquad \frac{1}{9}\left(\frac{d\mathcal{R}}{ds}\right)^2 = \mu\,\mathcal{R}^{\frac{2}{3}} - \nu\,\mathcal{R}^{\frac{4}{3}} - 1\,.$$

Danach können wir die gesuchte natürliche Gleichung in der Form schreiben

$$(24) \qquad s = \frac{1}{3}\int\frac{d\mathcal{R}}{\sqrt{\mu\cdot\mathcal{R}^{\frac{2}{3}} - \nu\,\mathcal{R}^{\frac{4}{3}} - 1}}\,.$$

Sind die beiden Achsenlängen $2a$ und $2b$ gegeben, so lassen sich μ und ν natürlich durch a und b ausdrücken. Wir benutzen dazu die Gleichungen (22), indem wir die orthogonalen Invarianten für einen Scheitel berechnen. Die Gleichung (18) wird dann

$$(25) \qquad y = \frac{a}{2}\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}\right)$$

und man erhält, da $\mathcal{R} = b^2/a$,

$$\alpha + \gamma = \mu\cdot\frac{b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{a}{b^2} + \frac{1}{a}\,, \qquad \Delta = \nu\cdot\frac{b^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{b^2}\,,$$

also

$$(26) \qquad \mu = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}\,, \qquad \nu = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{2}{3}}}\,.$$

Da nun ν das Produkt der beiden Summanden von μ ist, kann man (24) schließlich in der Form schreiben

$$(27) \qquad s = \frac{1}{3}\int\frac{d\mathcal{R}}{\sqrt{\left[\left(\frac{a\,\mathcal{R}}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]\left[1 - \left(\frac{b\,\mathcal{R}}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}}\,.$$

Für die gleichseitige Hyperbel ($b = i\,a$) ist $\mu = 0$, für die Parabel $\nu = 0$ und $\lim b^2/a = p$, also $\mu = p^{-\frac{2}{3}}$. Dadurch gehen aus (27) die früher gefundenen speziellen Formen für diese besonderen Kegelschnitte hervor (S. 135).

Zusätze. 1. Aus den in (20) und (21) gegebenen Werten von α und β läßt sich sehr leicht eine schon von MACLAURIN gegebene Konstruktion des Krümmungszentrums der Evolute eines Kegelschnittes ableiten. Der Mittelpunkt des Kegelschnittes (18) liegt auf der Geraden

$$\alpha x + \beta y = 0,$$

die man durch partielle Differentiation nach x erhält. Diese geht nun durch die angedeuteten Substitutionen, da

$$\beta = -\frac{1}{3\mathcal{R}^2} \cdot \frac{\mathcal{R}\, d\mathcal{R}}{ds} = -\frac{\overline{\mathcal{R}}}{3\mathcal{R}^2},$$

über in

$$3\mathcal{R} x = \overline{\mathcal{R}} y \qquad \text{oder} \qquad y/x = \mathcal{R}/\tfrac{1}{3}\overline{\mathcal{R}}.$$

Ist nun C der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt A des Kegelschnittes, $\overline{C}$ der für die Evolute in bezug auf den Punkt C und trifft $\overline{C}C$ den Durchmesser von A im Punkte Q, so ist $CQ = \frac{1}{3}\overline{\mathcal{R}}$. Der Krümmungsradius der Evolute ist also dreimal so groß wie die Strecke CQ.

2. Wegen einer späteren Anwendung wollen wir noch die Polarkoordinaten der Brennpunkte für ein aus Tangente und Normale bestehendes Koordinatensystem bestimmen. Die beiden Radienvektoren zu den Brennpunkten seien ϱ, ϱ', die auf die Tangente bezogenen Polarwinkel θ, θ', dann ist $\varrho + \varrho' = 2a$, $\theta + \theta' = \pi$. Gemäß den Unbeweglichkeitsbedingungen (11) hat man

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{\sin\theta}{\varrho}, \qquad \frac{d\theta'}{ds} = -\frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{\sin\theta'}{\varrho'},$$

woraus durch Addition die Gleichung entsteht

$$\frac{2}{\mathcal{R}} = \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right)\sin\theta, \tag{28}$$

eine schon von DE L'HOSPITAL[118a]) gegebene Formel für den Krümmungsradius. Liegt eine Hyperbel zugrunde, so ist $\varrho - \varrho' = 2a$, $\theta + \theta' = 2\pi$, und die letzte Formel enthält ein Minus- statt des Pluszeichens. Im Falle der Ellipse kann man statt (28) schreiben

$$\varrho(2a - \varrho) = a\mathcal{R}\sin\theta \quad (= \varrho\varrho'). \tag{29}$$

Diese Gleichung ist durch eine weitere zu ergänzen, die man aus dem $\triangle AFF'$ mittels des Kosinussatzes erhält. Sie lautet

$$4(a^2 - b^2) = \varrho^2 + \varrho'^2 + 2\varrho\varrho'\cos 2\theta = (\varrho + \varrho')^2 - 4\varrho\varrho'\sin^2\theta$$

und schließlich

$$a\mathcal{R}\sin^3\theta = b^2. \tag{30}$$

[118a]) *Anal. des inf. petits.* Paris. 1. Aufl. 1696, 109.

Aus (30) kommt $\sin\theta = \sqrt[3]{b^2/a\,\mathcal{R}}$, aus (29) dann die Gleichung $\varrho(2\,a - \varrho) = \sqrt[3]{a^2\,b^2\,\mathcal{R}^2}$ für die beiden Radienvektoren.

§ 22. Allgemeine Behandlung der Rollkurven in natürlichen Koordinaten.

127. Wenn wir nun eine Kurve Λ auf einer fest gedachten Kurve L rollen lassen, so ist es für die Vorstellung und die Gestaltung der Formeln bequem, einen Moment der Bewegung zu wählen, wo die beiden Kurven sich im Berührungspunkte M die konvexen Seiten zukehren. Wir müssen dann, um bei den zwei Kurven dasselbe Koordinatensystem verwenden zu können, etwa für die feste Kurve die Richtung der y-Achse umkehren und also z. B. in den Fundamentalformeln (9) des vorigen Paragraphen überall y durch $-y$ ersetzen. Bezeichnen wir die Koordinaten der rollenden Kurve mit $\mathcal{R}_\lambda$, s_λ, die der festen nur mit $\mathcal{R}$ und s, so ist für den beschreibenden, in der Ebene dieser Kurve festen Punkt P nach den Unbeweglichkeitsbedingungen

$$(1) \qquad \frac{dx}{ds_\lambda} = \frac{y}{\mathcal{R}_\lambda} - 1\,, \qquad \frac{dy}{ds_\lambda} = -\frac{x}{\mathcal{R}_\lambda}\,.$$

Die unendlich kleinen Verschiebungen aber, die P gegen die feste Ebene erleidet, sind gegeben durch

$$(2) \qquad \frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} + \frac{y}{\mathcal{R}} + 1\,, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} - \frac{x}{\mathcal{R}}\,.$$

Hier können wir die Werte von (1) einsetzen, da ja $ds = ds_\lambda$ sein muß, und erhalten

$$(3) \qquad \frac{\delta x}{ds} = \frac{y}{Q}\,, \qquad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{x}{Q}\,,$$

wo

$$(4) \qquad \frac{1}{Q} = \frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{1}{\mathcal{R}_\lambda}$$

gesetzt ist. Die Elemente der von P beschriebenen Roulette P nennen wir $\overline{\mathcal{R}}$, $\bar{s}$. Ist ferner ϑ der Neigungswinkel der Tangente in P gegen die x-Achse (vgl. Fig. 81), so hat man $\operatorname{tg}\vartheta = \delta y/\delta x = -x/y$, also $\theta = \vartheta - \frac{1}{2}\pi$. Das

besagt nichts anderes, als daß die Kurvennormale in P durch M, das Momentanzentrum der Bewegung, geht.

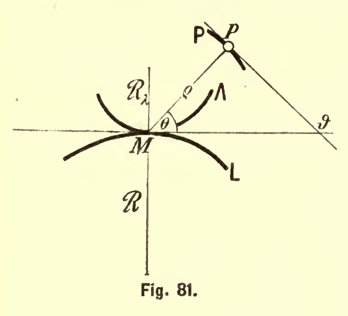


Fig. 81.

Aus (3) erhält man ferner sofort

(4a) $$\varkappa = d\bar{s}/ds = \varrho/\mathfrak{Q},$$

also

(5) $$\bar{s} = \int \frac{\varrho}{\mathfrak{Q}}\, ds\,.$$

Des weiteren gibt hier die Formel (15) des vorigen Paragraphen, wenn man die positiven Richtungen der Tangente und Normale von P so orientiert, daß sie durch eine einzige Drehung mit den auf L bezogenen zur Deckung gebracht werden können,

(6) $$\frac{\varkappa}{\overline{\mathfrak{R}}} = \frac{1}{\mathfrak{R}} - \frac{d\vartheta}{ds}$$

und wegen der Unbeweglichkeit von P nach Formel (11)

(7) $$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\mathfrak{R}_\lambda} + \frac{\sin\theta}{\varrho}\,.$$

Setzt man diesen Wert in (6), so erhält man

(8) $$\frac{\varkappa}{\overline{\mathfrak{R}}} = \frac{1}{\mathfrak{Q}} - \frac{\sin\theta}{\varrho}\,,$$

und wenn man den für $\varkappa$ erhaltenen Wert (4a) benutzt,

(9) $$\frac{1}{\overline{\mathfrak{R}}} = \frac{1}{\varrho} - \frac{\mathfrak{Q}\sin\theta}{\varrho^2}\,,$$

Die Formeln (5) und (9) gestatten, die natürliche Gleichung von P wenigstens in Parameterdarstellung zu geben, sofern nur die rechten Seiten etwa durch s ausdrückbar sind.

128. Die Formel (9) dient auch zur Konstruktion des Krümmungsradius von P, wenn $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_\lambda$ und die Lage von P gegeben sind. Zu diesem Zwecke schreibt man sie in der Form

$$\frac{1}{\mathfrak{Q}\sin\theta} = \frac{\overline{\mathfrak{R}}}{\varrho(\overline{\mathfrak{R}} - \varrho)}\,,$$

oder schließlich

$$(10)\qquad \frac{1}{\overline{\mathcal{R}} - \varrho} + \frac{1}{\varrho} = \left(\frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{1}{\mathcal{R}_\lambda}\right)\frac{1}{\sin\theta}.$$

Diese Gleichung wird die »Savarysche Formel«[119]) genannt. Aus ihr hat schon F. SAVARY eine sehr einfache Konstruktion von $\overline{\mathcal{R}}$ hergeleitet, die wir besser verstehen, wenn wir zuerst einen geometrischen Hilfssatz ableiten.

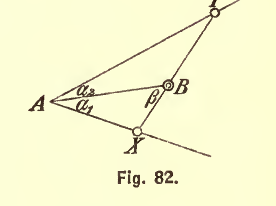


Fig. 82.

Dieser Hilfssatz lautet: *Ist ein Winkel vom Scheitel A und ein Punkt B gegeben, und sind die Schnittpunkte einer durch B gehenden Geraden mit den Schenkeln des Winkels X, Y* (vgl. Fig. 82), *so ist*

$$(11)\qquad \left(\frac{1}{XB} + \frac{1}{BY}\right)\frac{1}{\sin(ABX)} = \text{konst.}$$

Setzen wir $\sphericalangle ABX = \beta$, $\sphericalangle XAB = \alpha_1$, $\sphericalangle BAY = \alpha_2$, so hat man

$$\frac{1}{XB} = \frac{\sin(\beta + \alpha_1)}{AB \cdot \sin\alpha_1}, \qquad \frac{1}{BY} = \frac{\sin(\beta - \alpha_2)}{AB \cdot \sin\alpha_2},$$

also

$$\frac{1}{XB} + \frac{1}{BY} = \frac{\sin\beta \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{AB \cdot \sin\alpha_1 \sin\alpha_2},$$

woraus sofort (11) folgt.

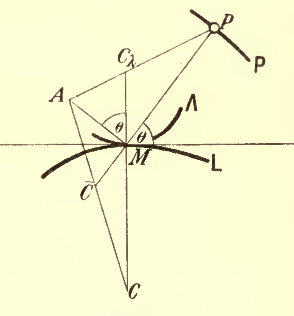


Fig. 83.

Sind nun C_λ und C die Krümmungsmittelpunkte von Λ und L (Fig. 83), so läßt sich Formel (11) jedenfalls für einen Punkt A in bezug auf die Strecken $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}_\lambda$ anwenden, der auf einem in M zu MP errichteten Lote liegt. Ist $\overline{C}$ das gesuchte Krümmungszentrum für P, so ist $MP = \varrho$, $M\overline{C} = \overline{\mathcal{R}} - \varrho$, und wenn

[119]) Vgl. Journ. de math. (1) **10**, 1845, 204/5. — Die Formel selbst war schon EULER bekannt (Novi Comm. Acad. Petrop. **11**, 1765, 207, Suppl.: *„De fig. dentium rotarum“*).

wir uns auf der linken Seite von (10) noch den Faktor $1/\sin\frac{1}{2}\pi$ hinzudenken, so können wir in bezug auf die beiden Strecken ϱ und $\overline{\mathfrak{R}} - \varrho$ die Formel (11) wieder für einen auf dem schon genannten Lote liegenden Punkt anwenden. Dieser Punkt A ist daher durch PC_λ bestimmt, und man hat folgende Konstruktion von $\overline{C}$: *Ziehe in M das Lot zu MP, schneide dieses in A durch PC_λ, dann treffen sich CA und PM in $\overline{C}$.*

129. Wünscht nun der Leser sofort eine Anwendung der bisher gegebenen Theorie, so möge er in Nr. 138 das Studium der zykloidalen Kurven aufnehmen, um dann hierher zurückzukehren. Wir wollen die allgemeine Behandlung nicht unterbrechen und denken uns jetzt mit der rollenden Kurve Λ eine Kurve U fest verbunden, deren Einhüllende E wir suchen. Reduziert sich U auf einen Punkt, so kommt die Aufgabe auf die eben behandelte zurück. Wir wollen U dadurch gegeben denken, daß $\mathfrak{R}_u$ und $\varkappa_u = ds_u/ds_\lambda$ als Funktionen von s_λ bekannt sind. Außerdem muß natürlich auch die jeweilige Lage des Berührungspunktes P von U mit der Enveloppe E in bezug auf das Momentanzentrum M angebbar sein. Letzteres wird dadurch erleichtert, daß wir bereits wissen, MP muß eine Normale von U in P sein (Nr. 38). Wir müssen uns dann bestreben, $\overline{\mathfrak{R}}$ und $\varkappa = d\overline{s}/ds$ für die Kurve E als Funktionen von s darzustellen.

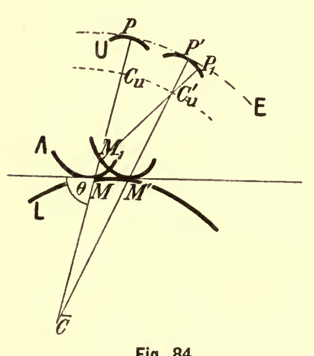


Fig. 84.

Betrachten wir zu diesem Zwecke eine unendlich benachbarte Lage, wo P nach P' gekommen und M' das Momentanzentrum ist ($MM' = ds$, $PP' = \varkappa\, ds$; vgl. Fig. 84). Dann schneiden sich MP und $M'P'$ im Krümmungsmittelpunkt $\overline{C}$ von E und es ist

$$PP' : P\overline{C} = MM' \sin\theta : M\overline{C}$$

oder

$$\varkappa : \overline{\mathfrak{R}} = \sin\theta : (\overline{\mathfrak{R}} - \varrho)\,. \tag{12}$$

Eine ganz entsprechende Beziehung erhält man, wenn man in der beweglichen Ebene die Punkte M_1 und P_1 betrachtet, die den Punkten M und P nach der unendlich kleinen Drehung entsprechen. Hier ist nämlich, wenn M_1P_1 und $M'P'$ sich in C_u' schneiden,

$$P_1P' : P_1C_u' = M_1M' \sin\theta : M_1C_u$$

oder

(13) $$\varkappa_u : \mathcal{R}_u = \sin\theta : (\mathcal{R}_u - \varrho)\,.$$

Nun ist aber in der beweglichen Ebene $\delta x = ds_u \sin\theta$, $\delta y = -ds_u \cos\theta$, also

(14) $$\frac{\delta x}{ds_\lambda} = \varkappa_u \sin\theta = \varkappa_u \frac{y}{\varrho}\,, \qquad \frac{\delta y}{ds_\lambda} = -\varkappa_u \cos\theta = -\varkappa_u \frac{x}{\varrho}\,.$$

Trägt man diese Werte in die sich auf die bewegliche Kurve beziehenden Fundamentalformeln ein, die lauten

(15) $$\frac{\delta x}{ds_\lambda} = \frac{dx}{ds_\lambda} - \frac{y}{\mathcal{R}_\lambda} + 1\,, \qquad \frac{\delta y}{ds_\lambda} = \frac{x}{\mathcal{R}_\lambda} - \frac{dy}{ds_\lambda}\,,$$

so erhält man die Werte

(16) $$\frac{dx}{ds_\lambda} = y\left(\frac{\varkappa_u}{\varrho} + \frac{1}{\mathcal{R}_\lambda}\right) - 1\,, \qquad \frac{dy}{ds_\lambda} = -x\left(\frac{\varkappa_u}{\varrho} + \frac{1}{\mathcal{R}_\lambda}\right).$$

Diese Ausdrücke kann man nun wieder, da $ds_\lambda \doteq ds$ sein soll, in die Formeln (2) für die feste Kurve eintragen, und man bekommt so schließlich für die Variationen von P in der festen Ebene die Formeln

(17) $$\begin{cases} \dfrac{\delta x}{ds} = y\left(\dfrac{\varkappa_u}{\varrho} + \dfrac{1}{\mathcal{R}_\lambda}\right) + \dfrac{y}{\mathcal{R}} = y\left(\dfrac{\varkappa_u}{\varrho} + \dfrac{1}{Q}\right), \\[2ex] \dfrac{\delta y}{ds} = -x\left(\dfrac{\varkappa_u}{\varrho} + \dfrac{1}{\mathcal{R}_\lambda}\right) - \dfrac{x}{\mathcal{R}} = -x\left(\dfrac{\varkappa_u}{\varrho} + \dfrac{1}{Q}\right). \end{cases}$$

Diese bestätigen einerseits, da $\delta y/\delta x = -x/y$, daß der Ort von P mit der Enveloppe von U identisch ist, andererseits erhält man aus ihnen

(18) $$\varkappa = \varkappa_u + \frac{\varrho}{Q}\,.$$

Hieraus ist $\varkappa$ als Funktion von s zu entnehmen. Aus Gleichung (12) erhält man sodann $\overline{\mathcal{R}}$.

130. Setzt man in (18) anstatt $\varkappa$ und $\varkappa_u$ die sich aus (12) und (13) ergebenden Werte ein, so folgt

$$\frac{\overline{\mathcal{R}}}{\overline{\mathcal{R}} - \varrho} + \frac{\mathcal{R}_u}{\varrho - \mathcal{R}_u} = \frac{\varrho}{\mathcal{Q} \sin\theta}.$$

Dies kann man in die Form bringen

$$\frac{(\varrho - \mathcal{R}_u) + (\overline{\mathcal{R}} - \varrho)}{(\overline{\mathcal{R}} - \varrho)(\varrho - \mathcal{R}_u)} = \frac{1}{\mathcal{Q} \sin\theta}$$

oder schließlich

$$(19) \qquad \frac{1}{\overline{\mathcal{R}} - \varrho} + \frac{1}{\varrho - \mathcal{R}_u} = \left(\frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{1}{\mathcal{R}_\lambda}\right) \frac{1}{\sin\theta}.$$

Das ist die Savarysche Formel in etwas erweiterter Gestalt. Setzen wir hier $\varrho - \mathcal{R}_u = \varrho_1$, so hat sie genau die Form (10). Wir müssen also, wie früher P, so hier das jeweilige Krümmungszentrum C_u mit C_λ verbinden, um auf dem Lot zu MP den Punkt A zu erhalten (Fig. 83). Die Tatsache, daß der Ort von C_u mit dem Ort von P das Krümmungszentrum $\overline{C}$ gemein hat, können wir geometrisch besser verstehen, wenn wir bedenken, daß in allen Fällen, wo es sich um gewöhnliche Berührungen handelt, die Kurve im fraglichen Punkt durch den Krümmungskreis ersetzt werden kann. Die Enveloppe eines bestimmten Krümmungskreises ist aber gewiß zum Orte seines Mittelpunktes parallel.

Beisp. Ist die Kurve U, deren Einhüllende E gesucht wird, eine Gerade, welcher Fall wohl fast ausschließlich der Rechnung zugänglich sein wird, so ist $\mathcal{R}_u = \infty$, daher nach (13) $\varkappa_u = \sin\theta$, was geometrisch selbstverständlich ist. Gemäß (18) ist also $\varkappa = \sin\theta + \varrho/\mathcal{Q}$ und da nach (12) $\overline{\mathcal{R}} = \varrho\varkappa/(\varkappa - \sin\theta)$, so hat man ür E folgende Darstellung

$$(20) \qquad \bar{s} = \int\left(\sin\theta + \frac{\varrho}{\mathcal{Q}}\right) ds, \quad \overline{\mathcal{R}} = \varrho + \mathcal{Q}\sin\theta.$$

Setzt man $\mathcal{Q}\sin\theta = \mathring{\varrho}$, so ist dies die Gleichung eines Kreises, der die gemeinschaftliche Tangente der Polkurven in M berührt und den Durchmesser $\mathcal{Q} = \mathcal{R}\mathcal{R}_\lambda/(\mathcal{R} + \mathcal{R}_\lambda)$ hat. Da $\overline{\mathcal{R}} = \varrho + \mathring{\varrho}$, liegt das Krümmungszentrum von E immer auf diesem Kreise, wenn U eine Gerade ist. Der Grund hiervon wird, wie der eigentliche Charakter dieses Kreises, aus dem folgenden Paragraphen ersichtlich werden.

§ 23. **Die de la Hireschen Kreise.**

131. Wir nahmen im vorigen immer die Kurve L als fest an, Λ als beweglich. Die erhaltenen Formeln sind aber in $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}_\lambda$ symmetrisch und bleiben also ungeändert, wenn man die Bewegung umkehrt. Aus der in Nr. 128 gegebenen Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes $\overline{C}$ zu der Bahn eines in der Ebene von Λ festen Punktes P geht aber hervor, daß bei der umgekehrten Bewegung P der Krümmungsmittelpunkt zur Bahn des Punktes $\overline{C}$ ist. Diese Bemerkung wird uns im folgenden nützlich sein.

Ferner müssen wir uns eines Satzes bewußt werden, der eines eigentlichen Beweises nicht bedarf, da er geradezu zum Begriffe der umgekehrten Bewegung gehört. Er lautet: *Beschreibt ein Punkt P in der Ebene der Kurve* Λ, *wenn diese auf* L *abrollt, eine Kurve* P, *so geht bei der umgekehrten Bewegung* P *immer durch den festen Punkt P.* Betrachten wir nur eine unendlich kleine Bewegung, so läuft jeder Punkt P momentan auf der Tangente T seiner Bahnkurve. Bei der umgekehrten Bewegung werden also alle diese Tangenten sich um die Punkte P drehen, d. h. dort ihre Enveloppen berühren. Wenn aber der Punkt P auch im nächsten Momente der Bewegung auf derselben Tangente T bleibt, d. h. wenn er einen Wendepunkt seiner Bahnkurve beschreibt, so wird bei der umgekehrten Bewegung die Tangente T in drei konsekutiven Lagen durch den Punkt P gehen, d. h. ihre Enveloppe wird in T eine Spitze haben (vgl. S. 189).

132. Betrachten wir nun alle ∞^2 Punkte der Ebene in ihrer momentanen Bewegung, so wird es darunter offenbar ∞^1 Punkte W geben, die eben einen Wendepunkt W ihrer Bahnkurve beschreiben. Um einen solchen Punkt zu finden, brauchen wir nur das Krümmungszentrum $\overline{C}$ in irgend einer Richtung unendlich fern anzunehmen, $CA_1 \parallel \overline{C}M$ und $MA_1 \perp \overline{C}M$ zu ziehen (Fig. 85), A_1 mit C_λ zu verbinden, dann schneidet $\overline{C}M$ auf $C_\lambda A_1$ einen solchen Punkt W aus. Drehen wir $\overline{C}M$, so beschreibt W einen Ort W, der leicht zu bestimmen ist. Es ist nämlich immer

$$MW : CA_1 = \mathcal{R}_\lambda : (\mathcal{R} + \mathcal{R}_\lambda)\,.$$

Demnach liegt der Ort von W zu dem Orte von A_1 in bezug auf C_λ homothetisch. A_1 aber beschreibt den Kreis über $MC = \mathfrak{R}$ als Durchmesser. Also ist W ein Kreis, dessen Durchmesser MH man erhält, indem man $WH \parallel MA_1$ zieht. Es ist

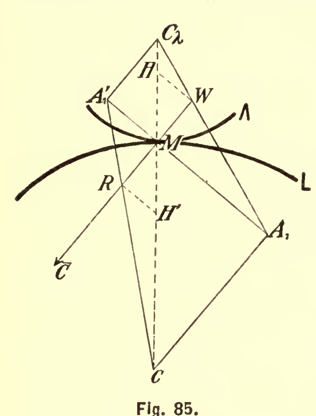


Fig. 85.

$$MH : \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\lambda : (\mathfrak{R} + \mathfrak{R}_\lambda)\,,$$

also $MH = \mathfrak{Q}$. In der Tat zeigt auch die Formel (9) des § 22, daß für $\overline{\mathfrak{R}} = \infty$ $\varrho = \mathfrak{Q} \sin\theta$ sein muß. Das ist aber nichts anderes als die Polargleichung unseres Kreises W, den man den »Wendekreis« nennt. Auf ihm liegen alle Punkte W, die im gegebenen Augenblicke Wendepunkte ihrer Bahnkurven sind. Alle zugehörigen Wendetangenten (WH) laufen natürlich durch H. Wenn bei der Abwickelung ein Punkt P von Λ eine Gerade Γ beschreibt, so muß P immer auf W liegen und Γ immer durch H laufen.

133. Wenn wir umgekehrt die Punkte R suchen, die Krümmungsmittelpunkte für die Trajektorien von auf der unendlich fernen Geraden liegenden Punkten der Ebene (Λ) sind, so müssen wir durch M irgend eine Gerade MW ziehen, $C_\lambda A_1' \parallel MW$ und $MA_1' \perp MW$ machen, und erhalten auf MW einen solchen Punkt R durch die Verbindungslinie CA_1'. Dieselben Überlegungen wie vorhin zeigen, daß R, wenn MW sich dreht, auf einem Kreise R liegt, der zu dem Kreis über $MC_\lambda = \mathfrak{R}_\lambda$ als Durchmesser in bezug auf C homothetisch liegt. Sein Durchmesser MH' ist daher ebenfalls gleich $\mathfrak{Q}$. In der Tat ist schon nach der Konstruktion $MR = MW$ für jede Lage. Auch die Savarysche Formel (10) des § 22 zeigt, da für $\varrho = \infty$ auch $\overline{\mathfrak{R}} = \infty$ wird, daß $\lim(\overline{\mathfrak{R}} - \varrho) = \mathfrak{Q} \sin\theta$ ist. Aber wir hätten die Existenz dieses zweiten Kreises R ohne weiteres aus der Umkehrung der Bewegung folgern können. Denn wenn das Krümmungszentrum $\overline{C}$ für W bei der direkten Bewegung unendlich fern ist, so ist bei der umgekehrten Bewegung W das Krümmungszentrum für die

Trajektorie von $\overline{C}$. Der Kreis R ist aber für die direkte Bewegung dasselbe, was W für die umgekehrte bedeutet.

Da auf R somit die Krümmungszentren aller unendlich fernen Punkte der Ebene (Λ) liegen, ist R nach Nr. 130 auch der Ort für die Krümmungszentren der Enveloppen E aller Geraden U der Ebene (Λ), da ja deren Krümmungsmittelpunkte unendlich fern sind. D. h. ein bestimmter Punkt R von R ist das Krümmungszentrum für die Einhüllenden aller Geraden, die auf RM senkrecht stehen (vgl. Zusatz von Nr. 130). Daß diese Parallelkurven beschreiben, ist ja ohnehin selbstverständlich.

Der Kreis R hat aber noch eine weitere, sehr wichtige Bedeutung. Wenn nämlich die Gerade, zu deren Enveloppe Punkt R das Krümmungszentrum ist, durch R selbst geht, also mit RH' zusammenfällt, so ist der Krümmungsradius der Enveloppe in diesem Punkte Null, der Punkt also ein Rückkehrpunkt der Enveloppe von RH'. Auch dies geht aus der Umkehrung der Bewegung sofort hervor. Denn wenn W sich bei der direkten Bewegung in drei konsekutiven Lagen auf der Geraden WH befindet, so geht die Gerade WH bei der umgekehrten Bewegung durch die drei konsekutiven Lagen von W, dort eine Spitze ihrer Einhüllenden beschreibend. Auf dem Kreise R liegen also für die direkte Bewegung alle Spitzen der Enveloppen, die durch Gerade der Ebene (Λ) in einem gegebenen Moment beschrieben werden. Daher heißt R der »R ü c k k e h r k r e i s« der Bewegung[120]). Wir hätten ihn ebenso aus Gleichung (20) des vorigen Paragraphen ableiten können, die sofort sagt, wenn $\overline{\mathfrak{R}}$ für die Enveloppe der Geraden Null sei, müsse $\varrho = -\mathfrak{Q} \sin\theta$ sein. Alle Tangenten der Spitzen gehen natürlich durch H'. Wenn bei der Abwickelung eine Gerade Γ von (Λ) sich um einen in (L) festen Punkt P dreht, so muß P sich beständig auf R befinden, d. h. allen Rückkehrkreisen gemeinsam sein, Γ immer durch H' gehen.

---

[120]) Den ersten Kreis W fand bereits DE LA HIRE „*Traité des Roulettes*“, Hist. de l'Acad. Paris 1706, 340. Da aber R eine direkte Folge von W ist, darf man beide Kreise wohl als de la Hiresche Kreise bezeichnen. Auf R selbst machte zuerst S. ARONHOLD aufmerksam in der wichtigen Abhandlung „*Grundzüge der kinem. Geom.*, Verh. Ver. Fördg. d. Gewerbfl. **51**, 1872, 129.

134. Die de la Hireschen Kreise können häufig auch bequem anstatt der Savaryschen Formel zur Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte benutzt werden. Zu diesem Zwecke ist die Kenntnis zweier Beziehungen von Wert, die wir noch ableiten wollen. Ist auf der Normale PM der Trajektorie P eines Punktes P $\bar{C}$ das Krümmungszentrum, R der Schnittpunkt mit dem Rückkehrkreis (s. Fig. 86), so ist nach der Formel von Savary

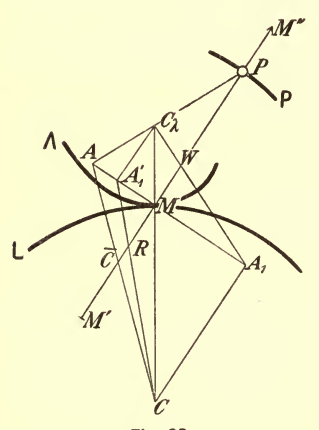


Fig. 86.

$$\frac{1}{\bar{C}M}+\frac{1}{MP}=\frac{1}{RM}$$

oder

$$\frac{1}{\bar{C}M}+\frac{1}{\bar{C}P-\bar{C}M}=\frac{1}{\bar{C}M-\bar{C}R},$$

woraus sich die Beziehung

$$\overline{\bar{C}M}^2=\bar{C}R\cdot\bar{C}P \tag{1}$$

ergibt. Wenn man also $\bar{C}M$ nach rückwärts um sich selbst bis M' verlängert denkt, so sind R und P durch M' und M harmonisch getrennt; man hat M' als vierten harmonischen Punkt zu R, M, P, und $\bar{C}$ als Mittelpunkt von MM'.

Es sei ferner W der Punkt, wo MP den Wendekreis schneidet, so ist wie vorhin

$$\frac{1}{PM}+\frac{1}{M\bar{C}}=\frac{1}{WM}$$

oder

$$\frac{1}{PM}+\frac{1}{P\bar{C}-PM}=\frac{1}{PM-PW}.$$

Hieraus folgt die (1) entsprechende Beziehung

$$\overline{PM}^2=PW\cdot P\bar{C}. \tag{2}$$

Verlängert man also PM nach rückwärts um sich selbst bis M'', so ist $\overline{C}$ als vierter harmonischer Punkt zu M, W, M'' bestimmt.

135. Wir wollen nun unsere Kenntnisse sofort zur Konstruktion der Krümmungszentren einiger schon früher behandelten Kurven verwenden. Die (schiefe) Astroide war definiert als Enveloppe einer Strecke PQ, deren Endpunkte auf den Geraden PO bzw. QO laufen (Fig. 87). Der Kreis (POQ) ist dann der Wendekreis. Denn P und Q müssen, da sie Gerade beschreiben, auf W liegen; außerdem geht Kreis (POQ) auch durch das Momentanzentrum M. Das Lot von M auf PQ gibt den Berührungspunkt B. Das Krümmungszentrum der Astroide in B muß auf dem Rückkehrkreis R liegen. Dieser ist aber zu W in bezug auf M symmetrisch. Schneidet also MB den Kreis W in D, so müssen wir nur MD nach rückwärts um sich selbst bis $\overline{C}$ verlängern, um dieses Krümmungszentrum zu erhalten. Da $OD \perp MD$, braucht der Kreis W nicht gezeichnet zu werden.

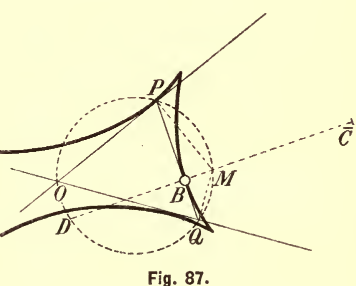


Fig. 87.

136. Um das Krümmungszentrum der Fußpunktskurven zu finden, kann man die Bemerkung benutzen, die wir schon früher (Nr. 50) machten, daß jede Fußpunktskurve einer Kurve C in bezug auf einen Pol P als homothetische Verkleinerung (im Verhältnis 2 : 1) einer Rollkurve betrachtet werden kann, die durch den zu P in bezug auf die Tangente von C symmetrischen Punkt P' beschrieben wird, wenn auf C eine kongruente Kurve C′ symmetrisch abrollt (vgl. Fig. 88). Sind C, C' die betreffenden Krümmungszentren, M der Berührungspunkt von C und C′, der Mittelpunkt Q von PP' der die Fußpunktskurve beschreibende Punkt, so erhält man den Krümmungsmittelpunkt C_1 zur Trajektorie von P' durch $MA \perp MP'$ (A auf $C'P'$) als den Schnittpunkt von CA mit MP'. Das Krümmungszentrum $\overline{C}$ der Fußpunktskurve halbiert C_1P. In der Tat muß es auf der Nor-

male des Punktes Q, der Diagonale des Rechtecks MM_1PQ liegen. M_1 ist das Momentanzentrum für die durch die Fußpunktskonstruktion definierte Bewegung.

Mittels des Rückkehrkreises erhalten wir aber auch eine sehr einfache direkte Konstruktion. Dieser Rückkehrkreis ist hier der Kreis (CM_1P). Denn die Gerade PQ dreht sich immer um P, also muß P auf R liegen, C desgleichen als Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe der Geraden MQ und M_1 als Momentanzentrum. Wir haben nun $\bar{C}$ auf QM_1 so zu wählen, daß

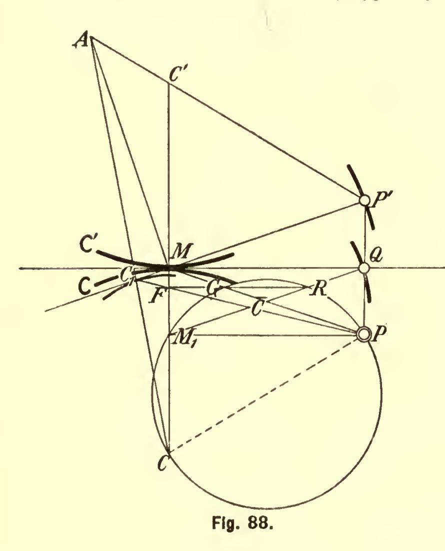


Fig. 88.

$$\bar{C}M_1 : \bar{C}R = \bar{C}Q : \bar{C}M_1 .$$

Dies wird erreicht, wenn wir $RF \perp CM$ fällen und $\bar{C}$ auf PF nehmen. Denn dann ist

$$\bar{C}M_1 : \bar{C}R = \bar{C}P : \bar{C}F = \bar{C}Q : \bar{C}M_1 .$$

Nun schneiden sich aber RF und PM in einem Punkte G von R, und da CP Durchmesser von R ist, läßt sich G auch durch $CG \perp PM$ erreichen, so daß auch hier die Zeichnung von R überflüssig wird. Man konstruiert also folgendermaßen: $CG \perp PM$, $GF \perp CM$, PF und QM_1 schneiden sich in $\bar{C}$[121]. Für eine große Anzahl früher behandelter Kurven ist hiermit die Konstruktion des Krümmungszentrums gegeben, insbesondere für die allgemeinen und alle speziellen Fußpunktskurven der Kegelschnitte, wenn man nur das Krümmungszentrum der Grundkurve zu konstruieren weiß. Für die Kegelschnitte gibt es ja unzählige solche Konstruktionen. Wir weisen

[121]) Diese Konstruktion wurde zuerst von Em. Weyr angegeben. Stzgsb. Ak. Wien **59**, 1869, Abt. II, 169.

hier nur darauf hin, daß man, wenn gerade keine andere zur Hand ist, eine solche aus der Beziehung (28) des § 21 ableiten kann, indem man zuerst $\varrho/\sin\theta$ und $\varrho'/\sin\theta$ auf der Normale abträgt. Für die Parabel ergibt sich im besonderen $\mathcal{R}\sin\theta = 2\varrho$, d. h. *die Projektion des Krümmungsradius auf den Brennstrahl des Berührungspunktes ist gleich der doppelten Länge des Brennstrahles.*

Die Fig. 88 gibt aber noch zu einer weiteren Bemerkung Anlaß, die von großem Interesse ist. Da $\sphericalangle C_1MC = \sphericalangle PMC$, so hüllt MC_1 nach unserer früheren Definition die Katakaustik des Punktes P in bezug auf die Kurve C ein. Diese Kurve ist also die Evolute der von P' beschriebenen (zweimal vergrößerten) Fußpunktskurve (vgl. Nr. 66). Da C_1 der zu P' gehörige Krümmungsmittelpunkt ist, ist C_1 *auch der Berührungspunkt des reflektierten Strahls mit der Brennlinie*[122]), der hiernach leicht zu konstruieren ist.

137. Der Rückkehrkreis setzt uns aber auch in den Stand, zur Koppelkurve den Krümmungsradius zu konstruieren, ohne daß wir die Polkurven bzw. deren Krümmungszentra zu kennen brauchen. Sind wie früher (Nr. 111) O, O' die festen, P, Q die auf den Kreisen um O bzw. O' beweglichen Punkte, L der mit der Koppel PQ fest verbundene beschreibende Punkt (vgl. Fig. 89), so ist der Schnittpunkt M von PO und QO' das Momentanzentrum, ML die Normale der Koppelkurve in L. Wir suchen nun R zu bestimmen, indem wir die Schnittpunkte R_p bzw. R_q auf MP bzw. MQ suchen. Machen wir $OM_p = OM$, so ist R_p nach Nr. 134 der vierte harmonische Punkt zu P, M_p, M. Ebenso findet man mittels eines entsprechenden Punktes M_q den Punkt R_q. Es bestehen dann die Beziehungen:

$$(3)\qquad \frac{1}{MR_p} = \frac{1}{MO} - \frac{1}{MP}, \qquad \frac{1}{MR_q} = \frac{1}{MO'} - \frac{1}{MQ},$$

wo die Minuszeichen dadurch veranlaßt sind, daß P, O bzw. Q, O' auf derselben Seite von M liegen. Durch

[122]) Auf diesen Zusammenhang zwischen Katakaustiken und Fußpunktskurven machte schon de l'Hospital, *Analys. des inf. petits,* Paris 1715, 105 aufmerksam. Vgl. Kessler, Zeitschr. Math. Phys. **23**, 1878, 1—34.

M, R_p, R_q können wir den Kreis R legen. Schneiden sich nun PQ und OO' in S, und ziehen wir noch MS, dann ist nach dem beim Beweise der Savaryschen Formel (Nr. 128) benutzten Hilfssatz in den beiden Dreiecken PMS und QMS

$$(4) \quad \left(\frac{1}{MO} - \frac{1}{MP}\right)\frac{1}{\sin(SMP)} = \left(\frac{1}{MO'} - \frac{1}{MQ}\right)\frac{1}{\sin(SMQ)},$$

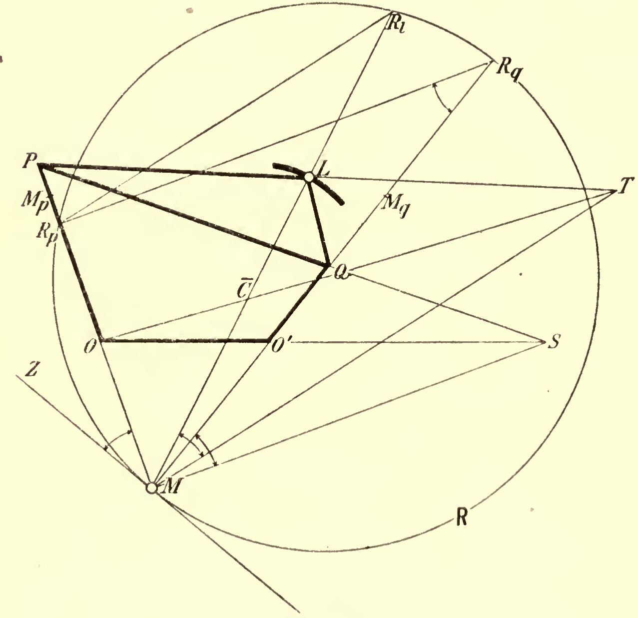


Fig. 89.

also nach (2)

$$(5) \qquad MR_p : MR_q = \sin(SMQ) : \sin(SMP).$$

Diese Gleichung zeigt an, daß R_pR_q zu MS parallel läuft ($\sphericalangle SMQ = \sphericalangle MR_qR_p$; $\sphericalangle SMP = \pi - \sphericalangle MR_pR_q$).

Was aber für P und Q gilt, muß für irgend zwei andere Punkte der beweglichen Ebene, z. B. P und L, ebenfalls gelten. Den Punkt R_l erhalten wir auf R, indem wir ML verlängern. Ist dann $\overline{C}$ das gesuchte Krümmungszentrum der Trajektorie von L und T der Schnitt-

punkt von PL und $O\bar{C}$, so muß $R_p R_l \parallel MT$ sein. Da aber $\sphericalangle R_l R_p R_q = \sphericalangle R_l M R_q$, so ist auch $\sphericalangle R_l M R_q = \sphericalangle TMS$ oder, was dasselbe ist, $\sphericalangle LMT = \sphericalangle QMS$.

Wir haben demnach folgende Konstruktion von $\bar{C}$, in der R gänzlich ausgeschaltet ist:

Ist M der Schnittpunkt von PO und QO', S der von PQ und OO', so mache man $\sphericalangle LMT = \sphericalangle QMS$ und vom selben Sinne, dann schneidet OT auf LM das Krümmungszentrum $\bar{C}$ aus.

Zusätze. 1. Es ist nach unseren bisherigen Entwicklungen klar, daß diese Konstruktion nicht etwa bloß gilt, wenn P und Q die Kreise beschreiben. Es müssen vielmehr nur O und O' die momentanen Krümmungsmittelpunkte der sonst beliebigen Trajektorien von P und Q sein. Auch können P und Q selbst Krümmungsmittelpunkte von Kurven P und Q sein, deren Einhüllende man kennt (Nr. 130). OP und $O'Q$ müssen nur die momentanen Normalen zu den Einhüllenden (und zu P bzw. Q) sein. Natürlich können P, Q und O, O' auch vertauscht werden.

2. Von Wichtigkeit ist noch eine Bemerkung über die gemeinsame Tangente der Polkurven in M. Diese berührt den Kreis R in M. Also ist der Winkel, den sie mit MR_p bildet, als Tangentensehnenwinkel gleich $\sphericalangle R_p R_q M = \sphericalangle QMS$. *Man konstruiert sie also, indem man $\sphericalangle PMZ = \sphericalangle QMS$ im entgegengesetzten Sinne macht.* Diese und die oben gegebene Konstruktion heißen die Bobillierschen[122a]) Konstruktionen.

§ 24. Die zykloidalen Kurven.

138. Der einfachste Fall der Rollkurven ist der, wo die Krümmungsradien $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}_\lambda$ der beiden Polkurven konstant gleich R und r sind, die Polkurven also Kreise sind, die auch zu Geraden ausarten können. Alle Kurven, die bei einer solchen Bewegung irgend ein Punkt P der Ebene des rollenden Kreises (r) beschreiben kann, heißen »zyklische Kurven«. Unter ihnen sondert sich eine Familie scharf ab, das sind diejenigen zyklischen Kurven, deren beschreibender Punkt auf dem Umfange des rollenden Kreises liegt. Wir heißen diese »zykloidale Kurven« oder auch kurz »Zykloidalen«. Sie wollen wir zuerst betrachten.

[122a]) *Cours de géométrie*, 12e éd., Paris 1870, 232.

Der Punkt P des rollenden Kreises (O') falle zunächst mit dem Punkte P_0 des ruhenden Kreises (O) zusammen. Wir betrachten dann einen Moment der Bewegung, wo sich die Kreise in M berühren und der Bogen $MP = MP_0 = \sigma$ abgerollt ist (vgl. Fig. 90). Sind dann die Bezeichnungen wie bisher und nennen wir den »Wälzungswinkel« (MOP_0), den die Zentrale beider Kreise mit der Anfangslage OP_0 bildet ω, so ist

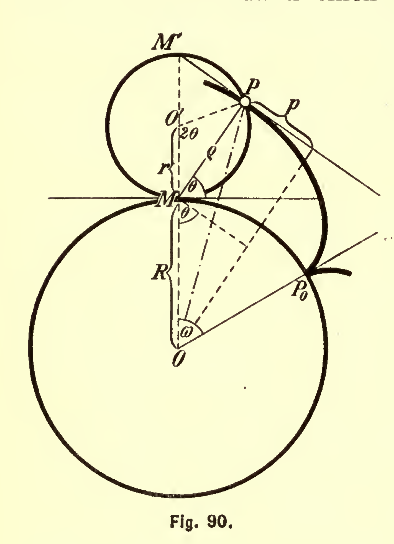


Fig. 90.

$$(1)\quad \begin{cases} \sigma = 2r\theta = R\omega\,; \\ \varrho = 2r\sin\theta\,. \end{cases}$$

Da $ds = \varkappa\, d\sigma$, wo $\varkappa$ nach Gleichung (4a) in Nr. 127 den Wert $\varrho/\mathfrak{Q}$ hat [$\mathfrak{Q}$ konstant $= Rr/(R+r)$], so ist zunächst

$$(2)\qquad ds = \frac{4r(R+r)}{R}\sin\theta\, d\theta\,.$$

Für den Krümmungsradius $\mathcal{R}$ der gesuchten Zykloidale hat man nach Gleichung (9) in Nr. 127

$$(3)\qquad \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{\varrho - \mathfrak{Q}\sin\theta}{\varrho^2} = \frac{R+2r}{4r(R+r)\sin\theta}\,.$$

Demnach ergibt sich die Parameterdarstellung

$$(4)\qquad s = a\cos\theta + \varsigma\,,\quad \mathcal{R} = b\sin\theta$$

und hieraus die natürliche Gleichung

$$(5)\qquad \frac{(s-\varsigma)^2}{a^2} + \frac{\mathcal{R}^2}{b^2} = 1\,,$$

wo

$$(6)\qquad a = \frac{4r(R+r)}{R}\,,\qquad b = \frac{4r(R+r)}{R+2r}$$

und ς eine Integrationskonstante bedeutet, die davon abhängt, wo wir auf der Zykloidale die Bogen zu zählen beginnen. Hierfür gibt es nun zwei ausgezeichnete Stellen. Der Krümmungsradius $\mathcal{R}$ verhält sich nämlich

wie die Sinusfunktion. Er ist Null für $\theta = 0$, hat ein Maximum b für $\theta = \frac{1}{2}\pi$ und nimmt wieder zu Null ab für $\theta = \pi$, um bei weiterem Wachsen von θ dieselben Werte periodisch immer wieder anzunehmen. Bei $\theta = 0$, im Anfange der Bewegung, hat die Zykloidale daher eine Spitze, deren Tangente, wie aus der Betrachtung der Kurvennormale PM[123]) hervorgeht, der Radius OP_0 ist, für $\theta = \frac{1}{2}\pi$ einen »Scheitel«. Zählen wir die Bogen von diesem Scheitel aus, so wird $\varsigma = 0$ und die Gleichung (5) nimmt die Form an

$$s^2/a^2 + \mathcal{R}^2/b^2 = 1\,. \tag{7}$$

Zählen wir aber die Bogen von der anfänglichen Spitze aus, so muß für $\theta = 0$ $s = 0$, also $\varsigma = -a$ sein und die Gleichung (5) wird

$$\mathcal{R}^2 = -2\frac{b^2}{a}s - \frac{b^2}{a^2}s^2\,. \tag{7*}$$

139. Wie (7) der kartesischen Mittelpunktsgleichung der Ellipse, so ist (7*) der Scheitelgleichung der Kegelschnitte analog. Und wie die letztere sehr anschaulich den Übergang von der Ellipse zur Parabel (und schließlich zur Hyperbel) zeigen kann[124]), so dient sie hier dazu, die Gleichung in dem Grenzfalle $r = \infty$, der der gewöhnlichen Kreisevolvente entspricht, aufzustellen. Für $r = \infty$ wird nämlich sowohl a als b unendlich, aber auch $\lim a/b = \lim (R + 2r)/R = \infty$, so daß $\lim b/a = 0$. Der Grenzwert von $b^2/a = 4Rr(R+r)/(R+2r)^2$ bleibt aber endlich und wird gleich R. So erhalten wir aus (7*), wenn wir nur noch das Zeichen von s ändern, d. h. die Bogen entgegengesetzt zählen, die natürliche Gleichung

$$\mathcal{R}^2 = 2Rs \tag{8}$$

der gewöhnlichen Kreisevolvente, die wir in Nr. 124, Beisp. schon auf direktem Wege fanden. Die Kurve ist in Fig. 91 dargestellt.

[123]) Daß die Normale der Zykloidale durch den Berührungspunkt der beiden Kreise geht, die Tangente also durch dessen Gegenpunkt M', erkannte bereits DE LA HIRE, Anc. mém. Ac. Paris **9**, 1694, 234.

[124]) Vgl. den kleinen Aufsatz des Verfassers *„Zwei Anw. der sog. Scheitelgleichung der Kegelschnitte“*, Zeitschr. math. nat. Unterr. **35**, 1904, 493/97.

Auch der andere Grenzfall $R = \infty$ soll hier gleich erledigt werden. Wir finden aus (6) $a = b = 4r$. Die Kurve wurde von Galilei, der sie zuerst ausführlicher betrach-

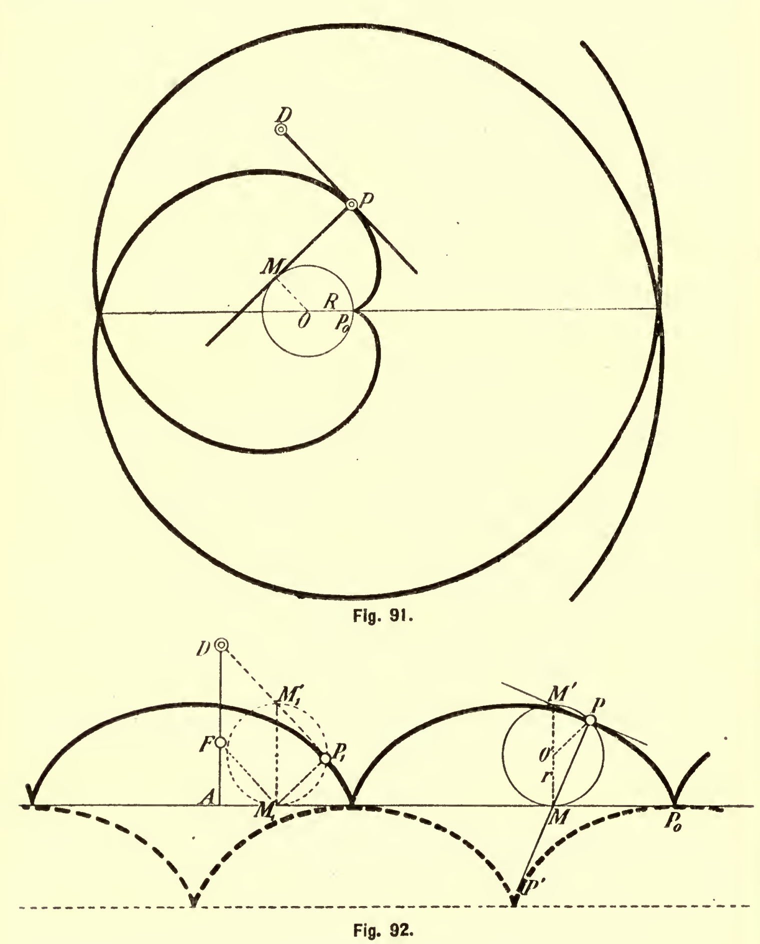


Fig. 91.

Fig. 92.

tete (1559), »Zykloide« genannt. Sie ist durch Fig. 92 wiedergegeben. Ihre natürliche Gleichung ist nach (7) der kartesischen Gleichung des Kreises entsprechend

$$s^2 + \mathcal{R}^2 = (4r)^2 . \tag{9}$$

140. Aus der Darstellung (4), wo wir, von der Kreisevolvente absehend, $\varsigma = 0$ denken, können wir die Gestalt der zykloidalen Kurven, für die wir die Hauptmerkmale schon angegeben haben, ohne weiteres entnehmen. Da $\mathfrak{R}$ niemals unendlich werden kann, besteht die Zykloidale aus (im allgemeinen unendlich vielen) kongruenten Zügen, die immer nach derselben Seite konvex sind und so aneinanderschließen, daß sie gegen die Basis senkrecht stehende Spitzen bilden. Jeder Zug entspricht dem einmaligen Abrollen des beweglichen Kreises. Die Länge l eines solchen Zuges ist nach (4), da θ von 0 bis π geht,

$$l = 2 a = 8\,r(R + r)/R\,, \tag{10}$$

für die Zykloide also $8\,r$, was schon Wallis (1659) fand.

Bei den Zykloidalen mit Kreisbasis müssen wir zwei Fälle unterscheiden, ob die ganze Kurve sich außerhalb des Basiskreises befindet: »Epizykloiden« (die Spitzen sind nach innen gerichtet, die Kurve ist nach außen konvex), oder ob die Kurve völlig im Innern des Grundkreises liegt: »Hypozykloiden« (die Spitzen sind nach außen gerichtet, die Kurve ist nach innen konvex)[125]. Der letztere Fall wird immer eintreten, wenn der rollende Kreis vom Basiskreis eingeschlossen wird, d. h. wenn r negativ und $|r| < R$ ist. Der erstere Fall tritt ein, wenn der rollende Kreis außerhalb des Basiskreises liegt, sei es nun, daß r positiv ist, oder daß bei negativem r (Berührung von innen) $|r| > R$ ist. Daß in diesem Falle keine anderen Kurven erzeugt werden, wie bei positivem r, beruht auf einem merkwürdigen Satze von der doppelten Erzeugung jeder eigentlichen zyklischen Kurve, den wir zunächst für die Zykloidalen ableiten wollen[126].

---

[125]) Diese Einteilung geht auf L. Euler (1784) zurück. Die Idee des Rollens von Kreisen aufeinander war schon den griechischen Astronomen eigen. Systematisch betrachtete zuerst Albrecht Dürer in seiner *Underweysung usw.*[57]) eine spezielle zykloidale Kurve (Pascalsche Schnecke), die er »Spinnenlinie« nannte. Als eigentlichen Erfinder der zyklischen Kurven darf man aber erst Desargues betrachten (Mitte des 17. Jahrh.), der sie sofort auf die Konstruktion der Zahnräder anwendete.

[126]) Für diese war er schon de la Hire und Euler bekannt. Man sehe den vorzüglichen *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den zyklischen Kurven* von E. Wölffing in Bibl. math. (3) **2**, 1901, 235—259, der mit einer vollständigen Bibliographie versehen ist.

141. Ist die natürliche Gleichung einer Zykloidale in der Form (7) gegeben, so bestimmen sich die zugehörigen Radien R, r aus den Konstanten a^2, b^2 durch Umkehrung der Gleichungen (6) in der Form

$$(11) \qquad R = \frac{a\,b^2}{a^2 - b^2}, \qquad r = \frac{a\,b}{2(a+b)}.$$

Hier sind a, b die Quadratwurzeln der Größen a^2, b^2, können also beide auch negativ sein. Wenn wir nun für $a^2 > b^2$ R als positiv betrachten, so ist damit auch $a > 0$ gegeben, b aber kann auch negativ genommen werden. Dies führt jedesmal zu einem zweiten Rollkreise, d. h. zu dem Wertesysteme

$$(11^*) \qquad R = \frac{a\,b^2}{a^2 - b^2}, \qquad r' = -\frac{a\,b}{2(a-b)}.$$

Es ist immer $r + r' = -R$ und man bemerkt, daß für $a^2 > b^2$ (Epizykloide) $r > 0$, aber $r' < 0$ ist, während $|r'| = R + r > R$ (Fig. 93a), so daß also der Kreis vom Radius r außen rollt, der Kreis vom Radius r' zwar von innen berührt, den Grundkreis aber immer einschließt. Ist $a^2 < b^2$ (Hypozykloide), so müssen wir a negativ nehmen, damit R positiv bleibe, dann ist sowohl r wie r' negativ und $|r'| + |r| = R$. Beide Kreise rollen also im Innern des Grundkreises (Fig. 93b).

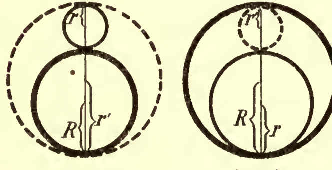


Fig. 93a. Fig. 93b.

Bem. Ist $|r| < R$ und wir erzeugen, von demselben Punkte des festen Kreises (R) ausgehend, eine Epizykloide und eine Hypozykloide mit dem nämlichen rollenden Kreis (r), so fallen die Spitzen in dieselben Punkte und es ist die absolute Länge eines Bogens in beiden Fällen

$$l_1 = 8\,r(R + r)/R, \quad l_2 = 8\,r(R - r)/R.$$

Daher ist unabhängig von R

$$l_1 + l_2 = 16\,r.$$

Ist aber $|r| > R$, so entstehen zwei Epizykloiden und es ist dann $l_1 - l_2 = 16\,r$, wenn beide Bogen absolut gemessen werden.

142. Wir sagten schon oben, daß die Anzahl der Züge einer zykloidalen Kurve im allgemeinen unendlich

groß sei. Diese Anzahl hängt nämlich von dem Verhältnis $\mu = R/r$ der beiden Kreisradien (oder Peripherien) ab. Ist diese Zahl, die man Modul nennt, irrational, so schließt sich die Kurve nie und ist transzendent. Ist μ aber gleich einem rationalen Bruch λ/λ', so muß der Kreis (r) λ-mal auf dem Kreise (R) abrollen, diesen λ'-mal umlaufend, bis die Kurve sich schließt. Die Zykloidale hat also dann λ reelle Spitzen und λ Züge und ist algebraisch (vgl. Nr. 143). Ist $\lambda' = 1$, so folgen die Spitzen so aufeinander, wie sie auf dem Kreise (R) liegen; für $\lambda' = 2$ wird immer eine Spitze übergangen, so daß sie erst beim zweiten Umlauf an die Reihe kommt; allgemein geht der Zug der Zykloidale von einer Spitze zur nächsten über $(\lambda' - 1)$ Spitzen hinweg. Dann entstehen natürlich Doppelpunkte (vgl. Fig. 111) und man heißt die Zykloidalen »sternförmig«. Ganzzahlige μ entsprechen den gewöhnlichen Epi- und Hypozykloiden; ist μ ein Stammbruch $(=1/\delta)$, so gibt es nur Epizykloiden mit einer Spitze, die aber mit wachsendem δ immer verschlungener werden (ein Beispiel gibt Fig. 98), bis sie schließlich für $\delta = \infty$ $(r = \infty)$ in die Kreisevolvente übergehen.

Um nun sofort aus der natürlichen Gleichung (7) zu erkennen, welche Art von Zykloidale dargestellt sei, müssen wir die Beziehung zwischen dem Verhältnis $a/b = \nu$ und dem Verhältnis $R/r = \mu$ angeben. Man erhält aus (6), indem man b auch negativ annimmt,

$$(12) \qquad \pm\nu = \frac{\mu + 2}{\mu}, \qquad \mu = \frac{2}{\pm\nu - 1},$$

was man auch aus (11) und (11*) ableiten kann.

Beisp. Wir finden hiernach für alle schon früher betrachteten Epi- und Hypozykloiden die damals angegebene Erzeugung und natürliche Gleichung, aber sofort auch die zweite Erzeugungsweise. Auch gibt Formel (10) alle früher einzeln berechneten Kurvenlängen. So können wir folgende Zusammenstellung der schon behandelten Zykloidalen geben:

Epizykloiden:

$$\mu = 1,\ \nu = 3\ [\mu = -\tfrac{1}{2}].$$

Kardioide: $s^2 + 9\,\mathcal{R}^2 = (8\,R)^2$; Länge $16\,R$.

$$\mu = 2,\ \nu = 2\ [\mu = -\tfrac{2}{3}].$$

Nephroide: $s^2 + 4\,\mathcal{R}^2 = (3\,R)^2$; Länge $12\,R$.

Hypozykloiden:

$$\mu = -3\,, \ \nu = \tfrac{1}{3} \ [\mu = -\tfrac{3}{2}]\,.$$

Steinersche Kurve: $9\,s^2 + \mathcal{R}^2 = (\tfrac{8}{3}\,R)^2$; Länge $\tfrac{16}{3}\,R$.

$$\mu = -4\,, \ \nu = \tfrac{1}{2} \ [\mu = -\tfrac{2}{5}]\,.$$

Reguläre Astroide: $4\,s^2 + \mathcal{R}^2 = (\tfrac{3}{2}\,R)^2$; Länge $6\,R$.

$$\mu = -2\,, \ \nu = 0\,.$$

Der Durchmesser als zweispitzige Hypozykloide.

143. Indem wir wieder von der Kreisevolvente absehen, für die wir schon in Nr. 124, Beisp. eine Parameterdarstellung in kartesischen Koordinaten gegeben haben, wollen wir eine ebensolche auch für die übrigen Zykloidalen aufsuchen. Zählen wir die Bogen wieder in entgegengesetzter Richtung, so erhalten wir für den Tangentenwinkel

$$\tau = -\int_0^\theta \frac{ds}{\mathcal{R}} = \frac{a}{b}\,\theta\,, \tag{13}$$

ferner

$$\left\{\begin{aligned} dx &= -ds\cos\tau = a\sin\theta\cos\frac{a}{b}\,\theta\,d\theta\,,\\ dy &= -ds\sin\tau = a\sin\theta\sin\frac{a}{b}\,\theta\,d\theta\,. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Integriert man diese Gleichungen und führt wieder R, r ein, so ergibt sich die Darstellung

$$\left\{\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\left(\frac{r}{R}\cdot 2\,\theta\right) - r\cos\left(\frac{R+r}{R}\cdot 2\,\theta\right),\\ y &= (R+r)\sin\left(\frac{r}{R}\cdot 2\,\theta\right) - r\sin\left(\frac{R+r}{R}\cdot 2\,\theta\right). \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Da für $\theta = 0$ $x = R$, $y = 0$ $(\tau = 0)$ wird, ist es am besten, nirgends mehr eine Konstante hinzuzufügen. Der Koordinatenanfangspunkt liegt im Mittelpunkt O des Grundkreises, die x-Achse geht durch die Spitze P_0 (Fig. 90). Durch Einführung des Wälzungswinkels $\omega\,[= 2\,r\,\theta/R$ nach (1)] werden die Gleichungen (15) etwas einfacher

$$\left\{\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\omega - r\cos\frac{R+r}{r}\,\omega\,,\\ y &= (R+r)\sin\omega - r\sin\frac{R+r}{R}\,\omega\,. \end{aligned}\right. \tag{15*}$$

Ist nun der Modul μ und damit auch der Bruch $(R+r)/r$ rational, so läßt sich offenbar ω zwischen den beiden Gleichungen (15*) eliminieren, so daß eine algebraische Gleichung in x, y entsteht. Alle bisher betrachteten eigentlichen Zykloidalen waren in der Tat algebraisch. Die Kreisevolvente aber und die Zykloide sind transzendent. Die Parameterdarstellung der letzteren wollen wir nun noch angeben.

Wir finden sie, indem wir in (15) für $R=\infty$ zur Grenze übergehen. Nur müssen wir vorher bei x auf der rechten Seite die Konstante $-R$ beifügen, damit sich das Koordinatensystem auf die Spitze als Anfangspunkt bezieht. Vertauschen wir noch x mit y, setzen $2\theta=\varphi$ und beachten, daß $\lim R\sin(2r\theta/R)=r\cdot 2\theta$, so erhalten wir

$$x=r(\varphi-\sin\varphi)\,,\quad y=r(1-\cos\varphi)\,, \tag{16}$$

die gebräuchliche Darstellung der Zykloide. Da der Radius r nur auf die Größe, nicht auf die Form der Kurve Einfluß hat, sind alle Zykloiden ähnlich. Dasselbe erkennt man leicht aus der natürlichen Gleichung (9). Denn die Multiplikation von s und $\mathfrak{R}$ mit einer Konstanten k verändert nur den erzeugenden Kreis.

Ebenso ersieht man aus der Gleichung $\mathfrak{R}^2=2Rs$, daß alle gewöhnlichen Kreisevolventen ähnliche Kurven sind. Die eigentlichen Zykloidalen sind aber offenbar nur dann ähnlich, wenn sie denselben Modul haben.

144. Wir wollen nun den Evoluten der zykloidalen Kurven näher treten. Nach (10) in Nr. 81 hat man $\bar{s}=\mathfrak{R}$, $\bar{\mathfrak{R}}=d\mathfrak{R}/d\tau=(d\mathfrak{R}/d\theta)\cdot b/a$. Also ergibt sich aus (4) unabhängig von der Konstanten ς

$$\bar{s}=b\sin\theta\,,\qquad \bar{\mathfrak{R}}=\frac{b^2}{a}\cos\theta\,. \tag{17}$$

Die Evolute ist demnach in jedem Falle, natürlich mit Ausnahme der Kreisevolvente, wieder eine zykloidale Kurve, die der Grundkurve ähnlich ist. Denn es ist $b:(b^2/a)=a:b$, oder anders ausgedrückt: (17) entsteht aus (4), indem man die Konstanten mit $b/a=R/(R+2r)$ multipliziert. Aus (17) ist auch die Lage der Evoluten zu erkennen. Die Spitzentangenten der Grundkurve sind Normalen in den Scheiteln

der Evolute und umgekehrt. Selbstverständlich gehen die Evoluten durch die Spitzen der Grundkurve.

Für die Zykloide wird $a = b$, also ist die Evolute der Grundkurve kongruent (Fig. 92). Da für die Zykloide $\mathfrak{R} = 4r\sin\theta$, aber $\varrho = 2r\sin\theta$, so wird der Abschnitt der Normale zwischen dem Kurvenpunkt und dem Berührungspunkt mit der Evolute durch die feste Gerade, die Direktrix (Leitlinie), halbiert: $MP = MP'$. Für die Kreisevolvente versagt (17), aber die Elimination von θ gibt die natürliche Gleichung der Evolute, die für $b = \infty$ in $\overline{\mathfrak{R}} = b^2/a = 4r$, d. i. in die Gleichung des Grundkreises übergeht.

Der Krümmungsmittelpunkt $\overline{C}$ der Evolute hat in bezug auf das System der Tangente und Normale im Kurvenpunkt bei entsprechender Festsetzung des positiven Sinnes die Koordinaten

$$(18) \qquad \bar{x} = \overline{\mathfrak{R}} = \frac{b^2 s}{a^2}, \qquad \bar{y} = \mathfrak{R}.$$

Der Mittelpunkt O des Grundkreises hat nun in bezug auf dasselbe System die Koordinaten

$$(19) \qquad \begin{cases} x = R\cos\theta = \dfrac{b^2 s}{a^2 - b^2} \\[2ex] y = \varrho + R\sin\theta = \dfrac{a^2 \mathfrak{R}}{a^2 - b^2}. \end{cases}$$

Aus (18) und (19) ergibt sich

$$\bar{x} : \bar{y} = x : y = b^2 s : a^2 \mathfrak{R}.$$

Daher liegt der Krümmungsmittelpunkt der Evolute auf dem vom Mittelpunkt des Basiskreises nach dem Kurvenpunkt gehenden Radiusvektor.

Wir werden sehen, daß dieser merkwürdige Satz nur ein Spezialfall einer allgemeineren Eigenschaft einer umfassenden Kurvenfamilie, der sog. Cesàroschen Kurven (Nr. 217/8) ist.

145. Es sind aber auch die Evolutoiden (Nr. 125, Beisp. 2) der zykloidalen Kurven einer näheren Betrachtung wert. Nach der Habichschen Formel hat man, wenn die erzeugenden Geraden gegen die Normale um

den Winkel α geneigt sind und die Elemente der Evolutoide mit Strichen ausgezeichnet werden $(\tau' = \tau)$

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R} \sin\alpha + \frac{d\mathcal{R}}{d\tau} \cos\alpha .$$

Daher ist nach (4)

$$\mathcal{R}' = \frac{b}{a}(a \sin\alpha \sin\theta + b \cos\alpha \cos\theta) \tag{20}$$

und da $ds' = \mathcal{R}'\, d\tau = \mathcal{R}'\, d\theta \cdot a/b$, so hat man

$$s' = -a \sin\alpha \cos\theta + b \cos\alpha \sin\theta . \tag{21}$$

Aus (20) und (21) ergibt sich die natürliche Gleichung

$$\frac{s'^2}{a^2} + \frac{\mathcal{R}'^2}{b^2} = \frac{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}{a^2} . \tag{22}$$

Diese Gleichung stellt aber wiederum den Grundkurven ähnliche Zykloidalen vor und zwar diesmal für alle Arten, die Kreisevolvente mit eingeschlossen. Für $a = b$ (Zykloide) fällt die Gleichung jedoch auch hier mit der ursprünglichen völlig zusammen, d. h. die *Evolutoiden der Zykloide sind für beliebigen Winkel α der Grundkurve kongruent.*

Für $\alpha = 0$ fällt (22) mit der Evolutengleichung, für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ mit der Gleichung der Grundkurve zusammen.

146. Die Konstruktion des Krümmungszentrums C der Zykloidale selbst nach der Savaryschen Formel führt zu einem interessanten Satz, den wir auch später als Unterfall einer Eigenschaft der Cesàroschen Kurven erkennen werden. Der Punkt A fällt hier auf den Kreis (r) und wenn Q der Treffpunkt der Normale PM mit dem Kreise (R) ist (vgl. Fig. 94), so ist $OQ \parallel AP$. Daher sind die vier Strahlen OP, OO', OA, OQ harmonische Strahlen und schneiden auf PQ das harmonische Quadrupel P, M, C, Q

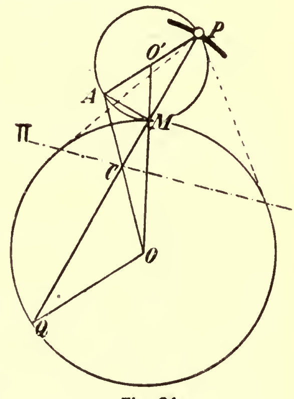


Fig. 94.

aus. *Also liegt das Krümmungszentrum C auf der Polare* Π *von P in bezug auf den festen Kreis*[127]).

147. Nun wollen wir noch einige Erzeugungen der Zykloidalen als Hüllkurven besprechen, die sich aufeinander zurückführen lassen, und von denen wir schon spezielle Fälle kennen lernten. Wir suchen zunächst die Enveloppe des Durchmessers $P'P$ des rollenden Kreises, der in seiner Anfangslage mit der Geraden OP_0 zusammenfiel (Fig. 95 und 96). Heißen wir die Zentriwinkel $P_0OM = \omega$, $PO'M = \tilde{\omega}$, so ist immer

$$\widehat{MP} = \widehat{MP_0} = R\omega = r\tilde{\omega} = \sigma .$$

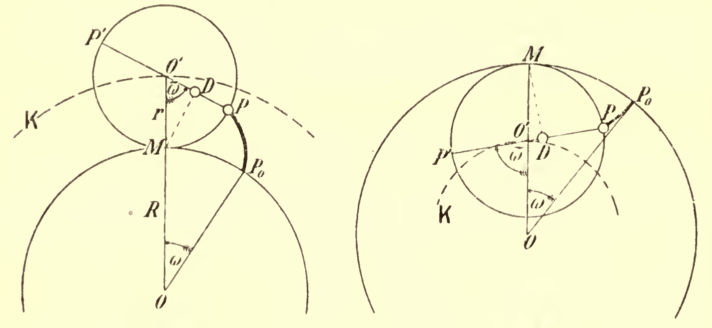


Fig. 95. Fig. 96.

Gemäß den Formeln (20) in Nr. 130 hat man für den Ort des Berührungspunktes D von PP' mit der Enveloppe ($MD \perp P'P$)

$$\mathfrak{R} = \varrho + \mathfrak{Q}\sin\tilde{\omega}, \qquad ds = (\sin\tilde{\omega} + \varrho/\mathfrak{Q})\,d\sigma,$$

also schließlich

$$\mathfrak{R} = \frac{r(2R+r)}{R+r}\sin\theta, \qquad s = \frac{r(2R+r)}{R}\cos\theta . \tag{23}$$

Da die Koeffizienten von $\sin\theta$ und $\cos\theta$ aus a und b in (6) hervorgehen, indem man $\frac{1}{2}r$ statt r einsetzt, ist der Ort von D und damit die *Enveloppe von $P'P$ diejenige Zykloidale, die durch Rollen eines halb so großen Kreises auf dem festen Kreis erzeugt wird.* Das ist dasselbe, was wir in

[127]) W. Zehme, *Elementare und anal. Behandlung der versch. Cykloiden,* Iserlohn und Elberfeld 1854, 16.

Nr. 96 an einem speziellen Beispiel geometrisch bewiesen haben. (Für die Zykloide schon von CHASLES (1837) angegeben).

Bedeuten ω und $\tilde{\omega}$ die Winkel, die in der Zeiteinheit beschrieben werden, so können wir die besprochene Erzeugung auch so auffassen: *Um den Mittelpunkt O eines Kreises* K *dreht sich der Radius OO' mit der Winkelgeschwindigkeit ω, um seinen Endpunkt O' dreht sich eine Gerade* Γ *mit der relativen Winkelgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$. Die Einhüllende von* Γ *ist eine Zykloidale mit dem Modul $2\tilde{\omega}/\omega$.* Man erhält offenbar den jeweiligen Berührungspunkt D, indem man OO' in M im Verhältnis $\tilde{\omega} : \omega$ teilt, und zwar innen, wenn die Drehungen gleichsinnig (Fig. 95), außen, wenn sie ungleichsinnig sind (Fig. 96) und von M das Lot auf $P'P$ fällt. Nach dem vorigen sind damit gleichzeitig die rollenden Kreise gegeben.

148. Eine dritte Enveloppenerzeugung läßt sich sofort auf die vorige und damit auf die erste zurückführen. *Zwei Punkte Q, Q' laufen auf einem Kreise von einer gemeinsamen Lage S aus, Q mit der Winkelgeschwindigkeit ω, Q' mit $\tilde{\omega}$ als Winkelgeschwindigkeit.* Um die Einhüllende von QQ' zu finden, bemerke man, daß

$$\sphericalangle OQQ' = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(\tilde{\omega} - \omega)$$

ist (Fig. 97), sich also um $\frac{1}{2}(\tilde{\omega} - \omega)$ geändert hat, da er in S gleich $\frac{1}{2}\pi$ war. *Demnach umhüllt QQ' eine Zykloidale, deren Modul $(\tilde{\omega} - \omega)/\omega$ ist.* Bestimmen wir den Punkt M, der OQ in dem Verhältnis $(\tilde{\omega} - \omega)/2\omega$ teilt, so ist der Fußpunkt D des Lotes von M auf QQ' der momentane Berührungspunkt. Ist T die Mitte von QQ', so verhält sich

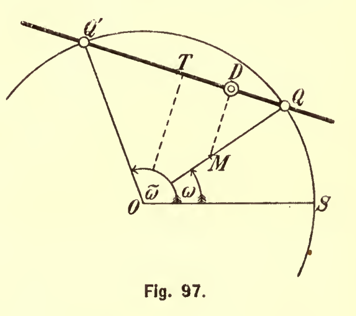


Fig. 97.

$$QD : DT : QT = 2\omega : (\tilde{\omega} - \omega) : (\tilde{\omega} + \omega),$$

also

$$QD : DQ' = \omega : \tilde{\omega}.$$

Der momentane Berührungspunkt teilt also QQ' im Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten, und zwar innen, wenn

diese wie in unserer Figur gleichsinnig, außen, wenn sie ungleichsinnig sind. Man muß dann nur $\tilde{\omega}$ negativ nehmen. S ist hier immer ein Scheitel der Kurve.

Beisp. 1. Denkt man sich z. B. die Endpunkte der, als gleich lang vorausgesetzten, Zeiger einer Uhr in jedem Augenblicke durch eine Gerade verbunden, so hüllt diese Gerade eine elfspitzige Epizykloide ein.

Beisp. 2. Des weiteren wollen wir die n^{te} Katakaustik eines Kreises bestimmen, wenn der leuchtende Punkt S auf der Peripherie liegt. D. h. wir lassen von S einen Lichtstrahl SQ ausgehen, diesen nach QQ_1 reflektieren, den reflektierten wieder nach Q_1Q_2 usw. und suchen die Einhüllende der Sehne $Q_{n-1}Q_n$. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten von Q_{n-1} und Q_n ist

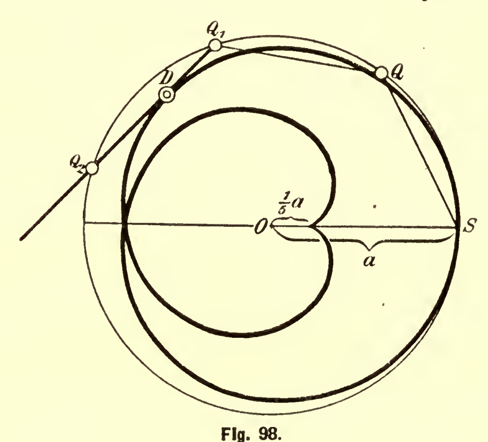


Fig. 98.

dann offensichtlich $n:(n+1)$. Die Einhüllende der Sehne $Q_{n-1}Q_n$, d. h. *die n^{te} Katakaustik des Kreises für einen leuchtenden Punkt der Peripherie ist eine einspitzige Epizykloide vom Modul* $1/n$. Für $n = 1$ erhalten wir wie früher die Kardioide (Nr. 91, Zus.), für $n = 2$ ist die Kurve durch Fig. 98 dargestellt.

149. Wie die Rektifikation, ist auch die Quadratur der Zykloidalen elementar ausführbar. Wir benutzen hierzu die Gleichungen (15*) und nennen $\mathcal{S}$ die Fläche, die der vom Mittelpunkt O des festen Kreises ausgehende Radiusvektor überstreicht. Dann ist

$$\begin{aligned} d\mathcal{S} &= \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) \\ &= \tfrac{1}{2}(R+r)(R+2r)\left(1-\cos\frac{R}{r}\,\omega\right)d\omega\,. \end{aligned}$$

Integrieren wir von $\omega = 0$ bis ω, so erhalten wir

(24) $$\mathfrak{S}_\omega = \tfrac{1}{2}(R + r)(R + 2r)\left(\omega - \frac{r}{R}\sin\frac{R}{r}\omega\right).$$

Indem wir hier $\omega = 2r\pi/R$ setzen, bekommen wir die Fläche eines von zwei aufeinanderfolgenden Spitzen begrenzten Sektors

(25) $$\mathfrak{S} = r(R + r)(R + 2r)\pi/R.$$

Ist der Modul $\mu = R/r$ eine ganze Zahl, so ist die Gesamtfläche der Kurve $\mathfrak{F} = \mu\mathfrak{S}$. Man hat demnach

(26) $$\mathfrak{F} = R^2\pi(1 + 1/\mu)(1 + 2/\mu).$$

Hieraus leiten wir die schon früher angegebenen Resultate für die speziellen Zykloidalen ab:

Kardioide ($\mu = 1$): $6R^2\pi$; Nephroide ($\mu = 2$): $3R^2\pi$;

Steinersche Kurve ($\mu = -3$): $\frac{2}{9}R^2\pi$;

reguläre Astroide ($\mu = 4$): $\frac{3}{8}R^2\pi$.

Die Formel (26) kann für die Zykloide natürlich nichts aussagen. Wir bekommen aber aus (25), wenn wir die Fläche des zugehörigen Kreissektors abziehen, den Flächeninhalt eines Zweiecks, das von einem Zykloidalenbogen und einem Kreisbogen begrenzt wird. Der Kreissektor hat die Fläche $\frac{1}{2}R^2 \cdot 2r\pi/R = Rr\pi$. Also wird die Fläche $\mathfrak{Z}$ des Zweiecks

(27) $$\mathfrak{Z} = \frac{r^2\pi}{R}(3R + 2r) = r^2\pi(3 + 2/\mu).$$

Hier gibt $\mu = \infty$ für die Fläche, die durch einen Bogen und die Direktrix der Zykloide begrenzt wird, den von Galilei vergebens gesuchten, von Roberval (1638) zuerst gefundenen Wert $3r^2\pi$.

150. Die Zykloidalen stehen in einem merkwürdigen Zusammenhang mit den Fußpunktskurven der Kegelschnitte, denen wir in unseren Ausführungen schon öfters begegnet sind. Zieht man nämlich von irgend einem Punkte D der Ebene aus an eine Zykloidale alle Tangenten, deren Zahl im allgemeinen unendlich groß ist, so werden deren Berührungspunkte, die bei irrationalem μ, wenn sie auch keine stetige Folge bilden, doch überall dicht liegen, eine Kurve erfüllen, die wir die »Berührungspunktkurve« von D

nennen. Die Stetigkeit der Aufeinanderfolge können wir, auch bei rationalem μ, dadurch erreichen, daß wir die Zykloidale um den Mittelpunkt ihres Basiskreises rotieren lassen und nach dem Orte der Berührungspunkte der von D an das System aller Lagen der Kurve gelegten Tangenten fragen. Für die Zykloide geht diese Rotation in eine Translation längs ihrer Direktrix über.

Den Berührungspunkt P der zugehörigen Systemkurve für einen beliebigen durch D gezogenen Strahl G erhält man nun, indem man G mit dem um O beschriebenen Kreis vom Radius $R+2r$, der alle Scheitel enthält, in M' schneidet (Fig. 99). M' ist dann der Gegenpunkt vom Momentanzentrum M auf dem rollenden Kreise. $MP \perp$ G gibt den Berührungspunkt. Ziehen wir jetzt eine Parallele durch M zu PD bis F auf OD, so ist immer $OF : FD = R : 2r$, unabhängig von der Lage der Geraden G. F ist also ein fester Punkt auf OD und da $FM \perp MP$, erhält man den Ort von P auch, indem man den Scheitel eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel durch F geht, auf dem Basiskreise (R) gleiten läßt und auf den anderen Schenkel von D aus die Lote zieht.

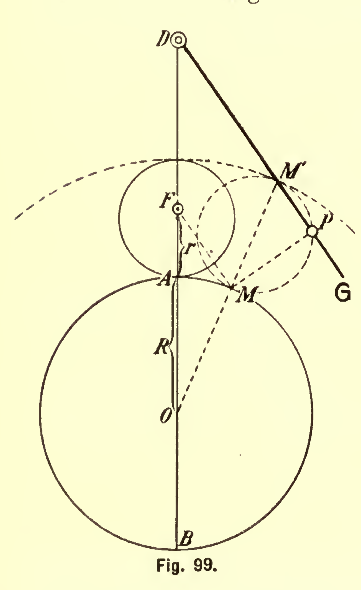


Fig. 99.

Nun wissen wir längst, daß dieser zweite Schenkel einen Kegelschnitt umhüllt, dessen große Achse der auf DO liegende Durchmesser des Basiskreises, dessen einer Brennpunkt F ist. *Die Berührungspunktkurve ist also die Fußpunktskurve eines Kegelschnittes mit D als Doppelpunkt*, eine bizirkulare rationale Quartik[128]). Liegt F außerhalb des

[128]) S. die Notiz von C. Juel im Int. math. **1**, 1894, 243. Ausführlich bei R. Blum, „*Cykloiden und Cykloidalen als Umhüllungskurven und deren Zusammenhang mit den Fußp.-K. der Kegelschnitte*, Progr. Wilh.-Realsch. Stuttgart 1902. — Der Satz bei Loria S. 489

Basiskreises, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel; daher muß $OD < R + 2r$ sein, wenn der Kegelschnitt eine Ellipse sein soll. Dies gilt für positives und negatives r. Zwischen beiden Fällen liegt das Punktepaar A, B, das durch die Endpunkte des auf DO liegenden Durchmessers des Basiskreises gebildet wird. In der Tat artet die Berührungspunktkurve für $OD = R + 2r$ in einen Kreis vom Radius $R + r$ aus.

Im Falle der Zykloide, wo der Kreis (R) zur Geraden wird (vgl. Fig. 92), hüllt $M_1 P_1$ eine Parabel ein, mit der Direktrix der Zykloide als Leitlinie und dem Brennpunkt F, der so liegt, daß DF gleich $2r$ ist. *Die Berührungspunktkurve ist also die Fußpunktskurve einer Parabel*, eine rationale zirkulare Kubik.

Handelt es sich um ein System von Kreisevolventen mit (R) als Grundkreis, so muß MP in M selbst Tangente des Kreises sein (Fig. 91). P beschreibt daher die Fußpunktskurve des Grundkreises, d. i. eine Pascalsche Schnecke, wenn D auf dem Grundkreis liegt, eine Kardioide.

151. Die natürliche Gleichung (5) der zykloidalen Kurven legt einen Gedanken nahe, auf den man sonst nicht leicht verfallen würde. Die Tatsache, daß die Kurven, von denen wir im folgenden sprechen werden, schon über ein Jahrhundert bekannt waren, bevor man darauf kam, sie als Zykloidalen zu betrachten, bestätigt das. Gleichung (5) ist, wenn man s und $\mathcal{R}$ als kartesische Koordinaten deutet, die Gleichung einer Ellipse (oder eines Kreises), auch einer Parabel für $\varsigma = a$ und $a = \infty$, $b = \infty$, $\lim b/a = 0$, $\lim b^2/a =$ endlich. Der erste Fall entspricht allen eigentlichen Zykloidalen (und der Zykloide), der letzte der Kreisevolvente. Nun kann aber (5) auch eine Hyperbel darstellen, wenn nur entweder b^2 oder a^2 negatives Vorzeichen haben. Einer solchen natürlichen Gleichung entsprechen reelle Kurven, die aber von den bisher betrachteten wesentlich verschieden sind. Die Formeln (11) und (11*) geben nun die Radien der Polkreise. Suchen wir diese für die Kurve

$$\frac{s^2}{a^2} - \frac{\mathcal{R}^2}{b^2} = 1, \tag{28}$$

---

ist falsch. Entwickelt man dort die Gleichung, so hebt sich $(x^2 + y^2)$ heraus, und es bleibt in der Tat die Gleichung der Fußpunktskurve eines Kegelschnittes.

14*

so haben wir nur statt b überall ib einzuführen. Nimmt man noch a negativ, um R positiv zu erhalten, so findet sich

$$(29)\qquad R = \frac{ab^2}{b^2 + a^2}, \quad r = -\frac{ab(b \pm ai)}{2(b^2 + a^2)}.$$

Die Kurve (28), die man »Parazykloide« nennt, wird also durch das Rollen eines komplexen Kreises auf einem reellen erzeugt. Die beiden Erzeugungsarten, die es auch hier gibt, unterscheiden sich naturgemäß nur durch das Vorzeichen von i. Aber nicht jeder beliebige komplexe Kreis, der auf einem reellen rollt, kann eine Parazykloide hervorbringen, sondern es muß, wie man aus (29) sieht, der absolute Betrag des Zentralabstandes $R + r$ gleich dem absoluten Betrag des Radius r des rollenden Kreises sein $\left(= \frac{1}{2} ab/\sqrt{b^2 + a^2}\right)$.

Man nennt ferner »Hyperzykloide«[129]) eine Kurve mit der natürlichen Gleichung

$$(30)\qquad \frac{\mathcal{R}^2}{b^2} - \frac{s^2}{a^2} = 1.$$

Aus (11) und (11*) erhalten wir für die Polkreise, indem wir ai statt a setzen,

$$(31)\qquad R = -\frac{ab^2 i}{a^2 + b^2}, \quad r = \pm\frac{ab(a \pm ib)}{2(a^2 + b^2)},$$

wo bei r immer nur entweder das obere oder das untere Zeichen gilt. Die Hyperzykloide wird also erzeugt durch das Rollen eines komplexen Kreises auf einem rein imaginären. Die zwei möglichen Erzeugungsarten unterscheiden sich auch hier nur durch das Vorzeichen von i. Um dies zu erkennen, darf man nur bei beiden Kreisradien in dem einen Falle die Vorzeichen ändern. $R + r$ hat auch für

---

[129]) Die hier benutzten Namen sind von R. de Saussure, der die zykloidale Natur der Kurven zuerst erkannte. S. dessen Diss. *Sur la géom. des courbes par roulement*, Genf 1895, 41—55 für Parazykloiden, Am. J. math. **17**, 1895, 269—272 für Hyperzykloiden. Mit den Kurven selbst hatte sich schon Euler (1750) beschäftigt und sie bereits in zwei Gattungen eingeteilt. Theorie und Geschichte aller durch Rollen von komplexen Kreisen aufeinander erzeugbaren Kurven findet man ausführlich bei E. Wölffing, *„Über Pseudotrochoiden“*, Zeitschr. Math. Phys. **44**, 1899, 139—166.

die Hyperzykloide denselben absoluten Betrag wie r. Man kann ferner bemerken, daß für die Parazykloiden R doppelt so groß ist als der reelle Teil von r, für die Hyperzykloiden R doppelt so groß als der negativ genommene imaginäre Teil von r.

Die Para- und Hyperzykloiden heißen wir mit einem gemeinsamen Namen, wenn wir sie von den bisher betrachteten Zykloidalen unterscheiden wollen, »Pseudozykloidalen«, die beiden Kurven, die für $b = a$ entstehen, also die Gleichungen haben

(32) $$s^2 - \mathcal{R}^2 = a^2\,, \quad \mathcal{R}^2 - s^2 = a^2\,,$$

da sie der Zykloide analog sind, »Pseudozykloiden«[130]).

152. Um nun zunächst die Parazykloide näher zu untersuchen, gehen wir von der Gleichung (28) aus, die zur Kennzeichnung der Gestalt genügt, wenn wir nur auch den Tangentenwinkel τ bestimmen. Es wird aber wünschenswert sein, auch eine Parameterdarstellung in natürlichen, und für die genaue Verzeichnung in rechtwinkligen Koordinaten zu erlangen. Dem stellt sich zunächst die Schwierigkeit entgegen, daß wir θ nicht direkt bestimmen können. Aber aus (13) ist ersichtlich, wenn wir das Minuszeichen beim Integral weglassen, daß

(33) $$\theta = -\frac{i\,b}{a}\tau = -i\,\vartheta\,,$$

also rein imaginär ist. Wir erhalten demnach aus (4)

$$s = a \cos i\,\vartheta\,, \quad \mathcal{R} = -i\,b \sin i\,\vartheta\,.$$

Dies ist eine reelle Darstellung mit dem Parameter $\vartheta = b\,\tau/a$. Denn führen wir die sogenannten Hyperbelfunktionen[130a])

$$\operatorname{ch}\vartheta = \tfrac{1}{2}(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) = \cos i\,\vartheta\,,$$
$$\operatorname{sh}\vartheta = \tfrac{1}{2}(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) = -i \sin i\,\vartheta$$

ein, so lautet sie

(34) $$s = a \operatorname{ch}\vartheta\,, \quad \mathcal{R} = b \operatorname{sh}\vartheta\,.$$

---

[130]) Diese Benennungen sind von E. Cesàro, der sich viel mit den in Rede stehenden Kurven beschäftigte.

[130a]) Mannigfache Anwendungen der Hyperbelfunktionen auf spezielle Kurven siehe bei S. Günther: *Die Lehre von der gewöhnlichen und verallg. Hyperbelf.* Halle a. S. (Louis Nebert) 1881.

Nimmt man hiezu $\tau = a\vartheta/b$, so hat man eine vollständige Parameterdarstellung in natürlichen Koordinaten.

Die den Gleichungen (15) entsprechende Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten erhält man aus (15) selbst,

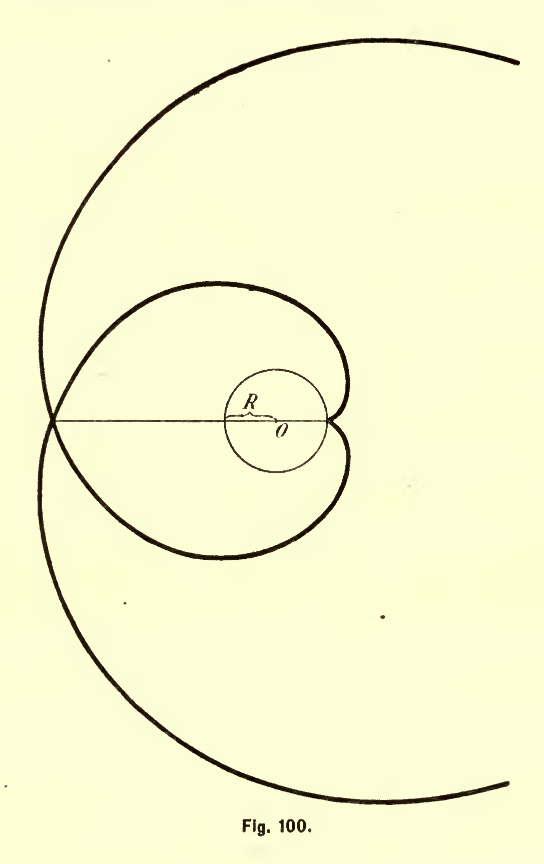


Fig. 100.

indem man die Werte von R, r, θ einsetzt, oder direkt aus den Gleichungen $dx = ds \cos\tau$, $dy = ds \sin\tau$ durch Integration, wobei immer die oben gegebene Beziehung zwischen den Hyperbelfunktionen und den entsprechenden Kreisfunktionen zu verwenden ist. Im ersten Falle hat man noch das Zeichen von y umzukehren, da wir jetzt

θ mit entgegengesetztem Zeichen nehmen. Man erhält schließlich

$$(35)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a\,b}{a^2+b^2}\left(a \sin\dfrac{a}{b}\vartheta\,\mathrm{sh}\,\vartheta + b\cos\dfrac{a}{b}\vartheta\,\mathrm{ch}\,\vartheta\right), \\ y = \dfrac{a\,b}{a^2+b^2}\left(b \sin\dfrac{a}{b}\vartheta\,\mathrm{ch}\,\vartheta - a\cos\dfrac{a}{b}\vartheta\,\mathrm{sh}\,\vartheta\right). \end{cases}$$

Die Parazykloide hat eine reelle Spitze nur für $\vartheta = 0$ ($\tau = 0$, $\mathfrak{R} = 0$). In diesem Punkte ist $s = a$. Durch Hinzufügen einer Konstante a zu s könnte man, wie bei der Kreisevolvente, erreichen, daß die Bogen von der Spitze aus gezählt werden. Die rechtwinkeligen Koordinaten der Spitze ergeben sich aus (35), wie es sein muß, als $x = R$, $y = 0$. Mit wachsendem s wächst sowohl $\mathfrak{R}$ als auch τ ins Unbegrenzte. Das heißt, die Kurve geht in unendlich vielen Windungen von der Spitze aus, ganz ähnlich wie die Kreisevolvente, zur x-Achse symmetrisch, nach beiden Seiten ins Unendliche (Fig. 100). Als Typus kann die »gespitzte Pseudozykloide« betrachtet werden, deren Darstellung man erhält, wenn man überall $b = a$ setzt.

153. Die Hyperzykloide hat, wie man schon aus Gleichung (30) sieht, keine reelle Spitze. Diese müßte ja auf dem festen Grundkreis liegen, der aber hier imaginär ist. Der Krümmungsradius $\mathfrak{R}$ hat jedoch für $s = 0$ das Minimum b. Um eine Darstellung in Parameterform zu erhalten, haben wir überall $a\,i$ statt a in den Formeln für die eigentlichen Zykloidalen zu setzen. Danach ist $s = a\,i\cos\theta$, $\mathfrak{R} = b\sin\theta$. Der Winkel θ wird offensichtlich wieder rein imaginär. Damit aber die Darstellung reell werde, müssen wir (unter Weglassung des Minuszeichens) in (13) von $\frac{1}{2}\pi$ bis θ integrieren, d. h.

$$(36)\qquad \tau = -\frac{a\,i}{b}\left(\theta - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \frac{a}{b}\vartheta$$

setzen, so daß also $\theta = i\,\vartheta + \frac{1}{2}\pi$ wird. Hieraus wird $s = -a\,i\cos i\,\vartheta$, $\mathfrak{R} = b\cos i\,\vartheta$, oder

$$(37)\qquad s = a\,\mathrm{sh}\,\vartheta\,, \quad \mathfrak{R} = b\,\mathrm{ch}\,\vartheta\,.$$

Demgemäß ergibt sich, wie vorhin, die Darstellung in rechtwinkeligen Koordinaten

$$(38)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a\,b}{a^2+b^2}\left(a\sin\dfrac{a}{b}\vartheta\,\mathrm{ch}\,\vartheta + b\cos\dfrac{a}{b}\vartheta\,\mathrm{sh}\,\vartheta\right), \\ y = \dfrac{a\,b}{a^2+b^2}\left(b\sin\dfrac{a}{b}\vartheta\,\mathrm{sh}\,\vartheta - a\cos\dfrac{a}{b}\vartheta\,\mathrm{ch}\,\vartheta\right). \end{cases}$$

Das Minimum für $\mathcal{R}$ bei $s = 0$ entspricht $\vartheta = 0$ $(\tau = 0)$. Der zugehörige Kurvenscheitel liegt im Punkte $x = 0$,

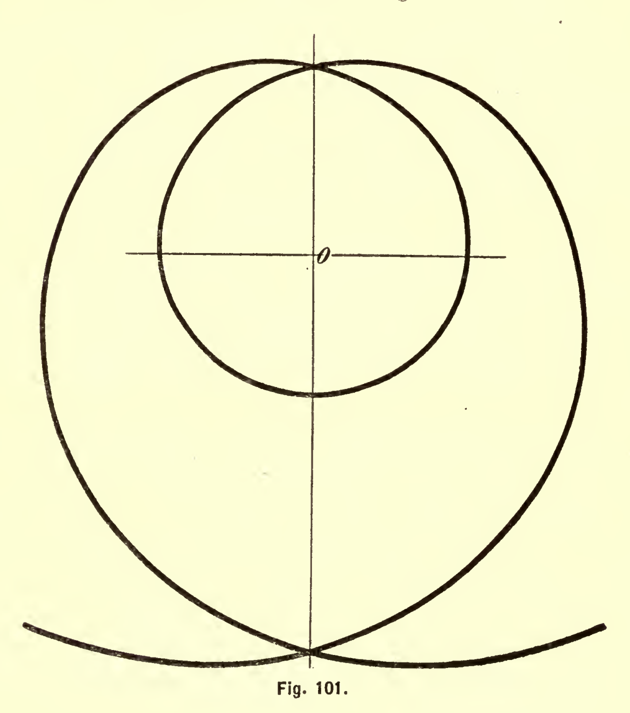


Fig. 101.

$y = -a^2 b/(a^2 + b^2) = -(R + 2r)$. Im übrigen verhält sich die Kurve wie die Parazykloide (Fig. 101). Als Typus kann man wieder die »ungespitzte Pseudozykloide« nehmen, die für $b = a$ aus den obigen Formeln hervorgeht.

154. Der große Vorteil nun, den die Auffassung der behandelten beiden Kurvengattungen als Zykloidalen bietet, ist, abgesehen von dem theoretischen Interesse, der, daß damit sämtliche für die eigentlichen Zykloidalen bewiesenen Sätze auch für die Para- und Hyperzykloide Geltung haben.

So liegt bei allen Zykloidalen der Krümmungsmittelpunkt auf der Polare des Kurvenpunktes in bezug auf den festen Kreis; bei allen Zykloidalen liegt der Krümmungsmittelpunkt der Evolute auf dem Radiusvektor, der von dem immer reellen Mittelpunkte O des Basiskreises ausgeht. Die Projektion p dieses Radiusvektors OP auf die Tangente der Kurve ist $R\cos\theta$ (Fig. 90), der zugehörige, vom nächsten Scheitel aus gezählte Bogen $s = a\cos\theta$. Also ist das Verhältnis $p:s = R:a = b^2:(a^2 - b^2) =$ konst. und reell für alle Zykloidalen. Dieser und der vorhergehende Satz sind zudem für die Zykloidalen charakteristisch, d. h. wenn man alle Kurven sucht, die einer dieser beiden Bedingungen genügen, so findet man die Zykloidalen.

Wir fanden ferner für die Zykloidalen mit reellen Polkurven den Satz, daß alle Evolutoiden ähnliche Zykloidalen seien. Das Ähnlichkeitsverhältnis war $a:\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$ (22). Wenn nun aber etwa eine Parazykloide vorliegt, so ist dasselbe $a:\sqrt{a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha}$ und es tritt für $\operatorname{tg}\alpha < b/a$ der Fall ein, daß dieses Verhältnis rein imaginär wird. Insbesondere ist dies für die eigentliche Evolute ($\alpha = 0$) der Fall. Was bedeutet nun das? Multiplizieren wir in der allgemeinen Gleichung (28) der Parazykloide die beiden Konstanten a und b mit i, so entsteht die Gleichung der Hyperzykloide. Para- und Hyperzykloide sind also in dem erweiterten Sinne zueinander ähnlich, daß der Vergrößerungsfaktor rein imaginär ist. Dann erleidet auch der Satz von den Evolutoiden der Pseudozykloidalen keine Ausnahme. Für den gewöhnlichen Ähnlichkeitsbegriff aber sind die Evolutoiden der Parazykloiden nur so lange ähnliche Kurven, als $\operatorname{tg}\alpha > b/a$, andernfalls Hyperzykloiden. (Den Übergangsfall $\operatorname{tg}\alpha = b/a$ behandeln wir gleich unten.) Für letztere existiert natürlich ein entsprechender Satz. Insbesondere aber kann man sagen: *Die Evolute einer Parazykloide ist eine (pseudoähnliche) Hyperzykloide und umgekehrt. Daher sind die pseudozykloidalen Kurven erst ihren zweiten, vierten usw. Evoluten im eigentlichen Sinne ähnlich*[131]).

---

[131]) Euler kam in der Tat auf diese Kurven, indem er in Analogie zu den zykloidalen Kurven, die ihren ersten Evoluten ähnlich sind, Kurven suchte, die ihren zweiten Evoluten ähnlich sind.

155. Auch die Berührungspunktkurven der Pseudozykloidalen geben zu einer interessanten Bemerkung Anlaß. Wir fanden Fußpunktskurven von Kegelschnitten für die Zykloidalen. Aber die Betrachtungen, die dazu führten, hängen nicht von der Realität der bezüglichen Elemente ab. Es mag nur der Gedanke auftauchen, das Endresultat sei für die Pseudozykloidalen ebenfalls imaginär. Das ist im allgemeinen nicht der Fall. Nun verhält sich die Sache folgendermaßen. Für die Parazykloidalen ist R reell, $R+2r$ rein imaginär, das Verhältnis $R/(R+2r)$ hat den Wert ib/a, so daß, wenn wir die früheren Bezeichnungen beibehalten und $OD=d$ setzen, $OF=ibd/a$ also rein imaginär wird. Die Einhüllende von MP ist aber eine Ellipse, die AB zur kleinen Achse und F zum (imaginären) Brennpunkte hat. Diese Ellipse ist offenbar reell; denn wir bemerkten schon in Nr. 5, Zus., daß die Fußpunktskurve für einen imaginären Brennpunkt der Scheitelkreis über der kleinen Achse ist. Daraus schließen wir aber, *daß die Berührungpunktkurve für die Parazykloide die Fußpunktskurve einer Ellipse mit dem Pol auf der kleinen Achse ist.*

Bei der Hyperzykloide ist R rein imaginär, $R+2r$ reell. Das Verhältnis $R/(R+2r)$ hat den Wert $-ib/a$, so daß $OF=-ibd/a$ wird, also ebenfalls rein imaginär ist. Die Einhüllende von MP ist dann eine Hyperbel, mit AB als imaginärer Achse und F als imaginärem Brennpunkte. *Demnach ist die Berührungspunktskurve für die Hyperzykloide die Fußpunktskurve einer Hyperbel mit dem Pol auf der imaginären Achse.* Diese Hyperbel ist aber nicht immer reell. Denn man findet für die Länge der reellen Halbachse $\sqrt{(bd/a)^2-R^2}$, so daß diese nur reell ist, solange $d>a^2b/(a^2+b^2)$, d. h. $d>R+2r$, D also außerhalb des die Scheitel enthaltenden Kreises liegt. Anderenfalls ist auch die Fußpunktskurve imaginär.

156. Wir müssen jetzt auf die den Übergang zwischen Para- und Hyperzykloiden vermittelnde Kurvenspezies zu sprechen kommen. In Nr. 154 sahen wir, daß es eine solche unter den Evolutoiden einer Parazykloide gibt, wenn $\operatorname{tg}\alpha=b/a$ ist. Dann ist das Ähnlichkeitsverhältnis unendlich groß und die Gleichung der Evolutoide wird $s^2/a^2-\mathfrak{R}^2/b^2=0$. Diese spaltet sich sofort in die beiden linearen Gleichungen $s/a\pm\mathfrak{R}b=0$. Wir haben es also

mit einer Kurve zu tun, die durch eine lineare Gleichung in natürlichen Koordinaten dargestellt wird.

Auf denselben Grenzfall stoßen wir, wenn wir die allgemeine Gleichung der Zykloidalen in der Form schreiben

$$(39) \qquad \mathcal{R}^2 = \alpha s^2 + 2\beta s + \gamma\,.$$

Da diese Gleichung mit

$$(39^*) \qquad \left(s + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \frac{\mathcal{R}^2}{\alpha} = \frac{\Delta}{\alpha^2} \qquad [\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma]$$

identisch ist, so stellt (39) für $\alpha < 0$ Zykloidalen mit reellen Polkurven dar, für $\alpha > 0$ Pseudozykloidalen, für $\alpha = 0$ die gewöhnliche Kreisevolvente. Die Zykloidalen sind bei positivem Δ für $-1 < \alpha < 0$ Epizykloiden, für $\alpha = -1$ ergibt sich die gemeine Zykloide, für $\alpha < -1$ Hypozykloiden. Bei negativem Δ sind die Kurven imaginär. Die Pseudozykloidalen sind Parazykloiden für $\Delta > 0$, Hyperzykloiden für $\Delta < 0$; für $\alpha = 1$ entsteht immer die betreffende Pseudozykloide. Ist aber $\Delta = 0$, so geht der schon eingangs besprochene Grenzfall hervor, der durch die natürliche Gleichung

$$(40) \qquad \mathcal{R} = \varkappa s\,,$$

wo man eine additive Konstante hinzufügen kann, charakterisiert ist.

Die Kurve, von der wir sprechen, wurde ziemlich gleichzeitig von DESCARTES und TORICELLI (um 1640) entdeckt und von VARIGNON, wegen der Form ihrer Polargleichung [s. unten Gleichung (45)] »logarithmische Spirale« genannt. Was ihre Gestalt angeht, so sieht man aus (40), daß mit wachsendem s auch $\mathcal{R}$ ins Unbegrenzte wächst. Für den Tangentenwinkel ergibt sich aber

$$(41) \qquad \tau = \int \frac{ds}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\varkappa}\int_1^s \frac{ds}{s} = \frac{1}{\varkappa}\log s \qquad [s = e^{\varkappa\tau}]\,,$$

wenn wir ihn von dem Punkte $s = 1$ aus zählen. Er wächst hiernach mit s ins Unendliche. Die Kurve geht also in unendlich vielen, immer weiter werdenden Windungen ins Unendliche. Für abnehmendes s nimmt auch $\mathcal{R}$ ab, bis der Krümmungsradius für $s = 0$ Null wird. Dort

ist aber keine Spitze. Denn wir können diesen Punkt nur nach unendlich vielen, immer enger werdenden Windungen erreichen, da auch τ abnimmt, bis es für $s = 0$ gleich $-\infty$ wird (vgl. Fig. 102). Eine solche Singularität, die uns hier

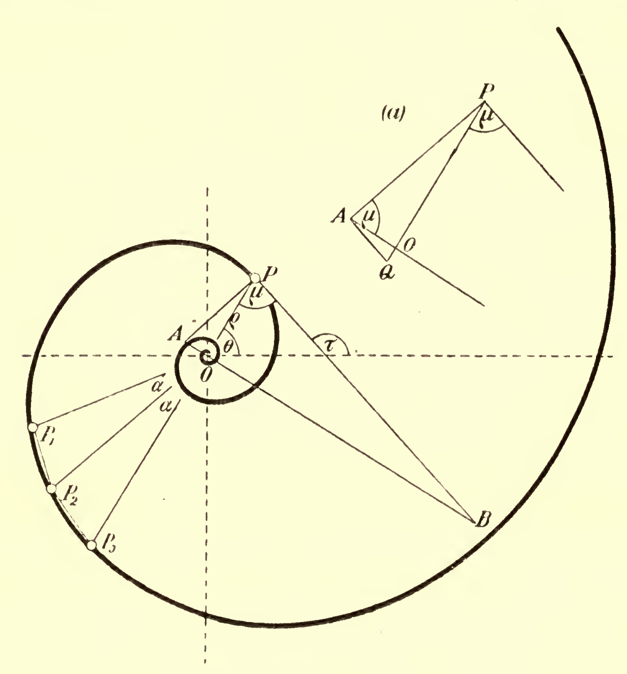


Fig. 102.

zum erstenmal begegnet und natürlich bei algebraischen Kurven überhaupt unmöglich ist, heißt »asymptotischer Punkt«.

157. Um eine Darstellung der logarithmischen Spirale in rechtwinkligen Koordinaten zu erhalten, bilden wir wieder

$$dx = ds\cos\tau = \varkappa\, e^{\varkappa\tau}\cos\tau\, d\tau\,, \qquad dy = ds\sin\tau = \varkappa\, e^{\varkappa\tau}\sin\tau\, d\tau$$

und integrieren, um den Koordinatenanfangspunkt in das »Auge« (den asymptotischen Punkt) zu legen, von $-\infty$ bis τ. Dann erhält man

$$(42) \qquad x = \frac{\varkappa\, e^{\varkappa\tau}(\sin\tau + \varkappa\cos\tau)}{1+\varkappa^2}\,, \qquad y = \frac{\varkappa\, e^{\varkappa\tau}(\cos\tau - \varkappa\sin\tau)}{1+\varkappa^2}\,.$$

Aus dieser Parameterdarstellung kann man die Gleichung in Polarkoordinaten ableiten. Man erhält zunächst

$$x^2 + y^2 = \varkappa^2 e^{2\varkappa\tau}/(1+\varkappa^2)\,,$$

also

(43) $$\varrho = \frac{\varkappa\, e^{\varkappa\tau}}{\sqrt{1+\varkappa^2}}\,.$$

Ferner ist, wenn man die Richtung der y-Achse umkehrt,

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{y}{x} = \frac{\varkappa \operatorname{tg}\tau - 1}{\varkappa + \operatorname{tg}\tau} = \frac{\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\mu}{1 + \operatorname{tg}\tau \operatorname{tg}\mu}\,;$$

dabei ist $\varkappa = \operatorname{ctg}\mu$ gesetzt, wo μ einen spitzen Winkel bedeutet. Es ist also schließlich

(44) $$\theta = \tau - \mu\,.$$

Da für τ derjenige Winkel genommen werden muß, der abnimmt, wenn der Berührungspunkt der Tangente gegen das Auge hinwandert, ist μ der Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor. Daher haben wir den Satz: *Die logarithmische Spirale schneidet alle vom Auge ausgehenden Radiusvektoren unter demselben Winkel μ, dessen Kotangente gleich der die Spirale bestimmenden Konstanten $\varkappa$ ist.* Aus (43) und (44) ergibt sich dann als Polargleichung

(45) $$\varrho = c \cdot e^{\varkappa\theta}\,,$$

wenn man $c = \cos\mu \cdot e^{\mu \operatorname{ctg}\mu}$ setzt. Wir müssen aber gleich bemerken, daß die Veränderung von c auf die Kurve keinen Einfluß hat. Diese ist vielmehr durch $\varkappa$ ihrer Gestalt und Größe nach vollständig gegeben. Denn vergrößern wir etwa alle Radienvektoren vom Auge aus im nämlichen Verhältnis, setzen also $c\,m$ statt c, so können wir die Gleichung schreiben

$$\varrho = c\,m\,e^{\varkappa\theta} = c\,e^{\varkappa(\theta + \log m/\varkappa)} = c\,e^{\varkappa\theta'}\,,$$

d. h. wir müssen die Polarachse nur um den Winkel $\alpha = -\log m/\varkappa$ drehen, dann erhalten wir wieder die ursprüngliche Gleichung. In der Tat zeigt auch die Gleichung (40), *daß die Kurve gegenüber jeder Ähnlichkeitstransformation invariant ist.* Dies ist eine charakteristische Eigenschaft der logarithmischen Spirale. Denn soll sich eine natürliche Gleichung nicht ändern, wenn man in ihr $\mathcal{R} = \lambda\mathcal{R}'$, $s = \lambda s'$

setzt, so muß sie in $\mathcal{R}$ und s homogen sein, stellt also ein System von logarithmischen Spiralen dar.

158. Aus Gleichung (43) ergeben sich sofort weitere wichtige Eigenschaften der logarithmischen Spirale. Wir können diese Gleichung schreiben

$$(46) \qquad \varrho = \mathcal{R} \sin\mu = s \cos\mu \,.$$

Hierdurch wird folgendes ausgesagt: *Errichtet man auf dem Radiusvektor OP in O das Lot und wird dieses von der Normale in A, von der Tangente in B geschnitten, so ist PA der Krümmungsradius, PB die Länge des Bogens der Spirale von P bis zum Auge.* Man bemerke, daß der erste Teil dieses Satzes nichts anderes aussagt, als daß das Krümmungszentrum der Polare von P in bezug auf den in den Punkt O zusammengeschrumpften Grundkreis angehören muß. Auch der weitere für alle Zykloidalen gültige Satz, daß die Projektion des Radiusvektors auf die Tangente dem Bogen proportional sein muß, ist hier direkt zu ersehen, da $\triangle OBP$ in jeder Lage dieselbe Gestalt hat.

Des weiteren gilt auch der Satz, dessen direkten Beweis wir dem Leser überlassen, daß jede Evolutoide der logarithmischen Spirale ihr ähnlich, also mit ihr kongruent ist. Da demnach insbesondere die Evolute wieder eine logarithmische Spirale ist, so sieht man aus Fig. 102 (a) direkt, indem man auf A dieselbe Konstruktion des Krümmungszentrums anwendet, wie auf P, daß dieses (Q) auf den Radiusvektor OP zu liegen kommt, ebenfalls ein für alle Zykloidalen gültiger Satz.

Wie die Rektifikation, ist auch die Quadratur der logarithmischen Spirale elementar ausführbar. Wir suchen die Fläche, die der Radiusvektor überstreicht, wenn er vom Auge ausgehend bis in die Lage OP gelangt. Es ergibt sich

$$\mathcal{F} = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\theta} \varrho^2 \, d\theta = \tfrac{1}{2} c^2 \int_{-\infty}^{\theta} e^{2\varkappa\theta} \, d\theta = \tfrac{1}{4} \varrho^2 \operatorname{tg}\mu = \tfrac{1}{2} \triangle OBP \,.$$

Die logarithmische Spirale ist leicht zu zeichnen, wenn man bemerkt, daß, wenn θ in arithmetischer Progression wächst, ϱ in geometrischer Progression zunimmt. Denn es ist $\varrho = c\, e^{\varkappa(\theta + n\alpha)} = c\, e^{n\varkappa\alpha}\, e^{\varkappa\theta}$. Hat man also

drei aufeinanderfolgende Lagen OP_1, OP_2, OP_3 des Radiusvektors mit dem Winkelabstand α (Fig. 102), so ist $OP_1 : OP_2 = OP_2 : OP_3$ und die Dreiecke $P_2 O P_1$ und $P_3 O P_2$ sind ähnlich. Man erhält also unendlich viele Punkte der Kurve, wenn man ähnliche Dreiecke in dieser Weise aneinanderfügt. Setzt man $\alpha = 2\pi$, so folgt daraus insbesondere, daß auf jedem vom Auge ausgehenden Strahle die Radienvektoren in geometrischer Progression stehen.

159. Die Berührungspunktkurve, die für das Paar symmetrisch liegender logarithmischer Spiralen, das als

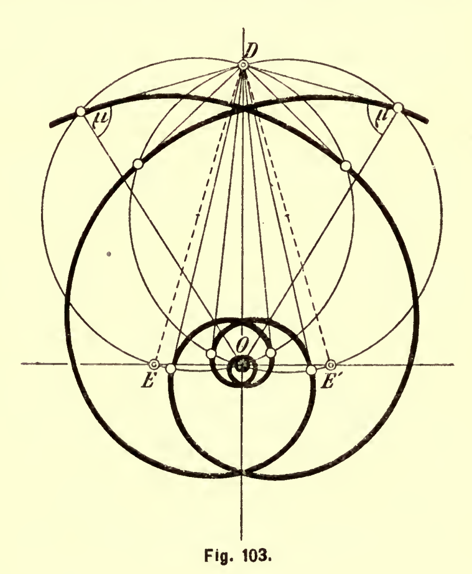


Fig. 103.

Grenzfall der Pseudozykloidalen auftritt, eine wenn auch ausgeartete Fußpunktskurve eines Kegelschnittes sein muß, können wir hier sofort direkt bestimmen. Ist D wieder der Ausgangspunkt der Tangenten, so liegen alle Berührungspunkte auf dem Kreise über DO als Sehne, der nach der einen Seite den Winkel μ faßt. Nimmt man die zur ursprünglichen in bezug auf DO symmetrische Spirale hinzu, so ergibt sich als zweiter Teil der ganzen Berührungspunktkurve der Kreis über DO als Sehne, der

nach der anderen Seite den Winkel μ faßt. Die Kreise schneiden die zu DO senkrechte Polarachse in den zwei Punkten E, E', den Endpunkten der durch D gehenden Durchmesser. Das Kreispaar ist nun offenbar die Fußpunktskurve des durch das Punktepaar E, E' dargestellten Kegelschnitts.

Dieses direkte Ergebnis kann man unschwer auch aus der zykloidalen Erzeugung ableiten. Für die logarithmische Spirale werden R und r Null, aber so, daß das Verhältnis $b/a = \varkappa$ ist. Die Strecke OF ist also wie früher $i\,b\,d/a = \varkappa\,d\,i$. Da nun die kleine Achse des Kegelschnittes $R = 0$ ist, die Entfernung des imaginären Brennpunktes vom Mittelpunkt $\varkappa\,d\,i$, so ist die große Halbachse (oder die Entfernung eines reellen Brennpunktes vom Mittelpunkt) $\sqrt{\varkappa^2 d^2 + R^2} = \varkappa\,d = d \operatorname{ctg} \mu$. Das ist aber $OE = OE'$.

160. Die Gleichungen der logarithmischen Spirale sind so einfach, daß wir einige aus ihr abgeleitete Kurven, die bei den allgemeinen zykloidalen Kurven komplizierter sind, sofort behandeln können. Das ist zunächst die Inverse in bezug auf den Pol. Ihre Gleichung $\varrho = c\,e^{-\varkappa\theta}$ läßt sich durch die Substitution $\theta = -\theta'$ sofort auf die der ursprünglichen Kurve zurückführen. Da die Veränderung von c die Kurve nur dreht, gilt allgemein: *Die Inverse einer logarithmischen Spirale in bezug auf einen Kreis um das Auge als Mittelpunkt ist mit ihr kongruent.*

Wir wollen auch die Fußpunktskurve der logarithmischen Spirale in bezug auf das Auge betrachten. Da aber die Gleichung in Polarkoordinaten gegeben ist, stellen wir zuerst die negative Fußpunktskurve auf, d. h. wir errichten auf jeden Radiusvektor im Endpunkte das Lot und suchen dessen Einhüllende. Der Berührungspunkt bestimmt sich dann aus den zwei Gleichungen

$$x \cos\theta + y \sin\theta = c\,e^{\varkappa\theta}, \qquad -x \sin\theta + y \cos\theta = c\,\varkappa\,e^{\varkappa\theta},$$

deren Auflösung eine der Darstellung (42) analoge Parameterdarstellung ergibt. Indem wir die Ausrechnung dem Leser überlassen, sagen wir: Die negative Fußpunktskurve einer logarithmischen Spirale in bezug auf das Auge ist dieser kongruent. Daher ist *auch die Fußpunktskurve selbst eine kongruente logarithmische Spirale. Nach einem*

schon öfters benutzten Satze (Nr. 5) *gilt also das gleiche von der Polarreziproken in bezug auf einen Kreis um das Auge.*

Zusatz. Die Eigenschaften der logarithmischen Spirale erinnern auffallend an die über Sinusspiralen aufgestellten Sätze (Nr. 92/3). Insbesondere ist die definierende Gleichung der letzteren $\mathcal{R}_p : \varrho = 1 : (n+1)$ für $n = 0$ erfüllt. Da ferner (für $n = 0$) $-n = n$ und $n/(n+1) = n$ ist, stimmen auch die über Inverse und Fußpunktskurven von Sinusspiralen aufgestellten Sätze mit den entsprechenden für die logarithmische Spirale überein. Nur die definierende Gleichung (6) von Nr. 92 $\mu = n\theta$ scheint zu widersprechen. Der scheinbare Widerspruch besagt jedoch nur, daß die Gleichung der logarithmischen Spirale in die Form $\varrho = a \sin^{\frac{1}{n}} n\,\theta$ nicht gebracht werden kann. Setzen wir aber in dieser Gleichung $\theta = \tilde{\omega} + \alpha/n$, $\varrho = \mathring{\varrho}\sqrt[n]{\sin\alpha}$, so wird sie

$$\text{(A)} \qquad \mathring{\varrho} = a \sin^{\frac{1}{n}}(n\,\tilde{\omega} + \alpha)\Big/\sin^{\frac{1}{n}}\alpha$$

und stellt, da weder die Drehung noch die ähnliche Verkleinerung den Charakter der Kurve ändern, wieder eine Sinusspirale vom Index n dar. Jetzt wird aber die erwähnte Gleichung (6) zu $\mu = n\,\theta + \alpha$, also für $n = 0$ zu $\mu = \alpha = \text{konst.}$ Also müßte Gleichung (A) für $n = 0$ die logarithmische Spirale $\varrho = a\, e^{\theta \operatorname{ctg}\alpha}$ darstellen; tatsächlich gibt sie aber nur eine Identität. Potenziert man jedoch mit n und dividiert mit n, so findet man

$$\lim_{n=0} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{\mathring{\varrho}}{a}\right)^n - \frac{\sin(n\,\tilde{\omega} + \alpha)}{\sin\alpha}\right] = \log\frac{\mathring{\varrho}}{a} - \tilde{\omega}\operatorname{ctg}\alpha = 0\,.$$

Das ist in der Tat die gewünschte Gleichung der logarithmischen Spirale. Nach allem ist also diese als Sinusspirale vom Index $n = 0$ aufzufassen.

161. Die Evolventen der logarithmischen Spirale sind im allgemeinen neue Kurven, die dort, wo die Abwicklung beginnt, eine Spitze haben. Da alle Evolventen ein System von Parallelkurven bilden, unter ihnen sich aber eine befindet, die der ursprünglichen Spirale kongruent ist, so ist jede Evolvente einer logarithmischen Spirale mit einer gewissen Parallelkurve derselben kongruent. Bei der mit der Grundkurve S kongruenten Evolvente S′ beginnt die Abwicklung vom Auge aus. Beginnen wir aber die Abwicklung von einem Punkte A auf S, welcher der vom Auge gezählten Bogenlänge l entspricht (Fig. 104), so müssen wir die Krümmungsradien von S′ alle um l verkürzen. *Daher ist die Parallelkurve einer logarithmischen*

Spirale im Abstande l auf der konkaven Seite mit derjenigen Evolvente kongruent, die ihre Spitze in dem Punkte mit der Bogenlänge l hat. Nimmt man die Parallelkurve auf der konvexen Seite im Abstande l, so hat sie keine reelle Spitze. Denn die entsprechende Evolvente beginnt die Abwicklung in einem Punkte, für welchen $s = -l$. Dieser gehört einem zweiten imaginären vom Auge der Spirale ausgehend zu denkenden Zug an.

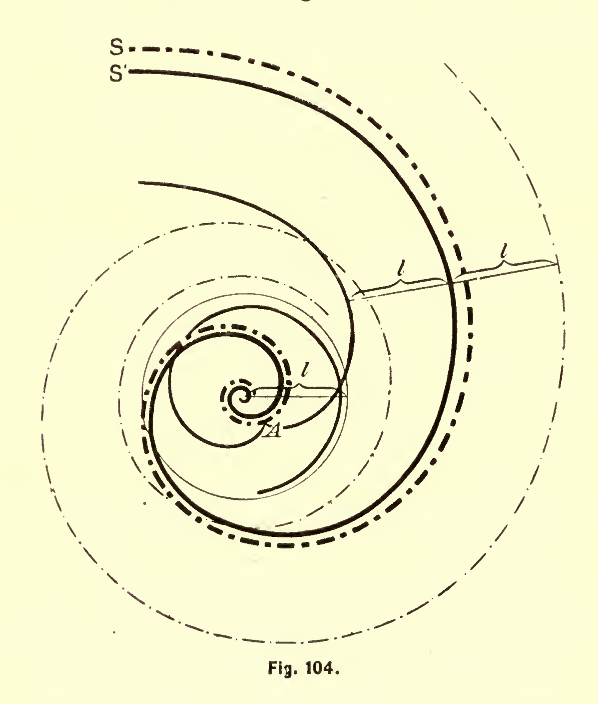


Fig. 104.

Verfolgen wir eine Parallelkurve der konkaven Seite über ihre Spitze A hinaus, dem Auge der Grundspirale zu, so wird ihr Krümmungsradius negativ und nähert sich nach unendlich vielen Umdrehungen dem Werte $-l$. Die Parallelkurve nähert sich also unbegrenzt einem »asymptotischen Kreise« vom Radius l um das Auge der Spirale von innen. Die Parallelkurve im Abstande l auf der konvexen Seite nähert sich demselben Kreise unbegrenzt,

aber von außen. Da uns diese Singularität neu ist, wollen wir auch die natürliche Gleichung der Parallelkurve aufstellen.

Außer $\mathcal{R}' = \mathcal{R} - l$ hat man für diese nach (12) in Nr. 81 noch die Gleichung $s' = s - l\tau$ $[\varkappa\tau = \log s]$. Setzt man in der ersten Gleichung $\mathcal{R} = \varkappa s$, so ergibt sich umgekehrt $\varkappa s = \mathcal{R}' + l$, und wenn man in die mit $\varkappa$ multiplizierte zweite Gleichung diesen Wert einsetzt,

$$\varkappa s' = \mathcal{R}' + l - l \log(\mathcal{R}' + l)/\varkappa\,,$$

oder wenn man die Konstanten wegläßt, die bloß den Anfangspunkt der Bogen verschieben,

$$(47) \qquad \varkappa s' = \mathcal{R}' - l \log(\mathcal{R}' + l)\,.$$

Man erkennt hier die Spitze für $\mathcal{R}' = 0$, $\varkappa s' = -l \log l$, die also nur für $l > 0$ reell ist. Ferner sieht man, daß s' einmal unendlich wird für $\mathcal{R}' = \infty$, da $\mathcal{R}'$ viel stärker unendlich wird, wie $\log(\mathcal{R}' + l)$, ein andermal für $\mathcal{R}' = -l$. Da τ' von τ sich höchstens um eine additive Konstante unterscheidet, für $\mathcal{R}' = -l$ aber $\mathcal{R} = 0$ und also $\tau' = -\infty$ wird, hat die Kurve einen asymptotischen Kreis vom Radius l. Gleichung (47) mit der Evolventengleichung zu identifizieren, dürfen wir dem Leser überlassen.

162. Wir haben in diesem Kapitel nur Kurven behandelt, die eine der Kegelschnittsgleichung

$$y^2 = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

analoge Gleichung in natürlichen Koordinaten hatten, wo y statt $\mathcal{R}$, x statt s gesetzt werden muß. Der Zusammenhang zwischen den Zykloidalen und dem jeweilig in kartesischen Koordinaten entsprechenden Kegelschnitt kann nun in folgender Weise geometrisch hergestellt werden.

Läßt man irgend eine Kurve Γ auf einer Geraden rollen, so beschreibt der jeweilige Krümmungsmittelpunkt C des Berührungspunktes eine Kurve Γ', die man »Mannheimsche Kurve« von Γ nennt[132]). Nimmt man die Gerade als x-Achse, eine zu ihr in O senkrechte Gerade

[132]) A. Mannheim bestimmte diesen Ort zuerst auf kinematisch-geometrischem Wege für verschiedene Kurven, insbesondere Zykloidalen im Journ. math. p. appl. (2) **4**, 1859, 93—104. Benennung von E. Wölffing.

als y-Achse, und zählt auf Γ die Bogen von dem Punkte A aus, der beim Rollen die Gerade in O berührt, so sind die Koordinaten von C jeweils $x = s$, $y = \mathcal{R}$ (Fig. 105). Demnach ist die Mannheimsche Kurve der Zykloidale $s^2/a^2 + \mathcal{R}^2/b^2 = 1$ die Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Das Abrollen besteht hier darin, daß die Zykloidale immer wieder dieselbe Strecke von der Länge $2a$ einmal oben, einmal unten durchläuft. Die Kurve hat Spitzen (eventuell auch asymptotische Punkte) dort, wo die Mannheimsche Kurve die x-Achse durchschneidet, Scheitel, wo die Mannheimsche Kurve Maxima oder Minima besitzt. Die Ellipse ist langgestreckt ($a > b$) für Epizykloiden, hochgestellt ($a < b$) für Hypozykloiden; sie wird zum Kreis ($a = b$) für die Zykloide. Transformiert man sie auf den Scheitel und läßt b und a unendlich werden, so daß b^2/a endlich bleibt, so wird sie zur Parabel $y^2 = 2px$ mit der Geraden als großer Achse: der Mannheimschen Kurve der gemeinen Kreisevolvente mit der natürlichen Gleichung $\mathcal{R}^2 = 2ps$.

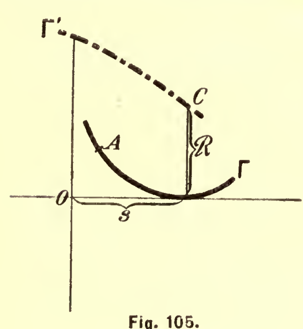


Fig. 105.

Von der Parabel kommt man zur Hyperbel, wenn man das weggefallene Glied b^2x^2/a^2 wieder einführt, aber mit negativem b^2: $y^2 = 2px + b^2x^2/a^2$ oder auf den Mittelpunkt transformiert: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Das ist eine Hyperbel mit der Geraden als reeller Achse: die Mannheimsche Kurve der Parazykloide. Doch muß die Parazykloide zweimal abrollen, um die ganze Hyperbel zu beschreiben. Wir lassen nun a und b immer kleiner werden, so daß aber das Verhältnis b/a einen bestimmten Wert $\varkappa$ behält. D. h. wir betrachten ähnliche und ähnlich liegende, konzentrische Hyperbeln, die alle dieselben Asymptoten $y^2 = \varkappa^2x^2$ haben. Diesen letzteren entsprechen zwei logarithmische Spiralen. Wir sehen also einerseits, daß die Mannheimsche Kurve einer logarithmischen Spirale eine Gerade ist, andererseits, daß die Parazykloiden sich im Unendlichen wie logarithmische Spiralen verhalten, was bei der Kreisevolvente nicht der Fall ist. In gleicher

Weise kann man sagen, daß die Epi- und Hypozykloiden mit Einschluß der Zykloide imaginäre logarithmische Spiralen als Asymptoten haben. Näher können wir auf das Verhalten im Unendlichen nicht eingehen.

163. Wir lassen jetzt a und b wieder wachsen, multiplizieren aber beide mit i. Das Verhältnis a/b möge bleiben. Dann erhalten wir die zu den vorigen pseudoähnlichen Hyperbeln mit denselben Asymptoten, für die die Gerade imaginäre Achse ist. Ihre Gleichung ist $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$. Die entsprechenden Zykloidalen, deren Mannheimsche Kurven sie sind, sind Hyperzykloiden, mit denselben logarithmischen Spiralen als Asymptoten, wie die vorhin betrachteten Parazykloiden. Wieder muß eine Hyperzykloide zweimal auf der Geraden abrollen, damit die ganze Hyperbel erzeugt werde. Ist die Para- bzw. Hyperzykloide eine Pseudozykloide, so wird die Mannheimsche Kurve eine gleichseitige Hyperbel in der einen oder anderen Lage. Die Kurven, deren Mannheimsche Kurven Kegelschnitte in einer bis jetzt nicht vorgekommenen Lage sind (hochgestellte Parabel, Hyperbel in der Gleichungsform $xy =$ konst.), werden uns erst beschäftigen. Sie haben mit den Zykloidalen keinen ersichtlichen Zusammenhang.

Interessant ist noch, den Ort des Mittelpunktes des Grundkreises beim Abrollen einer Zykloidale auf der Geraden zu verfolgen. Nach den Formeln (19) ist wenn wir dasselbe Koordinatensystem zugrunde legen, x zu s, y zu $\mathcal{R}$ proportional. Daher ist auch dieser Ort ein Kegelschnitt. Er hat im allgemeinen die Gleichung

$$\frac{(a^2 - b^2)^2 x^2}{a^2 b^4} + \frac{(a^2 - b^2)^2 y^2}{a^4 b^2} = 1 \tag{48}$$

und ist demnach in jedem Falle von derselben Gattung, wie die Mannheimsche Kurve und mit dieser konzentrisch. Eine genauere Diskussion sei dem Leser überlassen. Nur für die logarithmische Spirale bemerken wir noch, daß die Gerade, welche der momentane Krümmungsmittelpunkt beschreibt, mit dem Orte des Auges identisch ist. Dies geht schon aus den oben angeführten Sätzen über Krümmungsradien und Bogen hervor und wird vom Leser leicht bestätigt werden.

§ 25. **Die trochoidalen Kurven.**

164. Wir müssen uns nun den Kurven zuwenden, die beim Abrollen zweier Kreise aufeinander von einem beliebigen Punkte P der Ebene des rollenden Kreises beschrieben werden. Diese nennen wir »trochoidale Kurven« oder kurz »Trochoidalen« (ὁ τροχός, das Rad) im Gegensatz zu den im vorigen Paragraphen behandelten »Zykloidalen«, die ein Punkt der Peripherie beschreibt. Für ihre analytische Behandlung sind natürliche Koordinaten nicht zweckmäßig. Wir legen ein rechtwinkliges Achsensystem zugrunde, dessen x-Achse durch eine der Lagen P_0 bestimmt sei, wo der beschreibende Punkt P in einer Geraden mit den Mittelpunkten O, O' der beiden Kreise dem Berührungspunkt M der beiden Kreise am nächsten liegt (vgl. Fig. 106).

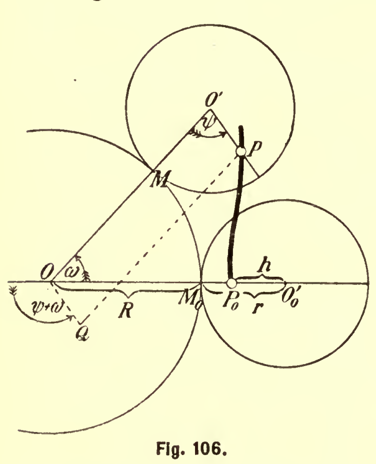


Fig. 106.

Ist ω der Wälzungswinkel am festen, ψ der entsprechende am rollenden Kreise, so haben wir zunächst wieder

$$(1) \qquad R\,\omega = r\,\psi \quad \left[\omega + \psi = \frac{R+r}{r}\,\omega\right]$$

und für die Koordinaten des Punktes P, wenn wir $O'P = h$ setzen,

$$(2) \qquad \begin{cases} x = (R+r)\cos\omega - h\cos\dfrac{R+r}{r}\,\omega\,, \\ y = (R+r)\sin\omega - h\sin\dfrac{R+r}{r}\,\omega\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen ergeben sich ohne weiteres, wenn man die gebrochene Linie $OO'P$ auf die x- bzw. y-Achse projiziert. Für $h = r$ gehen sie in die Gleichungen der Zykloidalen (Gleichung (15*) in Nr. 143) über. Die Formeln (2) sind zwar zunächst für den Fall aufgestellt,

daß der rollende Kreis den festen von außen berührt, der Berührungspunkt also die beiden Kreismittelpunkte trennt. Sie gelten aber auch, wenn O, O' auf derselben Seite von M liegen; man muß dann die Anfangslage wieder so nehmen, wie oben angegeben, und den Größen r und h das negative Vorzeichen erteilen. Eine direkte Aufstellung der Formeln in diesem Falle würde das bestätigen (Fig. 107).

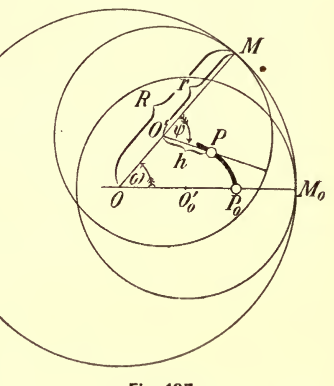


Fig. 107.

165. Die gewöhnliche Erzeugung der Trochoidalen läßt sich offenbar auch so auffassen, daß ein Punkt O' auf einem Kreise um O sich gleichförmig bewegt, während um ihn der beschreibende Punkt P auf einem anderen Kreise gleichmäßig rotiert. Das ist die epizyklische Bewegung, mittels der die Alten (Ptolemäus im Almagest zw. 125 u. 151 n. Chr.) die Bahnen der Planeten in bezug auf die als ruhend gedachte Erde erklärten. Die Rotation von P kann dabei in demselben Sinne erfolgen wie die von O' (wie in Fig. 106) oder im entgegengesetzten (wie in Fig. 107). Für die erzeugten Kurven ist das jedoch nicht wesentlich unterscheidend, ebensowenig wie die Art der Berührung der rollenden Kreise. Wir werden dies schon aus dem bezüglichen Verhalten der Zykloidalen (Nr. 141) vermuten. Im allgemeinen Falle sehen wir es aus einer dritten Auffassung der Bewegung, der wir sogleich näher treten wollen.

Ziehen wir in Fig. 106 eine Parallele OQ durch O zu $O'P$, gleich $O'P$, auch dem Sinne nach, so kann P als die vierte Ecke eines Gelenkparallelogramms $OQPO'$ aufgefaßt werden, dessen zwei Stäbe OO' und OQ um O gleichförmig rotieren, mit Geschwindigkeiten, die zu ω und $\omega + \psi$ bzw. proportional sind. Wir wollen aber, der Wichtigkeit des Ergebnisses wegen, diese Erzeugungsart direkt behandeln und sie dann mit der ursprünglichen Rollbewegung zu identifizieren suchen.

166. Es seien die beiden um O drehbaren Gelenkstäbe $OA = k$ und $OB = l$, die vierte Ecke des Parallelogramms P (Fig. 108). In der Anfangslage, wo OA und OB in eine Gerade (Γ) fallen, seien die Stäbe entgegengesetzt gerichtet. Die Drehung erfolge zunächst in demselben Sinne, so daß nach Ablauf der Zeiteinheit OA sich um den Winkel φ, OB um den Winkel χ gedreht hat. Betrachtet man die Ebene als die komplexe Zahlebene, so ist P die Summe von A und B und wir erhalten für die Koordinaten von P

(3) $$x + i\,y = k\,e^{i\varphi} + l\,e^{i(\pi + \chi)}$$

Fig. 108.

oder, wenn man Reelles und Imaginäres trennt,

(3*) $$\begin{cases} x = k\cos\varphi - l\cos\chi \\ y = k\sin\varphi - l\sin\chi\,. \end{cases}$$

Vergleichen wir diese Gleichungen mit den Gleichungen (2), so kann man sie auf zweierlei Arten mit ihnen identifizieren, indem man nämlich setzt

I.

$$R + r = k\,; \quad h = l\,;$$

$$\omega = \varphi\,; \quad \frac{R + r}{r}\,\omega = \chi\,;$$

hieraus $\frac{R}{r} = \frac{\chi - \varphi}{\varphi}$ und also

$$R = \frac{\chi - \varphi}{\chi}\,k\,, \quad r = \frac{\varphi}{\chi}\,k\,;$$

II.

$$R' + r' = -l\,; \quad h' = k\,;$$

$$\omega' = \chi\,; \quad \frac{R' + r'}{r'}\,\omega' = \varphi\,;$$

hieraus $\frac{R'}{r'} = \frac{\varphi - \chi}{\chi}$ und also

$$R' = \frac{\chi - \varphi}{\varphi}\,l\,, \quad r' = -\frac{\chi}{\varphi}\,l\,.$$

Die I. trochoidale Erzeugung ist die, von der wir ursprünglich ausgingen. Man findet das Momentanzentrum M auf OA, indem man OA im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten von A und P, die letztere relativ zu OA gerechnet, teilt. Dies ist uns schon von früher (Nr. 147) bekannt. Die II. Erzeugung ist eine notwendige Folge davon, daß die beiden Stäbe OA, OB ganz gleichberechtigt sind. Man erhält das Momentanzentrum M' auch hier, indem man OB im Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten von B und P, letztere relativ zu OB gerechnet, teilt. Ist $\chi > \varphi$, so liegt M zwischen O und A, M' außerhalb OB auf der Seite von O. Bevor wir in eine nähere Diskussion eintreten, sei noch bemerkt, daß nach den angegebenen Werten

$$AM : AP = OM : OM' = k\varphi : l\chi ,$$

also M' und M mit P in einer Geraden liegen. Das muß auch stattfinden; denn diese Gerade ist die Kurvennormale.

167. Nach der Erzeugung durch das Gelenkparallelogramm gibt es nur zwei Arten von eigentlichen Trochoidalen, das sind 1. die, für welche $\varphi/\chi > 0$, 2. die, für welche $\varphi/\chi < 0$. Im letzteren Falle ist etwa $\varphi > 0$, $\chi < 0$ zu nehmen. Um die entsprechenden Formeln aus den oben gegebenen abzuleiten, hat man dann nur auch, damit die Anfangslage stimmt, $l < 0$ anzunehmen.

Wir nennen nun die erzeugten Kurven bei gleich gerichtetem Drehsinn der beiden Gelenkstäbe OA, OB Epitrochoiden, bei entgegengesetzt gerichtetem Drehsinn Hypotrochoiden. Diese Bezeichnung stimmt mit der früher für Epi- und Hypozykloiden aufgestellten völlig überein. Denn sind φ und χ positiv und $\chi > \varphi$, so ist im Falle (I) R und r positiv, d. h. der bewegliche Kreis liegt außerhalb des festen; im Falle (II) ist R' positiv, aber r' negativ, d. h. der bewegliche Kreis berührt den festen von innen, schließt ihn aber vollständig ein, da $|r'| > R'$. Ist $\chi < \varphi$, so sind im Falle (II) R' und r' von gleichem, im Falle (I) R und r von ungleichem Zeichen, aber wieder so, daß $|R| < r$. Der rollende Kreis ist also immer ganz außerhalb des festen, wie das bei den Epizykloiden der Fall war.

Ist φ positiv, χ negativ (l negativ), so sind in beiden Fällen die Radien der rollenden Kreise von verschiedenem Zeichen (vgl. Fig. 109); immer aber ist der Radius des beweglichen Kreises absolut genommen kleiner als der des festen. Der bewegliche Kreis ist also immer ganz innerhalb des festen, wie es bei den Hypozykloiden der Fall war.

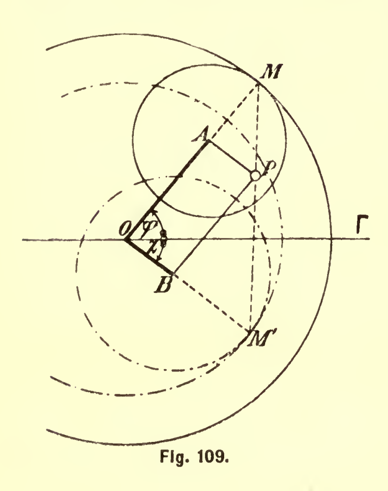


Fig. 109.

168. Die Epi- und Hypotrochoiden scheiden sich ferner je in zwei Familien, nach der Größe von l/k im Verhältnis zu φ/χ. Ist

$$l/k < \varphi/\chi,$$

so ist bei der ersten Erzeugung $h < |r|$, bei der zweiten $h' > |r'|$. Ob also der beschreibende Punkt bei der Rollbewegung innerhalb oder außerhalb des beweglichen Kreises liegt, bietet kein Unterscheidungsmerkmal. Für die Rollbewegung können wir aber die Bedingung $l/k < \varphi/\chi$ dahin formulieren, daß der beschreibende Punkt und der Mittelpunkt des festen Kreises durch die Peripherie des rollenden Kreises voneinander getrennt sind. Diese Trochoidalen nennen wir wegen ihrer Form »gestreckt (geschweift)«.

Auch wenn $l/k > \varphi/\chi$, ist der beschreibende Punkt bei der einen Erzeugung (wo $|r| < \frac{1}{2}|R|$) außerhalb, bei der andern innerhalb des beweglichen Kreises. Immer aber liegen der beschreibende Punkt und der Mittelpunkt des festen Kreises auf derselben Seite der Peripherie des beweglichen Kreises, entweder beide innerhalb oder beide außerhalb. Diese Trochoidalen heißen wir »verschlungene Trochoidalen«.

Ist $l/k = \varphi/\chi$, so liegt der beschreibende Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises, und wir haben die Zykloidalen, oder wie wir sie hier nennen können, die »gespitzten Trochoidalen«.

169. Um den Verlauf der gestreckten und verschlungenen Trochoidalen besser übersehen zu können, ist es gut, den Wendekreis W (Nr. 132) zu betrachten. Dieser berührt in M beide Kreise und liegt in bezug auf O' zu dem Kreise über R als Durchmesser homothetisch. Sein Radius ist also $w = \frac{1}{2} Q = Rr/2(R+r)$. Er liegt außerhalb des festen Kreises und ganz im beweglichen Kreise, wenn dieser außen rollt. Eine verschlungene Epitrochoide ($h > r$) kann daher überhaupt keinen Wendepunkt haben, weil P nie

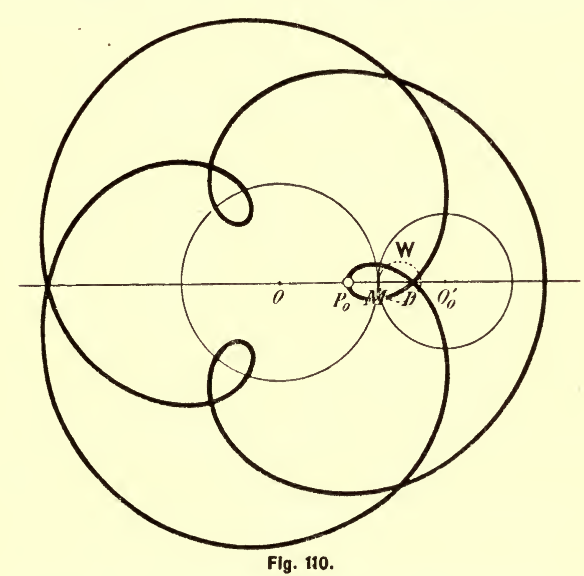


Fig. 110.

in das Innere von W gelangt. Da nun von seiner Anfangslage P_0 aus der Punkt P zuerst nach der der Rollbewegung entgegengesetzten Seite sich wendet, muß die Kurve die Scheitelrichtung OP_0 in einem Punkte D überschneiden. Wegen der Symmetrie bildet also die verschlungene Epitrochoide Schleifen, deren Doppelpunkte auf den Scheitelgeraden liegen. Zu diesen (primären) Doppelpunkten können noch andere (sekundäre) treten, wenn bei genügend großem h die Schleifen sich gegenseitig überschneiden. Dies ist z. B. in unserer Fig. 110 der Fall, wo der Modul $\mu = \frac{3}{2}$ genommen wurde.

In gleicher Weise können auch die gestreckten Epitrochoiden keine Wendepunkte haben, wenn $h < r - Q$, d. h. $h < r^2/(R + r)$ ist. Die Kurve verläuft dann völlig konkav gegen den Mittelpunkt O des festen Kreises[133]). Außer den Hauptscheiteln hat sie aber dann noch Nebenscheitel, auf deren Betrachtung wir nicht eingehen können. Ist jedoch $r > h > r^2/(R + r)$, so hat die geschweifte Epitrochoide Wendepunkte, die innerhalb des durch die Radien R und $R + Q = R(R + 2r)/(R + r)$ bestimmten Kreisringes liegen (vgl. die der vorigen entsprechende Fig. 111). Die

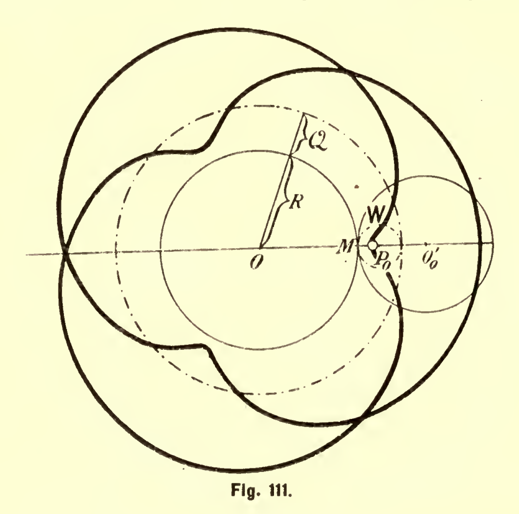


Fig. 111.

Kurve beginnt dann in der Anfangslage konvex gegen O. Wenn h gerade gleich $r^2/(R + r)$ ist, treten in der einen

[133]) So ist z. B. die Bahn des Mondes relativ zur Sonne. Wenn wir $R + r = 150\,000\,000$ km setzen, den synodischen Monat zu $29\frac{1}{2}^d$, das siderische Jahr zu $365\frac{1}{4}^d$ annehmen, so finden wir R und r, indem wir die Sonnenentfernung im Verhältnis $365\frac{1}{4} : 29\frac{1}{2}$ teilen. Es ergibt sich ungefähr $R = 138\,800\,000$ km, $r = 11\,200\,000$ km. Die kritische Entfernung $r - Q = r^2/(R + r)$ bestimmt sich hieraus zu 838000 km. Die Mondentfernung ist aber geringer als die Hälfte dieser Strecke, nämlich $h = 385\,000$ km, so daß sich also die Mondepitrochoide nur wenig von einem Kreise unterscheidet. Genaue Zeichnung siehe bei Martus, *Astr. Erdkunde*, 3. Aufl. Leipzig (C. A. Koch) 1904, 382. Die Jupitermonde beschreiben teils verschlungene, teils gestreckte Epitrochoiden um die Sonne.

Hälfte der Hauptscheitel, die der Anfangslage entsprechen, Flachpunkte auf.

170. Wird r kleiner und geht durch Null zu negativen Werten über, so bleibt w zunächst positiv. Der Wendekreis liegt aber doch auch auf der Seite der Tangente in M, wo die erzeugenden Kreise liegen. Das positive Vorzeichen von w zeigt also nur an, daß der Wendekreis und der rollende Kreis auf derselben Seite von M liegen. Der Radius w wächst von 0 bis $|r|$, wenn $|r| = \frac{1}{2}R$ ist. Solange also $|r| < \frac{1}{2}R$, ist $w < |r|$. Da für die verschlungene Hypotrochoide nach der obigen Definition $h > |r|$ ist, wenn $|r| < \frac{1}{2}R$, kann auch diese keine Wendepunkte haben und ist der verschlungenen Epizykloide analog, nur daß die Schleifen nach auswärts gerichtet sind. Ist h aber wenig kleiner als $|r|$, so entsteht eine gestreckte Hypotrochoide mit Wendepunkten, die sich von einer analogen Epitrochoide dadurch unterscheidet, daß sie in den der Anfangslage entsprechenden Scheiteln die konvexe Seite nach außen kehrt. Für $h = r^2/(R - |r|)$ treten in den andern Hauptscheiteln Flachpunkte auf und wenn h kleiner als dieser Wert wird, ist ebenfalls die ganze Kurve konkav gegen O. Der Leser möge sich hier selbst, etwa anschließend an die Steinersche Hypozykloide, entsprechende Figuren herstellen. Die Kurven werden dann rationale Quartiken mit drei Knoten oder drei isolierten Punkten.

Wird $|r| > \frac{1}{2}R$, so wird $w > |r|$., der Wendekreis also größer als der rollende Kreis, bis für $r = -\frac{2}{3}R$ auch $w = R$, d. h. der Wendekreis so groß wie der erzeugende Kreis wird. Von da ab wächst w ins Unbegrenzte, solange noch Hypotrochoiden erzeugt werden, d. h. solange $|r| < R$. Erst für $|r| > R$ und $r < 0$ wird $w < 0$, d. h. der Wendekreis tritt, zunächst sehr groß, auf die andere Seite von M. Jetzt werden wieder Epitrochoiden erzeugt. Wir wollen aber eine genauere Diskussion bei den zweiten Erzeugungsarten dem Leser überlassen.

171. Bevor wir darangehen, die Trochoidalen für besondere, vor allem unendliche Werte von R und r zu betrachten, müssen wir dem Falle, wo $h = R + r$ ist, unser Augenmerk schenken. Die entsprechenden Trochoidalen sind für positives und negatives r vom verschlungenen

Typus; alle Schleifen gehen durch das Zentrum des festen Kreises. Die Gleichungen (2) ergeben die Darstellung

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= 2(R+r)\sin\frac{R+2r}{2r}\,\omega\sin\frac{R}{2r}\,\omega\,,\\ y &= -2(R+r)\cos\frac{R+2r}{2r}\,\omega\sin\frac{R}{2r}\,\omega\,. \end{aligned}\right.$$

Hieraus erhält man

$$x^2+y^2 = 4(R+r)^2\sin^2\frac{R}{2r}\,\omega\,,\qquad \frac{y}{x} = -\operatorname{ctg}\frac{R+2r}{2r}\,\omega\,.$$

Setzt man, um Polarkoordinaten einzuführen,

$y/x = -\operatorname{ctg}(\theta + \frac{1}{2}\pi)$, so wird $\omega = (\theta + \frac{1}{2}\pi)\cdot 2r/(R+2r)$,

so daß schließlich

$$(5)\qquad \varrho = 2(R+r)\sin\frac{R}{R+2r}(\theta+\tfrac{1}{2}\pi)$$

als Gleichung in Polarkoordinaten sich ergibt. Demnach sind diese »sternförmigen Trochoidalen«, wie sie auch genannt wurden, nichts anderes als die uns schon bekannten Rosenkurven von der Gleichungsform (Nr. 83)

$$(5^*)\qquad \varrho = m\sin\mu\,\tilde{\omega}\,.$$

Da $\tilde{\omega} = \theta + \frac{1}{2}\pi$ zu setzen ist, so sehen wir, daß in (5) die Achse durch die Mitte eines Blattes geht. Ist μ gegeben, so findet man $r/R = (1-\mu)/2\mu$. Daher können wir die Rosenkurven in zwei Klassen teilen, je nachdem sie zu den Epi- oder Hypotrochoiden zählen. Wir haben epitrochoidale Rosenkurven für $\mu < 1$, hypotrochoidale Rosenkurven für $\mu > 1$. Dazwischen steht der Kreis für $\mu = 1$.

172. Die bekanntesten Rosenkurven sind die für $\mu = 2$ und $\mu = 3$. Für die erstere wird $r = -\frac{1}{4}R$, für die zweite $r = -\frac{1}{3}R$, es sind dies das regelmäßige Vier- und Dreiblatt, die Fußpunktskurven der regulären Astroide und der Steinerschen Hypozykloide in bezug auf den Mittelpunkt. Für $\mu = \frac{1}{2}$ ergibt sich $r = \frac{1}{2}R$, für $\mu = \frac{1}{3}$ $r = R$. Die erstere, von der Fig. 112 ein Bild gibt, ist eine Kurve 6. Ordnung, die zweite eine Quartik, die wir als Inverse der Trisektrix des Maclaurin schon erwähnt haben (Nr. 84). Auch die beiden letzteren sind Fußpunktskurven bekannter Zykloidalen, wie wir im folgenden sehen werden.

Von speziellen eigentlichen Trochoidalen sind nur je eine Hypo- und Epitrochoide bemerkenswert. Die Hypotrochoide entsteht für $r = -\frac{1}{2}R$ bei beliebigem h. Ihre Gleichungen werden nach (2), wo h das Zeichen zu ändern hat,

$$x = (\tfrac{1}{2}R + h)\cos\omega\,,$$

$$y = (\tfrac{1}{2}R - h)\sin\omega\,.$$

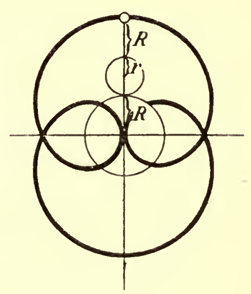


Fig. 112.

Es ist dies also eine Ellipse, die für $h = r = \frac{1}{2}R$ in den Durchmesser $y = 0$ übergeht (vgl. Nr. 72).

Die Epitrochoide wird erzeugt für $r = R$ bei beliebigem h. Ihre Gleichungen sind

(7) $$x - h = 2\cos\omega(R - h\cos\omega)\,,\quad y = 2\sin\omega(R - h\cos\omega)\,.$$

Führt man Polarkoordinaten ein, indem man $x - h = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$ setzt, so erhält man $\theta = \omega$ und die Gleichung

(7*) $$\varrho = 2(R - h\cos\omega)\,.$$

Das ist die Gleichung einer Pascalschen Schnecke, die für $h = R$ zu einer Kardioide wird.

Zusatz. Die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes bietet bei Trochoidalen kein besonderes Interesse. Doch sei hier ergänzend bemerkt, daß die Krümmungsradien der Scheitel, wo die Savarysche Konstruktion im Stiche läßt, leicht aus dem algebraischen Ausdrucke mit Hilfe des Wendekreises konstruiert werden können. Nach (10) in Nr. 128 ist für einen Scheitel, da

$$\sin\theta = 1\,,\quad 1/(\mathcal{R} - \varrho) + 1/\varrho = 1/R + 1/r = 1/\mathcal{Q}\,,$$

also $\mathcal{R} = \varrho^2/(\varrho - \mathcal{Q})$. $\mathcal{Q}$ selbst konstruiert man am bequemsten aus der Formel $r - \mathcal{Q} = r^2/(R + r)$. Die Quadratur der Trochoidalen ist elementar; es ergibt sich aber kein geschlossenes Resultat. Auf Evoluten und andere abgeleitete Kurven können wir uns nicht einlassen, da diese komplizierterer Natur sind.

173. Wir wollen jetzt noch eine andere Erzeugung besprechen, die eine früher für Zykloidalen gegebene erweitert und dadurch verständlicher macht.

Es mögen zwei Punkte N, L auf einem Kreise (O) vom Radius R laufen, der eine mit φ, der andere mit χ $(> \varphi)$ als Winkelgeschwindigkeit. Ein Punkt P teile LN im Ver-

hältnis $p:q$ (Fig. 113). Was ist der Ort von P? Ziehen wir $PA \parallel LO$, $PB \parallel NO$, so ist

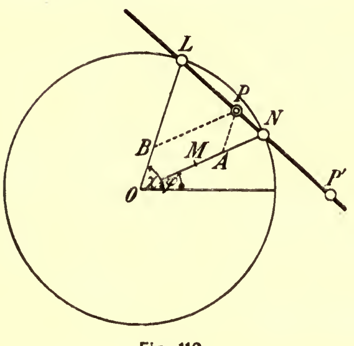


Fig. 113.

$$OA = \frac{p}{p+q} R\,,$$

$$OB = \frac{q}{p+q} R\,,$$

beide also konstant. Wir haben demnach ein Gelenkparallelogramm $OAPB$, dessen zwei um O drehbaren Stäbe gleichförmig rotieren. Daher beschreibt P eine Trochoidale. Teilt man im Momentanzentrum M die Strecke OA im Verhältnis $(\chi - \varphi)/\varphi$, so ergeben sich die Radien der rollenden Kreise

$$(OM =)\,\bar{R} = \frac{\chi - \varphi}{\chi} \cdot \frac{p}{p+q} R\,, \qquad (AM =)\,\bar{r} = \frac{\varphi}{\chi} \cdot \frac{p}{p+q} R\,,$$

während $h = AP = OB$ ist. Bestimmt man zu P den in bezug auf L, N harmonisch gelegenen Punkt P', der das Teilverhältnis $-p/q$ hat, so hat man in den Ausdrücken für $\bar{R}$, $\bar{r}$ und h nur q das negative Zeichen zu geben. Dies kann man so auffassen, daß alle drei Größen mit $(p+q)/(p-q)$ multipliziert werden. *Daher beschreiben alle zu L, N harmonisch gelegenen Punkte P, P' ähnliche Trochoidalen.* Unter diesen sind auch zwei Zykloidalen, wenn $\bar{r} = \pm h$ ist. Dann ist das Teilverhältnis $p/q = \pm\chi/\varphi$. Da für den inneren Punkt Q (Fig. 114) $MA = AN = AQ$, so ist $QM \perp LN$, also LN selbst die Tangente. Das

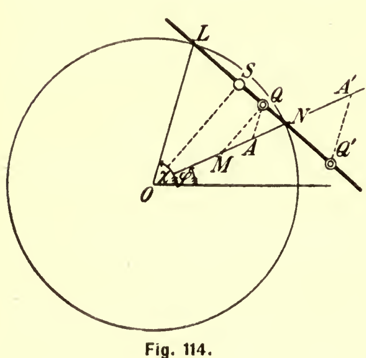


Fig. 114.

fanden wir früher (Nr. 148). Für den äußeren Punkt Q' wird $\bar{R} = R$, also N das Momentanzentrum, LN die Nor-

male. Q beschreibt also die Evolute der Zykloidale, die Q' beschreibt. Es ist demnach auch hieraus klar, daß diese beiden Zykloidalen gleichfalls ähnlich sind.

Wir fragen nun noch, welcher Punkt von LN eine Rosenkurve beschreibt. Offenbar derjenige, für den $OA = OQ$, das ist der Mittelpunkt S der Sehne LN $(p/q = 1)$. Nun ist aber $OS \perp LN$ und LN hüllt eine Zykloidale ein. Daher haben wir den Satz: *Die Fußpunktskurve einer Zykloidale ist eine sternförmige Trochoidale von demselben Modul.* Der Modul $\overline{R/r}$ ist nämlich für alle Teilverhältnisse gleich $(\chi - \varphi)/\varphi$. Daher ist die in Nr. 172 erwähnte Sextik mit der Polargleichung $\varrho = m \sin \frac{1}{2} \theta$ als Rosenkurve vom Modul 2, die Fußpunktskurve der Epizykloide desselben Moduls, d. i. der Nephroide in bezug auf den Mittelpunkt. Und die andere Rosenkurve $\varrho = m \sin \frac{1}{3} \theta$ mit dem Modul 1 ist die Fußpunktskurve der Kardioide in bezug auf den außerordentlichen Brennpunkt, den Mittelpunkt des Grundkreises. Für $\chi/\varphi < 0$ brauchen wir die Überlegungen nicht zu wiederholen. Es ist jetzt ohne weiteres verständlich, daß die Rosenkurven mit den Moduln -3 und -4, d. i. das regelmäßige Drei- und Vierblatt, Fußpunktskurven der Hypozykloiden desselben Moduls, nämlich der Steinerschen Kurve und der regulären Astroide sein müssen.

Zusatz. Die Inversen der Rosenkurven in bezug auf einen Kreis um den Mittelpunkt sind die Ährenkurven (Nr. 84). Da nun die Fußpunktskurven die Inversen der Polarreziproken sind, *so sind die Polarreziproken der Zykloidalen in bezug auf einen Kreis um den Mittelpunkt Ährenkurven.* Insbesondere ist polarreziprok zur regulären Astroide die gleichseitige Kreuzkurve, zur Steinerschen Kurve die Trisektrix von de Longchamps, zur Kardioide die Trisektrix des Maclaurin und zur Nephroide eine Quartik von der Polargleichung $\varrho \sin \frac{1}{2} \theta = m$, die Inverse der in Fig. 112 gezeichneten Rosenkurve.

174. Diese Betrachtungen lassen sich leicht auf den Fall erweitern, daß L und N auf zwei konzentrischen Kreisen von den Radien r und R mit den Winkelgeschwindigkeiten χ und φ laufen. Die beiden Gelenkstäbe sind dann hier

$$OA = \frac{p}{p+q} R, \qquad OB = \frac{q}{p+q} r,$$

während die Radien R und $\bar{r}$ dieselben Werte wie vorhin haben (vgl. Fig. 115). Auch hier gilt offenbar der Satz, daß harmonisch zu L, N liegende Punkte P, P' ähnliche Trochoidalen beschreiben. Sind P und P' die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle LON$ und seinem Nebenwinkel mit der Geraden LN, so ergeben sich ähnliche Rosenkurven. Im vorigen Falle war P' ins Unendliche gerückt. Auch zwei ähnliche Zykloidalen sind wieder darunter. Da $\bar{r} = \pm OB$ werden muß, damit eine Zykloidale entstehe, ist das Teilverhältnis $p/q = \pm\chi/\varphi : R/r$, also gleich dem Doppelverhältnis der Winkelgeschwindigkeiten und der Kreisradien.

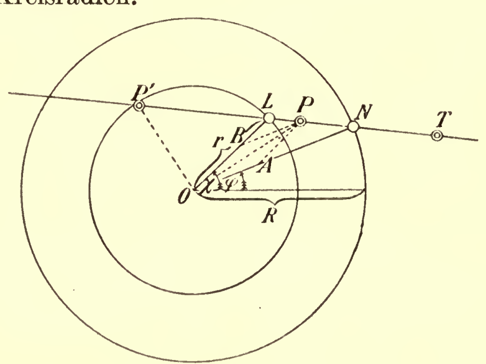


Fig. 115.

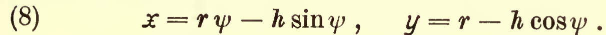
Es gibt auf LN keinen Punkt dessen Normale immer senkrecht zu LN stünde. Der Grund ist eben der, daß LN gar keine Trochoidale einhüllt. Wohl aber existiert ein Punkt T auf LN, dessen Normale immer mit LN identisch ist. Für diesen Punkt T muß $\bar{R} = R$ sein. Hieraus ergibt sich $p/q = -\chi/\varphi$. *Also hüllt LN die Evolute einer Trochoidale ein.* Diese Trochoidale wird von dem Punkte T beschrieben, der LN außen im Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten teilt.

Beisp. 1. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten sei -1, d. h. die Punkte L, N laufen mit entgegengesetzt gleichen Winkelgeschwindigkeiten auf zwei sonst beliebigen konzentrischen Kreisen. Der Modul aller durch Punkte der Geraden L, N erzeugten Trochoidalen ist -2. Die Trochoidalen sind also lauter Ellipsen. Für die Punkte P, P', die Zykloidalen beschreiben, muß $p/q = \pm r/R$

sein. Daher werden diese durch die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle LON$ und seinem Nebenwinkel ausgeschnitten. Dieselben Punkte beschreiben aber auch die Rosenkurven des Systems. Es sind dies die Geraden OP und OP' selbst, die ja fest sind, da OP die Anfangslage darstellt. Der Punkt T ist der Mittelpunkt von LN. *LN hüllt also die Evolute einer Ellipse ein,* die von T beschrieben wird.

Beisp. 2. Läuft L 12 mal so rasch in derselben Richtung wie N, so hüllt LN die Evolute einer bestimmten Epitrochoide vom Modul 11 ein. Das ist z. B. der Fall, wenn man sich die Endpunkte der Zeiger einer gewöhnlichen Taschenuhr immer durch einen gespannten Faden verbunden denkt (vgl. Nr. 148, Beisp. 1).

175. Wie im Falle der Zykloidalen nehmen wir nun zunächst $R = \infty$, d. h. wir lassen einen Kreis vom Radius r auf einer Geraden rollen. Setzen wir in den Gleichungen (2) $\omega = r\psi/R$, ferner $x - R \doteq y$, $y = x$ und gehen zur Grenze über, so erhalten wir für die »Trochoiden« die folgende Darstellung



(8) $$x = r\psi - h\sin\psi\,, \qquad y = r - h\cos\psi\,.$$

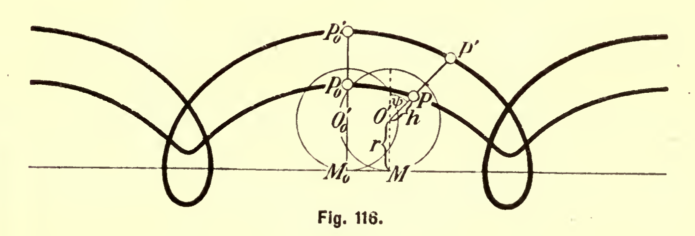


Fig. 116.

Diese Formeln lassen sich aus Fig. 116 direkt entnehmen. Man muß nur h das negative Zeichen erteilen, weil dort, der Übersichtlichkeit wegen, eine andere Anfangslage genommen wurde, als der Festsetzung in Nr. 164 entspricht. Da es hier nur eine Erzeugungsweise gibt, haben wir für $h > r$ verschlungene, für $h < r$ gestreckte, für $h = r$ gespitzte Trochoiden (Zykloiden). Weil $\mathfrak{Q} = r$ $(w = \frac{1}{2}r)$ wird, müssen alle gestreckten Trochoiden Wendepunkte haben. Die verschlungenen Trochoiden bilden Schleifen, die sich, wenn h im Verhältnis zu r groß genug ist, auch überschneiden können, so daß sekundäre Doppelpunkte auftreten.

Die Trochoiden stehen zu einer sehr einfach definierten Raumkurve, der gewöhnlichen Schraubenlinie, in einer merk-

würdigen Beziehung. Die Schraubenlinie sei durch die Gleichungen gegeben

$$(9) \qquad x = a\cos\varphi\,, \quad y = a\sin\varphi\,, \quad z = a\varphi\operatorname{tg}\alpha\,,$$

wo α den Neigungswinkel ihrer Tangenten gegen die (x, y)-Ebene bedeutet. Wir projizieren die Schraubenlinie von irgend einem Punkte aus. Wegen der Symmetrie können wir, ohne der Allgemeinheit zu schaden, diesen Punkt in der (x, z)-Ebene annehmen, indem wir ihm die Koordinaten m, 0, n zuteilen. Dann entsprechen der durch den Punkt und die Schraubenlinie bestimmten Kegelfläche die Gleichungen:

$$(10) \qquad \frac{x - m}{a\cos\varphi - m} = \frac{y}{a\sin\varphi} = \frac{z - n}{a\varphi\operatorname{tg}\alpha - n}\,.$$

Schneidet man diesen Kegel mit der (x, y)-Ebene $z = 0$, so ergibt sich die Schnittkurve, dargestellt durch die Gleichungen

$$(11) \quad x = \frac{a(n\cos\varphi - m\varphi\operatorname{tg}\alpha)}{n - a\varphi\operatorname{tg}\alpha}\,, \qquad y = \frac{an\sin\varphi}{n - a\varphi\operatorname{tg}\alpha}\,.$$

Nimmt man nun das Projektionszentrum unendlich fern, so daß m und n unendlich groß werden, während $\lim n/m$ endlich bleibt und gleich $\operatorname{tg}\beta$ ist, wo β den Neigungswinkel der Projektionsstrahlen gegen die (x, y)-Ebene bedeutet, so werden die Gleichungen (11) zu

$$(12) \qquad x = a(\cos\varphi - \varphi\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)\,, \quad y = a\sin\varphi\,,$$

die sich offenbar leicht mit den Gleichungen (8) identifizieren lassen ($r = a\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$, $h = a$). Damit dann die Trochoide verschlungen (gespitzt, gestreckt) sei, muß $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta < 1$ $(=1, >1)$ sein, d. h. es ist $\operatorname{tg}\beta > (=, <)\operatorname{tg}\alpha$ oder $\beta > (=, <)\,\alpha$. Wenn also der Neigungswinkel der projizierenden Strahlen gleich dem der Tangenten der Schraubenlinie ist, wird die Projektion eine Zykloide; ist er größer, wird sie eine verschlungene und bei kleinerem Neigungswinkel der projizierenden Strahlen eine gestreckte Trochoide.

Diese Tatsache läßt sich geometrisch leicht verstehen, wenn man sich die Schraubenlinie durch gleichförmige Bewegung eines Punktes auf einem Kreise erzeugt denkt,

dessen Mittelpunkt auf der z-Achse gleichförmig fortschreitet, während seine Ebene zu dieser Achse immer senkrecht bleibt. Da die verschiedenen Lagen dieses Kreises sich als Kreis projizieren, dessen Mittelpunkt längs einer Geraden gleichmäßig fortschreitet, während der Punkt auf ihm gleichförmig läuft, ist die Erzeugung einer Trochoide in der Epizykelform gegeben.

176. Anstatt R können wir auch r unendlich werden lassen. Wir werden dann die »allgemeinen Kreisevolventen« erhalten. Um ihre Gleichungen aus (2) durch Grenzübergang herzuleiten, müssen wir aber den Abstand des erzeugenden Punktes von der abrollenden Ge-

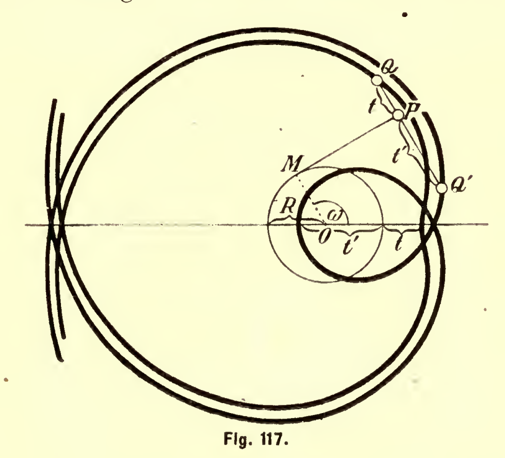


Fig. 117.

raden $t = r - h$ einführen (vgl. Fig. 117), da h mit r unendlich wird, also in (2) $h = r - t$ setzen. Wenn man dann bedenkt, daß

$$\lim_{r=\infty}\left(\cos\omega - \cos\frac{R+r}{r}\omega\right) = \frac{R}{r}\omega\sin\omega$$

und

$$\lim_{r=\infty}\left(\sin\omega - \sin\frac{R+r}{r}\omega\right) = -\frac{R}{r}\omega\cos\omega$$

ist, findet man die Darstellung

$$(13)\qquad \begin{cases} x = (R+t)\cos\omega + R\,\omega\sin\omega\,, \\ y = (R+t)\sin\omega - R\,\omega\cos\omega\,, \end{cases}$$

die für $t = 0$ wirklich in die der gewöhnlichen (gespitzten) Kreisevolvente übergeht (Nr. 124, Beisp.). Auch hier gibt es natürlich nur eine Erzeugung. Wir haben für positives t gestreckte, für negatives t verschlungene Kreisevolventen. In Fig. 117 beschreibt $Q(t)$ die eine, $Q'(t')$ die andere, P die gewöhnliche Kreisevolvente. Da $\mathfrak{Q} = R$ $(w = \frac{1}{2} R)$ und der Wendekreis außerhalb des Grundkreises liegt, haben die gestreckten Kreisevolventen nur für $t < R$ zwei Wendepunkte; für $t = R$ tritt ein Flachpunkt auf und bei noch größerem t bleibt die Kurve in ihrem ganzen Verlaufe konkav gegen den Mittelpunkt des Grundkreises.

177. Unter den verschlungenen Kreisevolventen ist eine, die den Rosenkurven bei den eigentlichen Trocho-

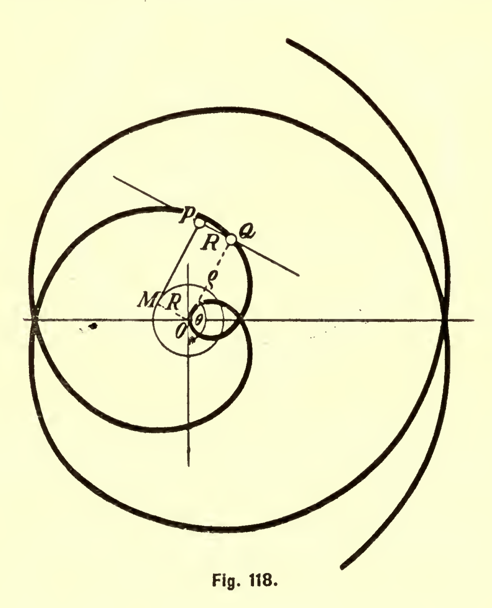


Fig. 118.

idalen entspricht, also durch den Mittelpunkt des Grundkreises geht. Offenbar ist dann $t = -R$. Die Gleichungen dieser Kurve sind hiernach

$$x = R\,\omega \sin\omega\,, \quad y = -R\,\omega \cos\omega\,. \tag{14}$$

Setzt man $x = y$, $y = -x$, so ist $y/x = \operatorname{tg}\omega$, ω also gleich dem Polarwinkel θ, und da außerdem $x^2 + y^2 = R^2\omega^2$, so ist die Polargleichung dieser Kurve

$$\varrho = R\theta. \tag{15}$$

Dies ist eine der ältesten bekannten Kurven. Schon ARCHIMEDES beschäftigte sich mit ihr und sie heißt deshalb die »Archimedische Spirale« (Fig. 118). Man erhält gemäß der Polargleichung (15) dieselbe Kurve, wenn man eine Gerade sich gleichförmig um einen Punkt drehen läßt, während der erzeugende Punkt auf dieser Geraden gleichförmig fortschreitet. Der auf dem Radiusvektor gemessene Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Windungen der Spirale ist daher überall der nämliche. In der Tat ist $\varrho_{\theta + 2n\pi} - \varrho_{\theta + 2(n-1)\pi} = 2R\pi$.

Zusatz. Mittels der archimedischen Spirale muß die Aufgabe gelöst werden, den Durchmesser einer Papierrolle zu berechnen, wenn die Papierdicke e und die Länge des Streifens l ist. Die Spirale mit der Windungsweite e hat die Gleichung $\varrho = e\theta/2\pi$. Nun müßte man das Bogenintegral berechnen, das durch elementare Funktionen zwar ausdrückbar ist, aber nicht gestattet, θ als Funktion von l darzustellen. Da aber $ds = \varrho\, d\theta \sqrt{1 + (\varrho'/\varrho)^2} = \varrho\, d\theta \sqrt{1 + (e/2\varrho\pi)^2}$, so kann man den in der Wurzel stehenden Bruch bei kleinem e vernachlässigen und $ds = \varrho\, d\theta$, wie wenn die Kurve ein Kreis wäre, setzen. Hiernach ist dann $l = \varrho^2\pi/e$ und $2\varrho = 2\sqrt{el/\pi}$ die Rollendicke. Man beachte, daß man zu demselben angenäherten Resultat gelangt, wenn man das Rechteck el der Papierkante gleich der Fläche $\varrho^2\pi$ des Rollenquerschnittes setzt. Vgl. Int. math. **9**, 1902, 249/52.

178. Wie wir schon andeuteten, kann man sich die Entstehung einer gewöhnlichen Kreisevolvente sehr gut vorstellen, wenn man r im Verhältnis zu R allmählich anwachsen läßt, am besten in ganzzahligem Verhältnis. Die betreffende Epizykloide hat dann nur eine Spitze und immer eine Windung mehr, wenn die ganze Zahl r/R um Eins größer wird. Die zugehörige Rosenkurve vom selben Modul, die Fußpunktskurve der Epizykloide in bezug auf den Mittelpunkt des Grundkreises hat dann nur ein Blatt, das durch diesen Mittelpunkt geht, aber ebenso viele Windungen wie die Epizykloide. So gelangt man zu der Erkenntnis, daß *die Archimedische Spirale die Fußpunktskurve der gewöhnlichen Kreisevolvente in bezug auf den*

Mittelpunkt des Grundkreises ist. Freilich ist der Beweis, der für den Fall der eigentlichen Trochoiden in Nr. 173 gegeben wurde, nicht stichhaltig, da die Winkelgeschwindigkeit χ dort unendlich groß werden müßte. Aber man sieht die Richtigkeit des Satzes direkt aus Fig. 118, wo der Fußpunkt Q des Lotes von O auf die Tangente der von P beschriebenen Kreisevolvente immer die Entfernung $PQ = R$ von der abrollenden Kreistangente MP hat.

Wie alle gewöhnlichen Kreisevolventen, sind natürlich alle Archimedischen Spiralen ähnliche Kurven. Die Konstruktion der Normale (MQ) ist ja bei der trochoidalen Erzeugung selbstverständlich. Davon unabhängig findet man, daß die Polarsubnormale $OM = d\varrho/d\theta = R$ ist. Über die Konstruktion des Krümmungsradius aller Kreisevolventen gilt (wie für die Trochoiden) die in Nr. 172, Zus. gegebene Bemerkung. Speziell für den Scheitel erhält man hier $\mathcal{R} = \varrho^2(\varrho - R)$. Da bei der archimedischen Spirale $\varrho = -R$ ist, hat diese im Scheitel ihrer Schleife $\mathcal{R} = -\frac{1}{2}R$.

Es ist noch anzumerken, daß die Konchoide der Archimedischen Spirale mit dem Scheitel als Pol mit dieser selbst identisch ist. Denn die Kurvengleichung

$$\varrho = R\,\theta + l \tag{16}$$

geht durch die Substitution $\theta = \theta' - l/R$ in die Gleichung $\varrho = R\,\theta'$ über. Diese Substitution zeigt aber nur eine Drehung der Polarachse an.

179. Sowohl die gewöhnliche Kreisevolvente, wie auch die Archimedische Spirale lassen sich aus der schon für die Trochoiden verwendeten Schraubenlinie herleiten. *Die gespitzte Kreisevolvente stellt den Ort der Spuren aller Tangenten der Schraubenlinie mit der (x, y)-Ebene dar oder mit anderen Worten: den Schnitt der durch die Schraubenlinie definierten abwickelbaren Schraubenfläche mit dieser Ebene.* Eine solche Tangente ist durch folgende Gleichungen dargestellt

$$\frac{x - a\cos\varphi}{-\sin\varphi} = \frac{y - a\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{z - a\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}. \tag{17}$$

Setzen wir hier $z = 0$, so erhalten wir in der Tat

$$x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi), \quad y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi), \tag{18}$$

welche Gleichungen mit den auf S. 176 (15a*) gegebenen identisch sind. Dies wird auch geometrisch klar, wenn man das Fortschreiten der Tangente an der Schraubenlinie als ein Abwickeln betrachtet, das sich in der orthogonalen Projektion auf die (x, y)-Ebene, wegen der überall gleichen Neigung der Schraubenlinie, als das Abwickeln der Kreistangente vom Grundkreis darstellt.

Für die Archimedische Spirale hat schon Pappus angegeben, daß *sie eine Orthogonalprojektion der aus einer gewöhnlichen Schraubenfläche durch einen Rotationskegel mit derselben Achse ausgeschnittenen Raumkurve auf eine zur Achse senkrechte Ebene ist.* Die gewöhnliche Schraubenfläche entsteht aus der Schraubenlinie, wenn man ihr entlang eine Gerade gleiten läßt, die immer senkrecht zur Achse bleibt. Ihre Gleichung geht also aus den Gleichungen (9) der Schraubenlinie hervor, wenn man

$$x = a\cos\varphi\,, \quad y = a\sin\varphi\,, \quad z = c\,\varphi$$

setzt und nun a und φ eliminiert. Man erhält sie in der Form

(19) $$z = c \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,.$$

Nehmen wir die Spitze des Rotationskegels im Anfangspunkt an, so können wir seine Gleichung schreiben

(20) $$z = \varkappa\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Die Elimination von z aus (19) und (20) ergibt, wenn man Polarkoordinaten einführt,

(21) $$\varkappa\,\varrho = c\,\theta\,,$$

also in der Tat eine Archimedische Spirale. Man kann nun nach der ebenen Kurve fragen, die aus der auf dem Kegel (20) verzeichneten Raumkurve hervorgeht, wenn man diesen in eine Ebene ausbreitet. Nennen wir $\acute{\varrho}$ die Entfernung eines Kurvenpunktes von der Kegelspitze, ε den halben Öffnungswinkel des Kegels ($\operatorname{ctg}\varepsilon = \varkappa$), so ist zunächst immer $\acute{\varrho}\sin\varepsilon = \varrho$. Ferner besteht zwischen dem abgewickelten Winkel ω und seiner Projektion θ die bekannte Beziehung $\omega = \theta\sin\varepsilon$ (da $\varrho\,\theta = \acute{\varrho}\omega$). Setzen wir diese Werte in (21), so ergibt sich

(22) $$\acute{\varrho} = \frac{c}{\varkappa\sin^2\varepsilon}\,\omega = c\,\frac{1+\varkappa^2}{\varkappa}\,\omega$$

als Polargleichung der abgewickelten Kurve. *Das ist also wieder eine Archimedische Spirale*[134]).

Zusatz. Wir wollen diese Gelegenheit benutzen, um einen ähnlichen Satz für die logarithmische Spirale anzuführen, den der Leser selbst beweisen mag. Bestimmt man auf einem Rotationskegel diejenige Kurve, die alle Erzeugenden unter demselben Winkel schneidet, so ist ihre Projektion auf eine zur Kegelachse senkrechte Ebene eine logarithmische Spirale und die Abwicklung des Kegels gibt wieder eine logarithmische Spirale. Raumkurven, die alle Meridiane einer Rotationsfläche unter demselben Winkel schneiden, heißen überhaupt »Loxodromen«. Die älteste dieser Art Kurven ist, wegen ihres nautischen Interesses, die Kugelloxodrome. Projiziert man die Kugel von einem der Pole auf die Äquatorebene, so gehen die Meridiane in ein Geradenbüschel, die Loxodromen aber in logarithmische Spiralen über, da die (stereographische) Projektion konform ist, also alle Winkel erhalten bleiben.

180. Die Projektionen der Schraubenlinie ergeben noch einige interessante ebene Kurven. Zunächst sei das Projektionszentrum wieder unendlich fern, die Neigung der Strahlen gegen die (x, y)-Ebene β, aber wir nehmen als Projektionsebene nicht diese selbst, sondern eine durch die y-Achse gehende, gegen die (x, y)-Ebene unter dem Winkel γ geneigte Ebene. Dann bleiben die y in den Gleichungen (12) erhalten, während die x mit dem Faktor $\sin\beta/\sin(\beta+\gamma)$ multipliziert, werden. Die entstehenden Kurven sind zu den Trochoiden affin. Ihre Gleichungen lauten

$$(23)\quad x = a(\cos\varphi - \varphi \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta)\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}, \qquad y = a\sin\varphi .$$

Von besonderem Interesse ist hier der Fall $\beta = 0$, wo die projizierenden Strahlen zur (x, y)-Ebene parallel laufen. Auf dieser selbst ist die Projektion eine gestreckte Trochoide mit unendlicher Ganglänge $(r = \infty,\ h = a)$. Die Affine dazu auf der geneigten Ebene hat die Gleichungen

$$(24)\qquad x = -a\varphi \operatorname{tg}\alpha/\sin\gamma = c\varphi, \quad y = a\sin\varphi,$$

woraus durch Elimination von φ die Gleichung entsteht

$$(24^*)\qquad y = a\sin\frac{x}{c}.$$

---

[134]) Vom Verf. bemerkt im Arch. Math. Phys. **11**, 1907, 131. Lösungen ebd. **12**, 1907, 193/5.

Das ist demnach eine »Sinuslinie«. Insbesondere ist natürlich die Orthogonalprojektion der Schraubenlinie auf eine zur (y, z)-Ebene parallele Ebene, oder auf diese selbst, $(\gamma = \frac{1}{2}\pi)$ eine Sinuslinie. Die Kurve (24*) geht in die gewöhnliche, die Sinusfunktion darstellende Linie über, wenn man a als Einheit betrachtet und zugleich $\sin\gamma = \operatorname{tg}\alpha$ ist. Das läßt sich durch unsere Projektion nur erreichen, solange $\alpha \leqq \frac{1}{4}\pi$ ist.

Wir verzichten auf eine weitere Untersuchung der Sinuslinie, deren Gestalt ja ohnehin bekannt ist und behandeln auch die übrigen »trigonometrischen Kurven« $y = a\cos(x/c)$, $y = a\operatorname{tg}(x/c)$, $y = a\operatorname{ctg}(x/c)$ nicht weiter, da sie außer ihrem Verlauf wenig geometrisches Interesse bieten.

Bem. Eine bestimmte Sinuslinie, nämlich die mit der Gleichung $y = a\sin(\pi x/2a)$ stellte Tschirnhausen[135]) als Quadratrix des Kreises auf. Eine geometrische Erzeugung der Sinuslinien erhält man, wenn man bei der Erzeugung einer Trochoide den beschreibenden Punkt immer auf den zur Fortbewegungsrichtung des Kreises senkrechten Durchmesser projiziert. Es ist ferner ein sehr bekannter Satz der darstellenden Geometrie, daß die Sinuslinie als Abwicklung eines ebenen Schnittes eines Kreiszylinders auftritt.

181. Wir wollen nun das Projektionszentrum auf der Achse der Schraubenlinie annehmen und diese auf die (x, y)-Ebene oder eine zu ihr parallele Ebene projizieren. Das Resultat wird am einfachsten, wenn wir das Projektionszentrum im Anfangspunkt nehmen und eine Parallelebene zur Projektionsebene wählen. Dann lauten die Gleichungen eines projizierenden Strahles

$$x/a\cos\varphi = y/a\sin\varphi = z/a\,\varphi\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Setzen wir hier $z = \zeta$, so ist die gesuchte Projektion dargestellt durch die Gleichungen

$$(25)\qquad x = \frac{\zeta\cos\varphi}{\varphi\operatorname{tg}\alpha}\,,\quad y = \frac{\zeta\sin\varphi}{\varphi\operatorname{tg}\alpha}\,.$$

Da $y/x = \operatorname{tg}\varphi$, kann man φ als Polarwinkel θ betrachten. Durch Quadrieren und Addieren ergibt sich dann die Polargleichung der Kurve

$$(25^*)\qquad \varrho\,\theta = \zeta\operatorname{ctg}\alpha = c\,.$$

135) *Medicina mentis,* Amsterdam 1686.

Diese Kurve heißt, in Anbetracht der Gleichungsform, »hyperbolische Spirale«[136]). Wir bemerken sofort, daß diese Spirale zur Archimedischen Spirale in bezug auf deren Scheitel invers ist. Nach einem schon öfters benutzten Satze (Nr. 5) ist sie also die Polarreziproke zu einer gewöhnlichen Kreisevolvente in bezug auf einen zum Grundkreis konzentrischen Kreis. Ihre interessante Gestalt ist aus der Polargleichung (25*) leicht zu entnehmen. Die Kurve kommt aus dem Unendlichen für $\theta = 0$ und windet sich dann, indem ϱ immer kleiner wird, je mehr θ wächst, um den Pol als asymptotischen Punkt.

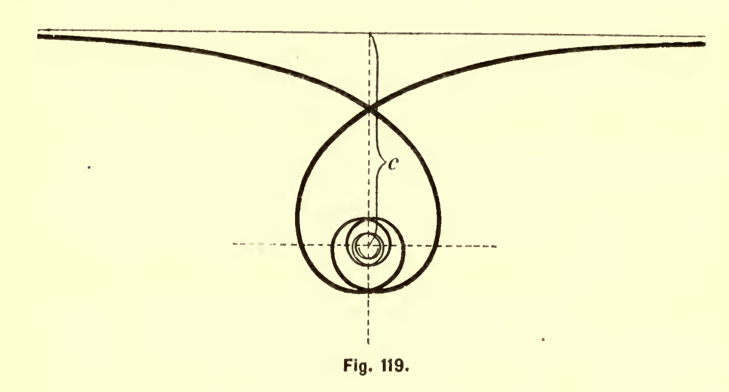


Fig. 119.

Dabei ist zu beachten, daß sie für negative θ einen dem ersten kongruenten Zweig hat; beide Zweige liegen in bezug auf die zur Polarachse senkrechte Gerade symmetrisch (Fig. 119). Auf dieser Geraden überschneiden sich also die Zweige unendlich oft. Da die Polarsubtangente $\varrho^2/\varrho' = -c$ ist, hat man eine einfache Konstruktion der Normale. Außerdem ist aus diesem konstanten Werte ersichtlich, daß die zur Polarachse im Abstand c gezogene Parallele Asymptote der Kurve und zwar beider Zweige ist. Da außerdem die Kurve diese Asymptote nicht überschreiten kann, ist der unendlich ferne Punkt, wo die beiden Zweige zusammenhängen, ein Wendepunkt.

---

136) Zuerst von Varignon (1704), dann von Joh. Bernoulli (1710) aufgestellt. Der Name ist von letzterem.

182. Dies wird sofort noch deutlicher, wenn wir die Konchoide der hyperbolischen Spirale in bezug auf den Pol bilden[137]). Ihre Polargleichung ist

$$\varrho = \frac{c}{\theta} + l\,. \tag{26}$$

Auch bei ihr ist für $\theta = 0$ $\varrho = \infty$ und da $\varrho^2/\varrho' = -(c + l\theta)^2/c$ für $\theta = 0$ ebenfalls gleich $-c$ wird, wie vorhin, hat die Kurve dieselbe Asymptote wie die hyperbolische Spirale.

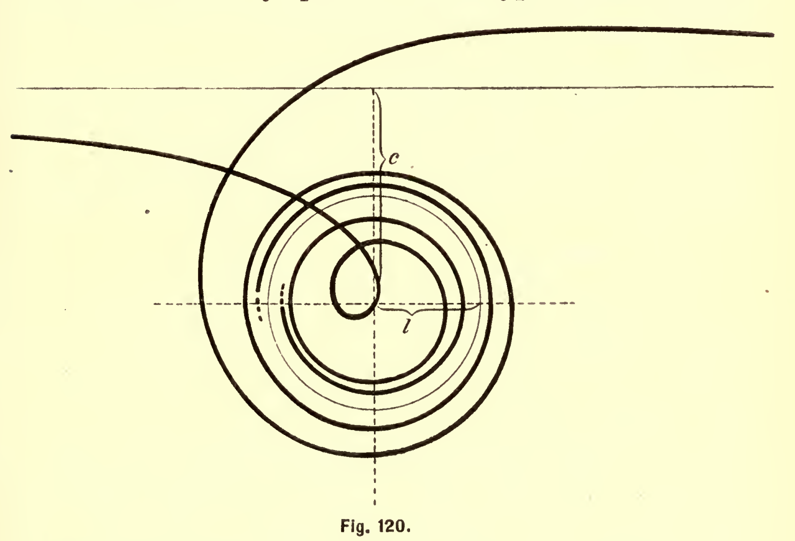


Fig. 120.

Aber die Kurve beginnt offenbar, wegen des additiven l, jenseits dieser Asymptote. Für einen Wendepunkt muß $\theta(l\,\theta + c)^2 - 2\,c\,l = 0$ sein. Die linke Seite dieser Gleichung ist für $\theta = 0$ zunächst negativ, wächst dann mit wachsendem θ beständig, so daß nur einmal der Wert Null auftreten kann; für negative θ ist sie immer negativ. Es gibt demnach einen reellen Wendepunkt, und zwar zwischen $\theta = 0$ und $\theta = 1$ (oder 57^0 ca.). Von da wird die Konchoide konkav gegen den Pol, umkreist diesen unendlich oft, nachdem sie die Asymptote überschritten, um

---

[137]) Erwähnt bei Schlömilch-Naetzsch, Übungsbuch zur höheren Analysis. I. Teil, 5. Aufl. Leipzig 1904, S. 153.

sich dem Kreis vom Radius l asymptotisch von außen zu nähern (vgl. Fig. 120). Von demselben Kreis löst sich die Kurve innen, wenn θ im Unendlichen das Vorzeichen wechselt, wieder asymptotisch ab, nähert sich dem Mittelpunkt des Kreises immer mehr, passiert diesen für $\theta = -c/l$, um sich schließlich der asymptotischen Geraden von unten anzuschmiegen. Wenn wir nun l kleiner und kleiner werden lassen, sehen wir die hyperbolische Spirale aus dieser allgemeineren Kurve entstehen und den Wendepunkt ins Unendliche rücken.

Zusatz. Die direkte Deutung der Polargleichung der hyperbolischen Spirale ergibt folgende Eigenschaft, die auch als Erzeugung benutzt werden kann: *Betrachtet man die hyperbolische Spirale im Zusammenhalt mit dem System konzentrischer Kreise um den Pol, so ist auf jedem Kreise die Länge des Bogens von der Polarachse an bis zum Schnittpunkt des Kreises mit der Spirale konstant* $(= c)$.

183. Vertauschen wir in dem Tripel

Kreisevolvente | Archimedische Sp. | Hyperb. Sp.,

wo die mittlere Kurve zur ersten Fußpunktskurve, zur letzten Inverse ist, während die erste zur letzten polarreziprok ist, die erste mit der letzten, so muß sich eine neue mittlere Kurve C bestimmen lassen, so daß C Inverse der Kreisevolvente und Fußpunktskurve der hyperbolischen Spirale wird. Wir wollen C als Inverse der gewöhnlichen Kreisevolvente aufstellen. Statt aber die Polargleichung der letzteren zu benutzen, schlagen wir einen direkten Weg ein. Es sei P ein Punkt der Kreisevolvente, also $MP = \operatorname{arc} MS = R\omega$, so ist der zu P in bezug auf den Grundkreis der Evolvente inverse Punkt Q der Fußpunkt des von M auf OP gefällten Lotes (vgl. Fig. 121). Da nun $OQ = \varrho = R/\sqrt{1+\omega^2}$, $\sphericalangle QOS = \theta = \omega - \sphericalangle MOP = \omega - \operatorname{arc\,tg} \omega$ ist, so hat die gesuchte Kurve die Polargleichung

$$(27) \qquad \theta = \frac{1}{\varrho}\sqrt{R^2 - \varrho^2} - \operatorname{arc\,cos} \frac{\varrho}{R}.$$

Die hervorragendste Eigenschaft dieser Kurve, wenn man sie für sich betrachtet, ist nun die, daß ihre Polartangente $\mathfrak{T} = \varrho\sqrt{(\varrho/\varrho')^2 + 1}$ konstant ist. Damit ist zugleich die

Konstruktion der Tangente für jeden Punkt gegeben. Da $d\theta/d\varrho = 1/\varrho' = -\sqrt{R^2 - \varrho^2}/\varrho^2$, erhält man $\mathfrak{T} = R$ als die fragliche Konstante. Aus diesem Grunde nannte ihr erster Entdecker COTES[138]) die Kurve »Traktrix complicata«, in Anlehnung an eine Eigenschaft der gewöhnlichen Traktrix, deren Tangente bei rechtwinkligen Koordinaten konstant ist (Nr. 208).

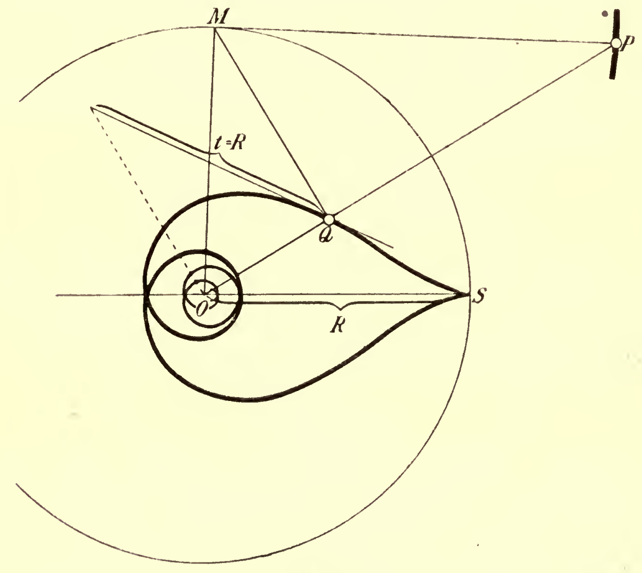


Fig. 121.

Was die Gestalt der Traktrix complicata betrifft, so ist sie offenbar gegen die Polarachse OS symmetrisch. Sie beginnt bei S mit $\varrho = R$, $\theta = 0$, wo wegen $\operatorname{tg}\mu = \varrho/\varrho' = 0$ der Winkel $\mu = 0$, also wegen der Symmetrie eine Spitze sein muß. Da die Bedingung für die Wendepunkte $R^2 - 2\varrho^2 = 0$ wird, entstehen solche für $\varrho = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$, $\theta = \pm(1 - \frac{1}{4}\pi)$ $[\omega = \pm 1]$. Von da ab bleibt die Kurve konkav gegen den Pol, dem sie sich asymptotisch von beiden Seiten nähert.

[138]) *Harmonia mensurarum*, 1722.

184. Wenn man endlich, um die Schraubenlinie zu projizieren, das Projektionszentrum auf dem Mantel des sie enthaltenden Zylinders nimmt, so entsteht eine neue, eigenartige Kurve, die verschiedene merkwürdige Eigenschaften hat. Wir nehmen am besten den Punkt $(a, 0, 0)$ als Projektionszentrum, wo die Schraubenlinie die (x, y)-Ebene durchdringt und projizieren sie auf die Ebene $z = \zeta$. Die Gleichungen des projizierenden Strahles sind dann

$$\frac{x-a}{a(\cos\varphi - 1)} = \frac{y}{a\sin\varphi} = \frac{z}{a\,\varphi\,\operatorname{tg}\alpha}.$$

Setzen wir $x - a = \bar{x}$, so hat man hieraus als Gleichungen der Projektion in der Ebene $z = \zeta$

(28) $$\bar{x} = \frac{\zeta(\cos\varphi - 1)}{\varphi\operatorname{tg}\alpha}, \quad y = \frac{\zeta\sin\varphi}{\varphi\operatorname{tg}\alpha}.$$

Da $y/\bar{x} = \sin\varphi/(\cos\varphi - 1) = -\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\varphi$, so ist $-\bar{x}/y = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$; also können wir $\frac{1}{2}\varphi$ gleich dem Polarwinkel θ setzen. Außerdem ist $\bar{x}^2 + y^2 = 4\zeta^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi/\varphi^2\operatorname{tg}^2\alpha$, woraus, wenn man $\zeta = b\operatorname{tg}\alpha$ nimmt, wo b eine beliebige Konstante ist, die Polargleichung der gesuchten Kurve

(28*) $$\varrho = b\,\frac{\sin\theta}{\theta}$$

hervorgeht. Dieselbe Kurve, die wegen ihrer Form »Kochleoide« (ὁ *κοχλίας*, die Schnecke) genannt wird, läßt sich aus der hyperbolischen Spirale durch ein sehr einfaches Verfahren ableiten. Es sei $P(\varrho, \theta)$ ein Punkt der hyperbolischen Spirale, so mache man $PQ = OP = \varrho$ und parallel der Polarachse in der Richtung, wie für die hyperbolische Spirale θ gezählt wird, so ist Q ein Punkt einer Kochleoide (s. Fig. 122). Heißen wir $\tilde{\varrho}$ und $\tilde{\omega}$ die Polarkoordinaten von Q, so ist in der Tat $\tilde{\varrho} = 2\varrho\sin\frac{1}{2}\theta$, $\tilde{\omega} = \frac{1}{2}(\pi + \theta)$, also $\tilde{\varrho} = 2b\sin\frac{1}{2}\theta/\theta$, wenn $\varrho = b/\theta$, was für $\acute{\omega} = \tilde{\omega} - \frac{1}{2}\pi$ in $\tilde{\varrho} = b\sin\acute{\omega}/\acute{\omega}$ übergeht. Da die angegebene Konstruktion das System konzentrischer Kreise um O in das Büschel aller sich in O mit der zur Polarachse Senkrechten als gemeinsamer Tangente berührenden Kreise verwandelt und die Längen der Kreisbogen dabei erhalten bleiben, so können wir gleich sagen, daß der *Ort der Endpunkte aller vom Berührungspunkte aus gemessenen*

gleich langen Kreisbogen eines solchen Büschels eine Kochleoide ist.

Die Form der Kochleoide können wir aus der Gleichung (28*) sehr leicht entnehmen. Für $\theta = 0$ (was jetzt mit $\mathring{\omega} = 0$ zu identifizieren ist) ist auf der Polarachse, die zur Asymptote A der hyperbolischen Spirale senkrecht ist, $OA = \varrho = b$. Das ist zugleich der Maximalwert von ϱ. Wir betrachten nun nur den Zweig für positive θ; ihm entspricht ein symmetrischer für negative θ. Der Radiusvektor wird zuerst für $\theta = \pi$ und dann für $\theta = \nu\pi$ gleich Null. Da $\operatorname{tg}\mu = \varrho/\varrho' = \theta \sin\theta/(\theta\cos\theta - \sin\theta)$ hierbei immer mit Ausnahme von $\nu = 0$ gleich Null wird, so be-

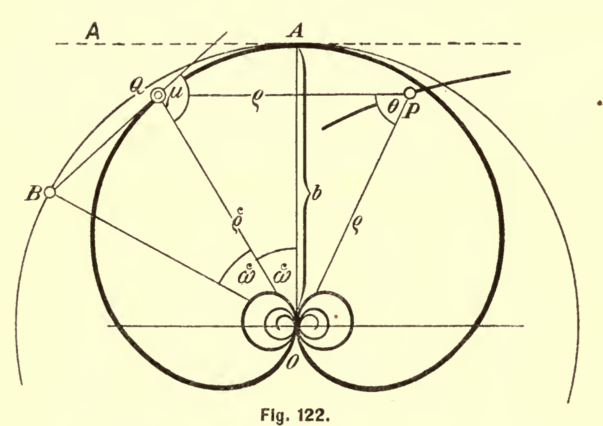


Fig. 122.

rühren sich alle Zweige in O mit der Polarachse als Tangente. Jede Windung liegt ferner innerhalb der vorhergehenden, da ϱ beständig abnimmt. Für $\theta = 0$ wird der Grenzwert von $\operatorname{tg}\mu$ unendlich groß, so daß dort die Kurve rechtwinklig ansetzt. Da erst für $\theta = \infty$ $\varrho = 0$ wird, ist O asymptotischer Punkt.

185. Ihre wichtigste geometrische Eigenschaft ist nun wohl die folgende. Bestimmt man zu allen von einem Punkte A einer Kurve ausgehenden Bogen AB die Schwerpunkte Q, so beschreibt Q, wenn B die Kurve durchläuft, die sogenannte »Schwerpunktslinie« der Grundkurve für den Punkt A. *Die Schwerpunktslinie des Kreises nun ist die Kochleoide.* In der Tat, sei $OA = b$

der Radius des Kreises, $\sphericalangle AOB = 2\theta$, so ist der Polarwinkel für Q gleich θ, während man für $OQ = \varrho$ die Gleichung hat

$$2b\,\theta \cdot \varrho = 2\int_0^\theta b\cos\varphi \cdot b\,d\varphi = 2b^2 \sin\theta\,,$$

woraus sofort $\varrho = b\sin\theta/\theta$ folgt. (In Fig. 122 ist der hier θ genannte Winkel mit $\acute{\omega}$ bezeichnet.) Nennen wir nun für einen Augenblick den Schnittpunkt der Kochleoidentangente in Q mit dem Kreis T und setzen den Winkel $TOQ = \vartheta$, so ist $\varrho = b\sin(\mu - \vartheta)/\sin\mu$. Aber andererseits ist nach dem oben gegebenen Wert von $\operatorname{tg}\mu$ der Ausdruck $b\sin(\mu - \theta)/\sin\mu$ gleich $b\sin\theta/\theta$, also auch gleich ϱ. Der Punkt T ist daher mit B, der Winkel ϑ mit θ identisch. Die Tangente der Kochleoide geht also immer durch den beweglichen Endpunkt des zugehörigen Kreisbogens[139]).

186. Die Inverse der Kochleoide in bezug auf einen Kreis um den asymptotischen Punkt, also die Kurve mit

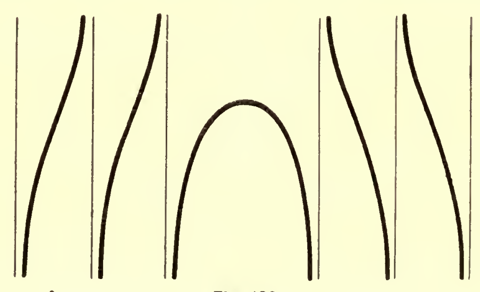


Fig. 123.

der Gleichung $\varrho = a\,\theta/\sin\theta$ ist von historischem Interesse. Sie heißt »Quadratrix des Dinostratus«, da sich dieser Geometer (4. Jahrh. v. Chr.) ihrer zur Quadratur des Kreises bediente, während sie noch etwas früher von

[139]) Dieser Satz gilt für alle Schwerpunktslinien. S. Cesàro-Kowalewski, S. 100. — Die Kochleoide wurde zuerst von J. Perks (anonym) als Quadratrix in Phil. Trans. 1700, Nr. 260 aufgestellt. Als Schwerpunktslinie betrachtete sie Fontana (1780). Der Name ist von C. Falkenburg, Archiv Math. Phys. **70**, 1883. Eine Bibliographie wurde von E. Wölffing in Boll. bibl. stor. **3**, 1900, gegeben.

Hippias aus Elis erfunden wurde zur Trisektion des Winkels. Wir geben nur ihre Figur (123) und ihre kartesische Gleichung $y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2r}$, die man erhält, wenn man in der Polargleichung $\theta = \frac{1}{2}\pi - \omega$ und $a = 2r/\pi$ setzt. Die Diskussion überlassen wir dem Leser. Außerdem erwähnen wir noch die stereometrische Erzeugung, die schon Pappus angab: *Schneidet man eine gewöhnliche Schraubenfläche mit einer durch eine Erzeugende gehenden Ebene und projiziert die Schnittlinie orthogonal auf eine zur Schraubenachse senkrechte Ebene, so ist die Projektion eine Quadratrix des Dinostratus.* Auch den einfachen Beweis dieses Satzes möge der Leser selbst führen.

Bem. Die Tangenteneigenschaften der Kochleoide und der hyperbolischen Spirale kann man folgendermaßen aussprechen: Die Tangenten der unendlich vielen Punkte, in denen eine durch den asymptotischen Punkt O gehende Gerade die Kurve schneidet, laufen alle durch einen Punkt, der, wenn die Gerade sich um O dreht, einen Kreis vom Zentrum O beschreibt.

187. Die hyperbolische Spirale, als Inverse der Archimedischen Spirale, gab zu einigen Weiterungen Anlaß durch die Kurven, die mit ihr in Zusammenhang gebracht werden können. Wir kehren nun zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück, in der Erzeugung von Trochoidalen den Radien R und r der Kreise, sowie dem Abstande h des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt des rollenden Kreises besondere Werte zu erteilen. Nachdem wir die unendlich großen Werte von R und r behandelt haben, erübrigt uns noch zu sehen, ob ähnlich wie bei den Pseudozykloidalen auch für komplexe Werte von R, r und h reelle Kurven entstehen können. Wir setzen demnach

$$R = R_1 + i R_2\,, \quad r = r_1 + i r_2\,, \quad h = h_1 + i h_2\,,$$

außerdem die Entfernung $OO' = d$ der beiden Kreismittelpunkte $= R + r = d_1 + i d_2$, so daß $d_1 = R_1 + r_1$, $d_2 = R_2 + r_2$ ist. Auch den Rollwinkel ω am festen Kreise können wir komplex annehmen. Da aber das Rollen proportional mit der (reellen) Zeit vor sich gehen soll, müssen irgend zwei Werte dieses Winkels ein reelles Verhältnis haben. Wir können also setzen

$$\omega = (\varsigma_1 + i \varsigma_2)\varepsilon\,.$$

Damit gehen die Gleichungen (2) von Nr. 164 in folgende über

$$(29)\quad \begin{cases} x = (d_1 + i\,d_2)\cos(\varsigma_1 + i\,\varsigma_2)\varepsilon - (h_1 + i\,h_2)\cos(\sigma_1 + i\,\sigma_2)\varepsilon, \\ y = (d_1 + i\,d_2)\sin(\varsigma_1 + i\,\varsigma_2)\varepsilon - (h_1 + i\,h_2)\sin(\sigma_1 + i\,\sigma_2)\varepsilon, \end{cases}$$

wo noch

$$\sigma = \sigma_1 + i\,\sigma_2 = \frac{(\varsigma_1 + i\,\varsigma_2)(d_1 + i\,d_2)}{r_1 + i\,r_2}$$

gesetzt ist. Die Größen x, y in (29) müssen gemäß unserer Forderung für beliebige Werte von ε reell sein. Gleiches gilt von den Ableitungen nach ε. Indem man insbesondere die imaginären Bestandteile von x, $dy/d\varepsilon$, $d^2x/d\varepsilon^2$, $d^3y/d\varepsilon^3$, sämtliche für $\varepsilon = 0$, gleich Null setzt, ergeben sich zunächst vier notwendige Bedingungen:

$$(30)\quad \begin{cases} d_2 - h_2 = 0\,, \\ d_1\varsigma_2 + d_2\,\varsigma_1 - h_1\,\sigma_2 - h_2\,\sigma_1 = 0\,, \\ 2\,d_1\,\varsigma_1\,\varsigma_2 + d_2(\varsigma_1^2 - \varsigma_2^2) - 2\,h_1\,\sigma_1\,\sigma_2 - h_2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) = 0\,, \\ d_1(3\,\varsigma_1^2\,\varsigma_2 - \varsigma_2^3) + d_2(\varsigma_1^3 - 3\,\varsigma_1\,\varsigma_2^2) \\ \qquad - h_1(3\,\sigma_1^2\,\sigma_2 - \sigma_2^3) - h_2(\sigma_1^3 - 3\,\sigma_1\,\sigma_2^2) = 0\,. \end{cases}$$

Untersucht man diese Gleichungen näher, so findet man, daß sie auf folgende beide Annahmen führen:

Entweder muß $d_2 = h_2 = \varsigma_2 = \sigma_2 = 0$ sein; das ist der Fall der gewöhnlichen Trochoidalen. Oder aber es ist

$$(31)\qquad d_1 = -h_1\,,\quad d_2 = h_2\,;\quad \varsigma_1 = \sigma_1\,,\quad \varsigma_2 = -\sigma_2\,,$$

so daß also d und h, sowie ς und σ konjugiert imaginär sind. Die Einführung von d statt h und ς statt σ in die Gleichungen (29) ergibt nun

$$(32)\quad \begin{cases} x = 2\,d_1\cos\varsigma_1\,\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\varsigma_2\,\varepsilon + 2\,d_2\sin\varsigma_1\,\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\varsigma_2\,\varepsilon\,, \\ y = 2\,d_1\sin\varsigma_1\,\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\varsigma_2\,\varepsilon - 2\,d_2\cos\varsigma_1\,\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\varsigma_2\,\varepsilon\,, \end{cases}$$

d. i. eine reelle Parameterdarstellung. Die Bedingungen (30) sind also nicht bloß notwendig, sondern auch hinreichend. Aus (31) ist aber zu entnehmen, daß nicht irgend zwei komplexe Kreise mit beliebig komplexem h reelle Kurven ergeben. Schreibt man insbesondere die Bedingungen $\sigma_1 = \varsigma_1$, $\sigma_2 = -\varsigma_2$ aus, so ergeben sich die Gleichungen

$$(33)\quad \begin{cases} \varsigma_1[d_1\,r_1 + d_2\,r_2 - (r_1^2 + r_2^2)] + \varsigma_2(d_1\,r_2 - d_2\,r_1) = 0\,, \\ \varsigma_1(d_2\,r_1 - r_1\,d_2) + \varsigma_2[d_1 r_1 + d_2\,r_2 + (r_1^2 + r_2^2)] = 0\,. \end{cases}$$

Die Bedingung der Verträglichkeit liefert

$$(34) \qquad d_1^2 + d_2^2 = r_1^2 + r_2^2 \,,$$

was mit

$$(34^*) \qquad R_1^2 + R_2^2 + 2 R_1 r_1 + 2 R_2 r_2 = 0$$

äquivalent ist. Man kann also im Zusammenhalt mit (31) sagen: *Wenn zwei komplexe Kreise von den Radien R und r aufeinander rollen, so beschreibt ein vom Mittelpunkt des beweglichen Kreises um die komplexe Entfernung h abstehender Punkt nur dann eine reelle Kurve, die »Pseudotrochoide« heißt, wenn $R+r$, r und h denselben absoluten Betrag haben und außerdem h zu $R+r$ konjugiert ist.*

188. Sind also vier Werte R_1, R_2, r_1, r_2 gegeben, die (34*) befriedigen, so erhält man h_1, h_2 aus (31). Die Gleichungen der Kurven hängen dann nur noch von dem Verhältnis ς_2/ς_1 ab, das durch eine der Gleichungen (33) gegeben wird. Man erhält z. B. aus der ersten den Wert

$$\varsigma_2/\varsigma_1 = (R_1 r_1 + R_2 r_2)/(R_2 r_1 - R_1 r_2) \,.$$

Erweitert man diesen Bruch mit R_1 und ersetzt im Nenner R_1^2 durch den aus (34*) zu nehmenden Ausdruck, so scheidet sich der Faktor $R_1 r_1 + R_2 r_2$ ab. Ähnlich könnte man den Bruch mit R_2 erweitern; man erhält

$$(35) \qquad \frac{\varsigma_2}{\varsigma_1} = \frac{R_1}{R_2 + 2 r_2} = -\frac{R_2}{R_1 + 2 r_1} = \vartheta \,.$$

Setzt man $\varsigma_1 \varepsilon = \tilde\omega$, also $\varsigma_2 \varepsilon = \vartheta \tilde\omega$, so können wir die Gleichungen (32) in etwas anderer Form schreiben:

$$(36) \qquad \begin{cases} x = 2(R_1 + r_1)\cos\tilde\omega \operatorname{ch}\vartheta\tilde\omega + 2(R_2 + r_2)\sin\tilde\omega \operatorname{sh}\vartheta\tilde\omega \,, \\ y = 2(R_1 + r_1)\sin\tilde\omega \operatorname{ch}\vartheta\tilde\omega - 2(R_2 + r_2)\cos\tilde\omega \operatorname{sh}\vartheta\tilde\omega \,. \end{cases}$$

Man bemerkt sofort, daß die Forderung $h = \pm r$ den Gleichungen (31) und (34) nicht widerspricht. Es ist dann entweder $R_1 = 0$, $R_2 = -2r_2$, also $R = iR_2$, $r = r_1 - \frac{1}{2} i R_2 = h$; das sind die Hyperzykloiden. Oder es ist $R_2 = 0$, $R_1 = -2r_1$, also $R = R_1$, $r = -\frac{1}{2} R_1 + i r_2$; das sind die Parazykloiden (Nr. 151).

189. Die allgemeinen Gleichungen (36) wollen wir nicht diskutieren[140]). Aber außer den schon im vorigen

---

[140]) E. Wölffing hat in dem zitierten Aufsatze[129]) (S. 212) eine vollständige Klassifikation der Pseudotrochoiden gegeben.

Paragraphen behandelten Pseudozykloidalen werden wir hier noch die Fälle in Betracht zu ziehen haben, wo $h = \pm(R + r)$ wird. Wir können sie folgerichtig »Pseudorhodoneen« nennen, da ihnen bei reellen Kreisen die Rosenkurven entsprechen. Es wird auch nicht wundernehmen, wenn wir gleich sagen: *Die Pseudorhodoneen sind die Fußpunktskurven der Pseudozykloidalen in bezug auf den Mittelpunkt des festen Kreises.* Indem wir den direkten Beweis übergehen, bemerken wir nur, daß wir natürlich, wenn wir von einer Erzeugung mittels eines Gelenkparallelogrammes, aber mit lauter komplexen Elementen, ausgingen, auf dieselben Kurven (36) kämen. Infolgedessen müssen auch die Pseudotrochoiden zweierlei Erzeugungen haben. Aus demselben Grunde wird eine Sehne, deren Endpunkte auf einem Kreise mit verschiedenen, aber komplexen Geschwindigkeiten laufen, eine unter gewissen Bedingungen reelle Pseudozykloidale einhüllen und der Mittelpunkt der Sehne eine Pseudorhodonee als Fußpunktskurve beschreiben.

Die beiden verschiedenen Arten von Pseudorhodoneen, die für $h = \pm(R + r)$ entstehen, müssen den beiden Arten von Pseudozykloidalen als Fußpunktskurven entsprechen. Es sei zunächst $h = +(R + r)$, so muß, da h zu $R + r$ konjugiert ist, $R_2 + r_2 = 0$ und $h = h_1 = R_1 + r_1$, also reell sein. Die Gleichungen der Kurve sind

(37) $$x = 2(R_1 + r_1)\cos\tilde{\omega}\,\mathrm{ch}\,\vartheta\,\tilde{\omega}\,, \quad y = 2(R_1 + r_1)\sin\tilde{\omega}\,\mathrm{ch}\,\vartheta\,\tilde{\omega}\,.$$

Die Kurve geht also nicht reell durch den Anfangspunkt und ist infolgedessen zur Hyperzykloide, die keine Spitze hat, Fußpunktskurve. Da man $\tilde{\omega}$ als Polarwinkel betrachten kann, ist ihre Polargleichung $\varrho = 2(R_1 + r_1)\,\mathrm{ch}\,\vartheta\,\tilde{\omega}$, also von der Form

(37*) $$\varrho = a\,\mathrm{ch}\,\varkappa\,\theta = \tfrac{1}{2}a(e^{\varkappa\theta} + e^{-\varkappa\theta})\,.$$

Sie kann demnach als Kissoide zweier kongruenten, symmetrisch gelegenen, logarithmischen Spiralen betrachtet werden und wurde, da die Radienvektoren addiert werden, als »Summenspirale«[141]) bezeichnet (s. in Fig. 124, wo die beiden logarithmischen Spiralen angedeutet sind, die ausgezogene Kurve).

---

[141]) H. Dittrich, *Die log. Spirale,* Progr. Breslau 1872, S. 9.

Setzen wir $h = -(R + r)$, so erhalten wir $R_1 + r_1 = 0$ und $h = i\,h_2 = -i\,(R_2 + r_2)$, also rein imaginär. Die Gleichungen der zugehörigen Kurve sind

(38) $x = 2(R_2 + r_2)\sin\tilde{\omega}\,\mathrm{sh}\,\vartheta\,\tilde{\omega}\,,\quad y = -2(R_2 + r_2)\cos\tilde{\omega}\,\mathrm{sh}\,\vartheta\,\tilde{\omega}\,.$

Diese geht durch den Koordinatenanfangspunkt und ist Fußpunktskurve der Parazykloide. Ihre Polargleichung ist, wenn wir die negative y-Achse als Polarachse nehmen, $\varrho = 2(R_2 + r_2)\,\mathrm{sh}\,\vartheta\,\tilde{\omega}$, also von der Form

(38*) $$\varrho = a\,\mathrm{sh}\,\varkappa\,\theta = \tfrac{1}{2}\,a(e^{\varkappa\theta} - e^{-\varkappa\theta})\,.$$

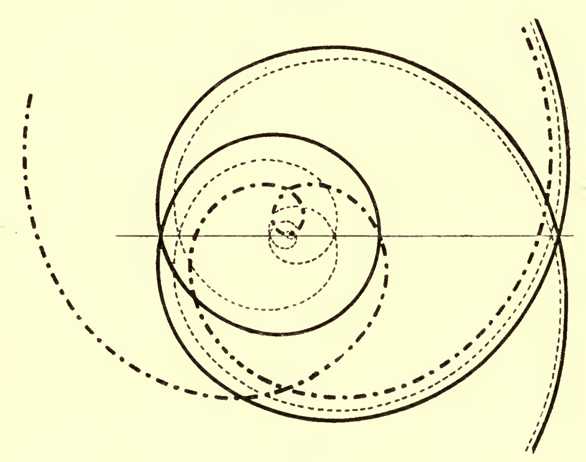


Fig. 124.

Die Kurve ist also ebenfalls eine Kissoide derselben zwei logarithmischen Spiralen, wird aber durch Subtraktion der Radienvektoren gebildet. Sie heißt daher »Differenzenspirale« (in Fig. 124 strichpunktiert wiedergegeben).

190. Analog den Ährenkurven werden wir die Inversen der Pseudorhodoneen in bezug auf einen Kreis um den Anfangspunkt »Pseudoährenkurven« nennen. Die Inverse der Summenspirale, die nach einem früheren Satze zur Hyperzykloide polarreziprok ist, hat die Polargleichung

(39) $$\varrho = a/\mathrm{ch}\,\varkappa\,\theta = 2\,a/(e^{\varkappa\theta} + e^{-\varkappa\theta})\,.$$

Diese Kurve heißt »Poinsotsche Spirale«. POINSOT stellte zuerst die Drehung eines Körpers um einen festen

Punkt durch das Abrollen zweier Kegel aufeinander dar[142]), genau wie man in der Ebene jede Bewegung durch das Abrollen zweier Kurven ersetzen kann. Bei diesem Abrollen der beiden Kegel dreht sich das Trägheitsellipsoid des Körpers um den festen Punkt, indem es immer tangential zu einer gewissen invariablen Ebene bleibt. Die Kurve nun, die der Berührungspunkt auf dem Ellipsoid beschreibt, nannte POINSOT »Polhodie« (ὁ πόλος, der Pol; ἡ ὁδός, der Weg), den Ort des Berührungspunktes auf der Ebene »Herpolhodie« (ἕρπω, ich krieche). Zur Aufstellung der Herpolhodie im allgemeinen Falle sind elliptische Funktionen nötig. In dem einen, elementar integrierbaren Falle ergibt sich die obige Kurve, die daher den angegebenen Namen erhielt.

Indem wir dies nur referierend erwähnen, führen wir noch eine geometrische Erzeugung der Poinsotschen Spirale an, die vielleicht neu ist. Wenn θ und ψ Polarkoordinaten auf der Kugel sind, θ die Länge und ψ die Poldistanz, so ist die Gleichung einer Loxodrome

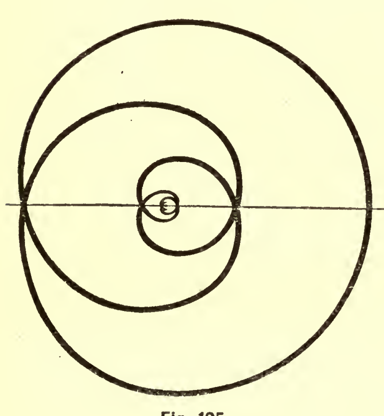


Fig. 125.

(40) $\quad \varkappa\,\theta = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\,\psi\,.$

Wir wollen deren Projektion auf die Äquatorebene bestimmen. Die Polarkoordinaten der Projektion des die Loxodrome beschreibenden Punktes P auf die Äquatorebene sind θ und $\varrho = r \sin\psi$, wenn r den Kugelradius bedeutet. Nun ergibt sich aus (40) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\psi = e^{\varkappa\theta}$, also $\sin\psi = 2\,e^{\varkappa\theta}/(1 + e^{2\varkappa\theta})$ und die Polargleichung der gesuchten Projektion ist

(41) $$\varrho = 2\,r/(e^{\varkappa\theta} + e^{-\varkappa\theta}) = r/\operatorname{ch}\varkappa\,\theta\,,$$

d. i. unsere Poinsotsche Spirale. Die Kurve ist in Fig. 125 wiedergegeben.

[142]) Journ. de math. **15**, 1851.

Die Inverse der Differenzenspirale, die Polarreziproke der Parazykloide, hat die Gleichung

$$(42) \qquad \varrho = a/\operatorname{sh}\varkappa\theta = 2a/(e^{\varkappa\theta} - e^{-\varkappa\theta}) .$$

An ihr sind, wie es scheint, bis jetzt keine bemerkenswerten geometrischen Eigenschaften entdeckt worden. Sie sieht ungefähr aus wie eine hyperbolische Spirale, nur daß sie sich dem asymptotischen Punkt viel rascher nähert.

§ 26. Rollkurven verschiedener Art.

191. Wir nannten die Kurve, welche ein Punkt einer Tangente einer Grundkurve beschreibt, wenn die Tangente an der Kurve abrollt, im besonderen Evolvente der Grundkurve. Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen, indem man von der Evolvente wieder die Evolvente, d. i. die zweite Evolvente der Grundkurve bildet, usw. So erhält man eine Folge von Kurven, die vor allem Interesse bieten, wenn die Grundkurve ein Kreis ist. Wir sprechen dann von »höheren Kreisevolventen«. Nach Nr. 81 lauten die Gleichungen, welche die Evolvente geben, wenn die Elemente der Grundkurve mit $\overline{\mathcal{R}}$, $\overline{s}$, $\overline{\tau}$ bezeichnet werden,

$$(1) \qquad \mathcal{R} = \int \overline{\mathcal{R}}\, d\tau , \qquad s = \int \mathcal{R}\, d\tau = \int (\overline{s} - s_0)\, d\tau ,$$

wobei $d\tau = d\overline{\tau}$, während s_0 durch den Anfangspunkt der Bogen bestimmt wird. Es sei auch daran erinnert, daß eine Beziehung zwischen $\mathcal{R}$ und τ, oder s und τ ebenfalls genügt, eine Kurve darzustellen, da wegen $ds = \mathcal{R}\, d\tau$ hieraus immer die Gleichung in $\mathcal{R}$ und s hergestellt werden kann.

Ist nun durch $\overline{\mathcal{R}} = a_0$ der Grundkreis gegeben, so ist die Gleichung der ersten Evolvente $\mathcal{R}_1 = a_0\tau + a_1$, die der zweiten $\mathcal{R}_2 = \frac{1}{2}a_0\tau^2 + a_1\tau + a_2$, so daß man sofort erkennt, es wird die Gleichung der n^{ten} Evolvente des Kreises $\overline{\mathcal{R}} = a_0$ sein:

$$(2) \qquad \mathcal{R}_n = \frac{1}{n!}a_0\tau^n + \frac{1}{(n-1)!}a_1\tau^{n-1} + \dots + a_{n-1}\tau + a_n .$$

Hieraus erhält man ohne weiteres

$$(2^*) \qquad s_n = \frac{1}{(n+1)!}a_0\tau^{n+1} + \frac{1}{n!}a_1\tau^n + \dots + \tfrac{1}{2}a_{n-1}\tau^2 + a_n\tau + a_{n+1} .$$

Es ist daher allgemein

$$(2^{\dagger}) \qquad \mathcal{R} = c_0\tau^n + c_1\tau^{n-1} + \dots + c_{n-1}\tau + c_n$$

als Gleichung einer n^{ten} Kreisevolvente aufzufassen. Der Radius des Grundkreises ist dann $a_0 = n!\,c_0$, während die anderen c_i davon abhängen, wo jedesmal die Abwicklung begonnen wurde.

Beginnt man die Abwicklung immer in der Spitze der ersten Evolvente, so können wir $a_0 = a$ und $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1} = 0$ setzen, so daß die Gleichungen lauten

$$(3) \qquad \mathcal{R} = \frac{1}{n!}a\tau^n, \quad s = \frac{1}{(n+1)!}a\tau^{n+1}.$$

Die Gleichung in $\mathcal{R}$, s wird also

$$(3^*) \qquad \mathcal{R}^{n+1} = \frac{(n+1)^n}{n!}s^n.$$

Der Anfangspunkt ist hier ein höherer singulärer Punkt. Wir heißen die Kurven »Hauptevolventen« des Kreises. Im allgemeinen Falle muß τ aus (2) und (2*) eliminiert werden. Das kommt auf die Herstellung der Diskriminante von (2*) hinaus, wenn man diese als eine algebraische Gleichung in τ ansieht. Das Resultat ist eine Gleichung $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung in $\mathcal{R}$ und s, wo s allerdings nur bis zur n^{ten} Potenz vorkommen kann. Ihre Kenntnis ist zur Diskussion der Kurve nicht nötig. Wir sehen aus (2) sofort, daß jede n^{te} Kreisevolvente n Spitzen hat für die Werte von τ, welche die rechte Seite von (2) zum Verschwinden bringen. Diese sind sämtlich reell, wenn die Abwicklung immer in einem reellen Punkte begonnen wurde, d. h. wenn der beschreibende Punkt der abrollenden Geraden die Kurve in einem reellen Punkte traf (vgl. Nr. 81). Da man für gegebene Koeffizienten von (2) die Evolvente verhältnismäßig einfach angenähert zeichnen kann, läßt sich darauf ein Verfahren gründen, die Realität der Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu beurteilen [143]. Je größer τ wird, desto mehr wächst $\mathcal{R}$ und s; daher

---

[143]) Dargelegt bei H. Onnen, Arch. Néerl. **10**, 1875, 361—379. — Zuerst betrachtet wurden die höheren Kreisevolventen von du Bois-Aymé (1809), Whewell (Phil. Mag. (4) **36**, 1868; Proc. Lond. Math. S. **2**, 1869). Vgl. auch Curran Sharp (Mess. Math. **9**, 1880).

haben auch die höheren Kreisevolventen, was ja schon aus der Erzeugung hervorgeht, den Charakter von Spiralen.

192. Wir wollen nun den Fußpunktskurven der höheren Kreisevolventen unsere Aufmerksamkeit schenken. Dazu ist nötig, zuerst für diese eine Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten zu geben. Eine solche bekommt man aus ($2^\dagger$) mittels der Gleichungen

$$x = \int \mathcal{R} \cos\tau\, d\tau\,, \qquad y = \int \mathcal{R} \sin\tau\, d\tau\,.$$

Sie wird von der Form

$$(4) \qquad x = f(\tau)\cos\tau - f'(\tau)\sin\tau\,, \qquad y = f(\tau)\sin\tau + f'(\tau)\cos\tau\,,$$

wo

$$(5) \qquad f(\tau) = b_0\tau^n + b_1\tau^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\tau + b_n\,,$$

also eine ganze rationale Funktion n^{ter} Ordg. von τ ist. Dabei bestehen zwischen den b_i und c_i Gleichungen der Art

$$\begin{array}{ll} b_n + 2\,b_{n-2} = c_n\,, & b_2 + n(n-1)b_0 = c_2 \\ b_{n-1} + 6\,b_{n-3} = c_{n-1}\,, & b_1 = c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & b_0 = c_0\,. \end{array}$$

Man erhält allgemein aus (4)

$$(6) \quad dx = -(f(\tau) + f''(\tau))\sin\tau\,, \qquad dy = (f(\tau) + f''(\tau))\cos\tau\,,$$

woraus in der Tat eine Gleichung von der Form

$$(2^\dagger) \qquad ds/d\tau = \mathcal{R} = f(\tau) + f''(\tau) = \varphi(\tau)$$

hervorgeht.

Um nun die Fußpunktskurven der höheren Kreisevolventen in bezug auf den Anfangspunkt des in (4) benützten Koordinatensystems zu finden, hat man, wenn ξ, η laufende Koordinaten sind, den Ort des Schnittpunktes der beiden Geraden $\eta\, dx - \xi\, dy = y\, dx - x\, dy$ und $\eta\, dy + \xi\, dx = 0$ zu bestimmen. Man erhält

$$(7) \qquad \begin{cases} \eta(dx^2 + dy^2) = (y\,dx - x\,dy)dx\,, \\ \xi(dx^2 + dy^2) = -(y\,dx - x\,dy)dy\,. \end{cases}$$

In Polarkoordinaten ist

$$\varrho^2 = \eta^2 + \xi^2 = (y\,dx - x\,dy)^2/(dx^2 + dy^2)\,.$$

Nun hat man $y\,dx - x\,dy = -f(\tau)\varphi(\tau)d\tau$, $dx^2 + dy^2 = \varphi(\tau)^2 d\tau^2$, also $\varrho = f(\tau)$. Da ferner $\eta/\xi = -dx/dy$, so kann τ, nach-

dem man die Achsen vertauscht und den Sinn auf der x-Achse umgekehrt hat, als Polarwinkel θ gelten. Also ist die Gleichung der gesuchten Fußpunktskurven

$$\varrho = b_0\,\theta^n + b_1\,\theta^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\,\theta + b_n\,. \tag{8}$$

All diese Kurven sind Spiralen, die den Anfangspunkt als n-fachen Punkt haben. Der Anfangspunkt ist aber nichts anderes als der Mittelpunkt des Grundkreises unserer Kreisevolventen. Dies beweist man in folgender Weise.

Zieht man von einem Kurvenpunkt aus die Folge der Krümmungsradien $\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n-1}, \ldots, \mathcal{R}_1, \overline{\mathcal{R}}$, deren jeder auf dem vorhergehenden im Endpunkt senkrecht steht und legt durch den Mittelpunkt des Grundkreises ein Koordinatensystem parallel zu dem System der Tangente und Normale des Kurvenpunktes, so sieht man gleich, daß auf diese Achsen bezogen, der Kurvenpunkt die Koordinaten hat

$$\begin{cases} x_0 = \mathcal{R}_{n-1} - \mathcal{R}_{n-3} + \mathcal{R}_{n-5} - \ldots, \\ y_0 = \mathcal{R}_n - \mathcal{R}_{n-2} + \mathcal{R}_{n-4} - \ldots\text{[144]}\,. \end{cases} \tag{9}$$

Da aber

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n &= f(\tau) + f''(\tau)\,, & \mathcal{R}_2 &= f^{(n-2)}(\tau) + f^{(n)}(\tau)\,, \\ \mathcal{R}_{n-1} &= f'(\tau) + f'''(\tau)\,, & \mathcal{R}_1 &= f^{(n-1)}(\tau)\,, \\ & \ldots\ldots\ldots & \overline{\mathcal{R}} &= f^{(n)}(\tau)\,, \end{aligned}$$

so wird

$$x_0 = f'(\tau)\,, \qquad y_0 = f(\tau)\,. \tag{10}$$

Dreht man nun das Koordinatensystem um den Winkel τ, so ergeben sich für den Kurvenpunkt nach Vertauschung der Achsen die Koordinatenwerte (4). Demnach stimmt der Anfangspunkt von (4) mit dem Mittelpunkt des Grundkreises überein und wir können sagen: *Die Fußpunktskurven der höheren Kreisevolventen sind algebraische Spiralen von der Gleichungsform* (8).

---

[144]) Im allgemeinen ist für eine beliebige Kurve die Folge der Krümmungsradien der sukzessiven Evoluten unendlich. Wenn aber die Reihen (9) konvergieren, so reduzieren sich die Evoluten schließlich auf den Punkt (x_0, y_0), auf den zuerst Timmermanns aufmerksam gemacht hat (Mém. Soc. Lille **6**, 1828/9). Auch dann ist natürlich die Lage des Punktes von der Wahl des Ausgangspunktes unabhängig.

193. Aus den allgemeinen Gleichungen (4), (5) und (8) geht für $n = 1$ die gewöhnliche Kreisevolvente und die Archimedische Spirale als Fußpunktskurve hervor. Rollt die gewöhnliche Kreisevolvente auf einer Geraden, so ist die Mannheimsche Kurve sowohl, als auch der Ort des Grundkreismittelpunktes eine Parabel mit der Geraden als Achse (vgl. Nr. 162). Wir wollen nun die entsprechenden Kurven auch für die höheren Kreisevolventen angeben.

Die Mannheimsche Kurve erhält man einfach, indem man in den Gleichungen (2) $\mathcal{R} = y$, $s = x$ setzt. Sie ist also durch zwei Gleichungen der Form gegeben

$$(11) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{n+1} c_0 \tau^{n+1} + \frac{1}{n} c_1 \tau^n + \ldots + \frac{1}{2} c_{n-1} \tau^2 + c_n \tau + c_{n+1}, \\ y = c_0 \tau^n + c_1 \tau^{n-1} + \ldots + c_{n-1} \tau + c_n, \end{cases}$$

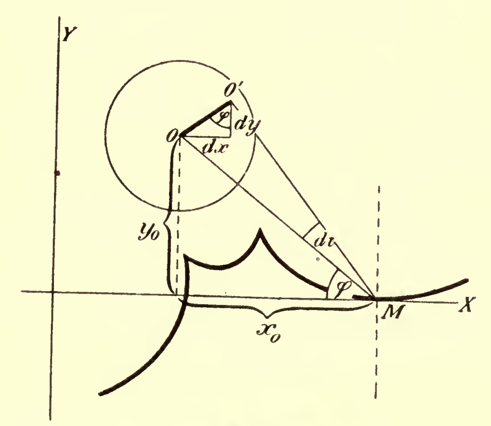


Fig. 126.

d. h. eine rationale algebraische Kurve $(n + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von der speziellen Art, die A. v. Brill als »rational-ganz« bezeichnet hat[145]), wo also die Nenner in den Ausdrücken für x und y gleich 1 sind. Auf der x-Achse haben diese Kurven im Unendlichen eine höhere Singularität.

Um den Ort des Mittelpunktes O des Grundkreises zu bestimmen, wenn die Kurve auf einer Geraden rollt, bemerken wir, daß in Fig. 126 nach einer Drehung um

[145]) Math. Ann. **16**, 1880, 348—408, bes. § 1.

den Winkel $d\tau$ die Dreiecke mit den Katheten x_0, y_0 und dx, dy ähnlich sind, so daß $dx/y_0 = OO'/OM = \sin(d\tau) = d\tau$ und $dy/x_0 = OO'/OM = d\tau$ wird. Wir haben also die Differentialgleichungen

(12) $$\frac{dx}{y_0} = d\tau\,, \quad \frac{dy}{x_0} = d\tau$$

zu lösen, um den Ort von O zu bestimmen, wobei x_0, y_0 in Funktion von τ (oder s) gegeben sein müssen. Dies ist hier der Fall. Wir erhalten, da $y_0 = f(\tau)$, $x_0 = f'(\tau)$

(13) $$\begin{cases} x = \int f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{n+1} b_0 \tau^{n+1} + \frac{1}{n} b_1 \tau^n + \ldots + b_n \tau + b_{n+1}, \\ y = \int f'(\tau)\,d\tau = b_0 \tau^n + b_1 \tau^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\tau + b_n\,, \end{cases}$$

also Kurven von genau demselben Charakter wie die Mannheimschen Kurven. Die Koeffizienten b_i sind von den c_i in der in Nr. 192 angegebenen Weise abhängig.

Für $n = 1$ ergibt sich aus (11) und (13) eine Parabel in der angegebenen Lage. Der unendlich ferne Punkt der x-Achse ist hier auf der unendlich fernen Geraden einfacher Berührungspunkt.

194. Von den höheren Kreisevolventen ist eine spezielle Gegenstand mehrerer Betrachtungen geworden. Dies verdankt sie dem Umstand, daß *ihr Radiusvektor immer gleich dem Krümmungsradius ist.* Der Pol ist dabei der Mittelpunkt des Grundkreises. Weil nach (4) $\varrho^2 = f(\tau)^2 + f'(\tau)^2$, während $\mathcal{R} = f + f''$, so ist sie durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung definiert

(14) $$f'^2 = 2ff'' + f''^2\,.$$

Da wir schon wissen, daß f eine ganze Funktion von τ sein muß, können wir die direkte Lösung dieser Gleichung erübrigen. Wir bemerken auch gleich, daß f mindestens quadratisch in τ sein muß, weil sonst f'' verschwände, und sehen ferner, daß es höchstens quadratisch sein kann. Denn andernfalls enthielte auch f'' das τ noch und Gleichung (14) lieferte mehr Bedingungsgleichungen, als Koeffizienten verfügbar sind. Wir setzen also $f = a\tau^2 + b\tau$, wo wir eine weitere Konstante weglassen können, $f' = 2a\tau + b$, $f'' = 2a$, so daß $\mathcal{R} = a\tau^2 + b\tau + 2a$. Die Gleichung (14) liefert $b = 2a$, also wird

(15) $$\mathcal{R} = a + a(\tau + 1)^2\,.$$

Hieraus erhält man $d\tau/d\mathfrak{R} = (\mathfrak{R} - a)^{-\frac{1}{2}}/2\sqrt{a}$, also

$$ds = \frac{\mathfrak{R}\, d\mathfrak{R}}{2\sqrt{a(\mathfrak{R} - a)}},$$

und schließlich

$$s = \frac{\mathfrak{R} + 2a}{3}\sqrt{\frac{\mathfrak{R} - a}{a}} \tag{16}$$

als natürliche Gleichung der Kurve. Sie ist eine zweite Kreisevolvente und heißt »Sturmsche Spirale«, da Ch. Sturm in seinem *Cours d'Analyse* (1857) zuerst auf die der Bedingung $\varrho = \mathfrak{R}$ genügende Kurve, d. i. unsere Spirale, hinwies[146]). Die Eigenschaft ist für sie charakteristisch, denn die direkte Behandlung der Differentialgleichung, zu der $\varrho = \mathfrak{R}$ führt, ergibt genau dieselbe Kurve.

Die Spitzen der Sturmschen Spirale sind beide imaginär; es ist für sie nämlich $\tau = -1 \pm i$, $s = \pm\frac{2}{3} a i$. Ihr Aussehen wird also ungefähr das einer Differenzenspirale sein (Fig. 124, strichpunktiert). Da wir weiter unten von den algebraischen Spiralen im Zusammenhange sprechen, lassen wir die Fußpunktskurve der Sturmschen Spirale einstweilen beiseite und sehen zunächst, was aus der Mannheimschen Kurve wird. Diese hat die Gleichung $9ax^2 = (y + 2a)^2(y - a)$ oder, wenn man $y + 2a = y$ setzt, $y^3 - 3a(y^2 + 3x^2) = 0$. Sie ist also eine Kubik mit isoliertem Punkte in $x = 0$, $y = -2a$; der unendlich ferne Punkt der x-Achse ist Wendepunkt mit der unendlich fernen Geraden als Tangente.

Interessanter ist der Ort des Grundkreismittelpunktes. Wir haben für diesen $y = a\tau^2 + 2a\tau$. Daraus wird $d\tau = dy/2\sqrt{a(y + a)}$, also

$$x = \int y\, d\tau = \int \frac{y\, dy}{2\sqrt{a(y + a)}}.$$

Die Integration ergibt schließlich als Gleichung des gesuchten Ortes

$$9ax^2 = (y + a)(y - 2a)^2. \tag{17}$$

Setzen wir hier $y - 2a = y$, so wird die Gleichung

[146]) Später beschäftigten sich mit ihr Sylvester (Phil. mag. (4) **36**, 1868; Proc. London Math. S. **2**, 1869) und O. Schlömilch (Zeitschr. Math. **14**, 1869).

$y^3 + 3a(y^2 - 3x^2) = 0$. Das ist demnach eine Tschirnhausensche Kubik (Nr. 34)[147].

195. Wir gebrauchten im obigen des öfteren den Ausdruck »Spirale«, ohne ihn mathematisch zu definieren. Nach dem gemeinen Sprachgebrauche bezeichnet Spirale eine Linie, die mehrere Windungen um einen Punkt macht. Recht viel besser können wir das auch nicht ausdrücken; nur setzt man gewöhnlich die Zahl der Windungen als unendlich groß voraus. Da aber die Benennungen der Kurven nur zum Teil auf systematischer Grundlage beruhen, zu allermeist historischen oder auch zufälligen Ursachen entspringen, wird die Bezeichnung Spirale nicht auf alle Kurven solcher Art angewendet. Hier wollen wir nur noch einige von den Spiralen betrachten, die durch eine algebraische Gleichung zwischen ϱ und θ gegeben sind und die man daher füglich »algebraische Spiralen« nennen kann. Die Fußpunktskurven der höheren Kreisevolventen mit der Gleichungsform $\varrho = f_n(\theta)$, wo f_n eine ganze Funktion n^{ter} Ordg. von θ ist, bilden dann eine Unterabteilung dieser Familie.

Ist $n = 1$, so ergibt sich die Archimedische Spirale. Für $n = 2$ hat man $\varrho = b_0\theta^2 + b_1\theta + b_2$. Durch Drehung der Polarachse läßt sich diese immer auf die Form bringen

$$\varrho = a\theta^2 - l \,. \tag{18}$$

Auf eine Spirale dieser Art stieß schon GALILEI nach dem Zeugnis von FERMAT[148], der sie daher »Galileische Spirale« nennt. Sie hat einen Doppelpunkt im Anfangspunkte mit den Tangentenrichtungen $\theta = \pm\sqrt{l/a}$, der für $l = 0$ in eine Spitze übergeht. Von dieser Grundform, die die Gleichung hat

$$\varrho = a\theta^2 \,, \tag{19}$$

sind alle Galileischen Spiralen Konchoiden. Der Doppelpunkt ist aber nur für positive Werte von l ein Knoten. In Fig. 127 ist (19) stark, (18) leicht ausgezogen dargestellt.

---

[147]) Diesen Satz, sowie die vorhergehenden allgemeineren über höhere Kreisevolventen stellte der Verfasser auf im Arch. Math. (3) **11**, 1907, 311/13.

[148]) *Oeuvres*, t. II, S. 12.

Die Spirale (19) können wir auf zweierlei Arten mit der Archimedischen Spirale in Beziehung setzen. Betrachten wir allgemeiner eine Spirale von der Gleichungsform

(20) $$\varrho = a\,\theta^m\,,$$

so erhalten wir für die Längen ϱ_n und ϱ_t der Polarsubnormale und Polarsubtangente die Werte

(21) $$\varrho_n = a\,m\,\theta^{m-1}\,, \quad \varrho_t = \frac{a}{m}\,\theta^{m+1}\,.$$

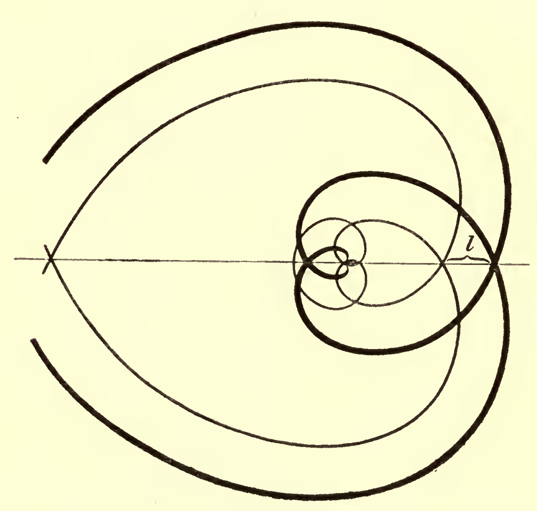


Fig. 127.

Die Endpunkte der Polarsubnormale und -tangente beschreiben also, wenn der Punkt sich längs der Kurve (20) bewegt, Kurven (21) derselben Art. *So ist die spezielle Galileische Spirale* (19) *der Ort für den Endpunkt der Polarsubtangente einer Archimedischen Spirale, während andererseits der Ort für den Endpunkt der Polarsubnormale jeder Galileischen Spirale* [(19) oder (18)] *eine Archimedische Spirale ist.*

Wir können ferner behaupten: *Die Fußpunktskurve jeder zweiten Kreisevolvente ist eine Galileische Spirale.* Insbesondere entspricht der Sturmschen Spirale als Fußpunktskurve die Kurve $\varrho = a\,\theta^2 + 2\,a\,\theta$, die sich in der Form

$\varrho = a\,\tilde{\omega}^2 - a$ schreiben läßt $(\tilde{\omega} = \theta + 1)$, also eine Galileische Spirale mit einem Knoten, dessen Tangenten den Winkel 2 ($= 114\frac{1}{2}^0$ ca.) miteinander bilden.

196. Wenn wir in Gleichung (20) von der Beschränkung absehen, daß m eine positive ganze Zahl sei, so ergeben sich andere algebraische Spiralen, von denen auch einige von Interesse sind. Zunächst sei m negativ ganzzahlig. Die Spiralen

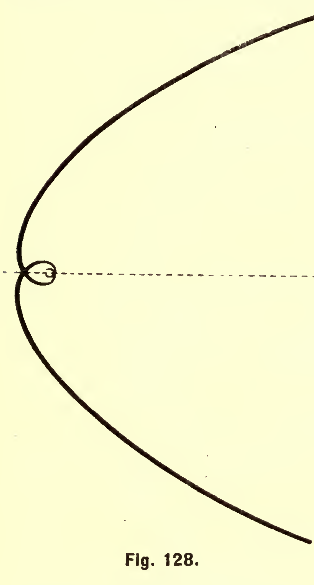


Fig. 128.

$$(22) \qquad \varrho\,\theta^m = a\,,$$

wo jetzt m wieder positiv ganz genommen werden möge, sind dann die Inversen der Spiralen (20), also die Polarreziproken zu den Hauptevolventen des Kreises. Wir sehen unter ihnen für $m = 1$ die hyperbolische Spirale, für $m = 2$ die Inverse von (19). Diese verhält sich im Unendlichen wie die Parabel $y^2 = a\,x$ und hat den Anfangspunkt als doppelten asymptotischen Punkt, dem sie sich sehr rasch nähert (Fig. 128).

Lassen wir ferner in der Gleichung (20) m auch gebrochene Werte annehmen, so wird durch diese Gleichung eine Familie von Kurven dargestellt, die man als »höhere parabolische bzw. hyperbolische Spiralen« bezeichnen kann[148a]). Besonders betrachten wir noch die Kurve für $m = \frac{1}{2}$, ihre Konchoide und ihre Inverse $(m = -\frac{1}{2})$. Die Spirale

$$(23) \qquad \varrho = a\sqrt{\theta} \qquad \text{oder} \qquad \varrho^2 = a^2\,\theta$$

heißt »Fermatsche Spirale«[149]). Jedem positiven Werte von θ entsprechen zwei gleiche und entgegengesetzte Werte von ϱ. Der Anfangspunkt ist also ein Mittelpunkt der Kurve; die zwei Zweige, die sich in ihm vereinigen, stoßen

[148a]) Vgl. J. Sobotka, Stzgsb. böhm. Ges. Prag 1898.
[149]) *Oeuvres,* t. II, 12/14; t. III, 277/8.

mit einem Wendepunkte aneinander. Jeder Zweig macht unendlich viele Windungen um den Pol, die sich schließlich ins Unendliche erstrecken. Gegenüber allen bisher betrachteten Spiralen haben die Windungen der Fermatschen Spirale aber die Eigentümlichkeit, immer enger zu werden, je weiter hinaus sie sich erstrecken. Denn eine Windungsbreite ist, auf dem Radiusvektor gemessen, $b = a(\sqrt{\theta + 2\pi} - \sqrt{\theta})$; diese Größe nimmt aber mit wachsendem θ ab, wie der Differentialquotient zeigt. Übrigens ist b die Windungsbreite für den einen Zweig; da der zweite Zweig aber immer zwischen den Windungen

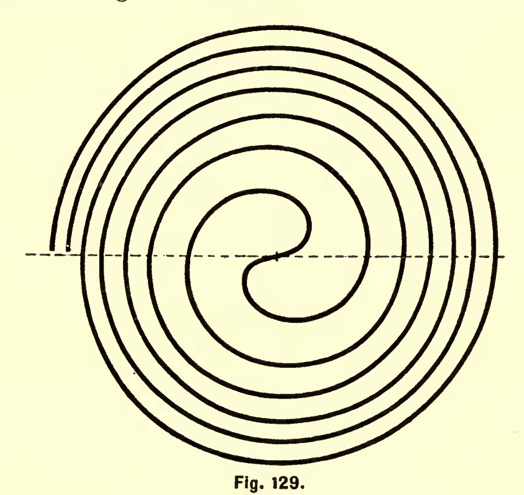


Fig. 129.

des ersten verläuft, ist die eigentliche Windungsbreite $b' = a(\sqrt{\theta + \pi} - \sqrt{\theta})$, diese nimmt natürlich in gleicher Weise ab. Die Spirale ist durch Fig. 129 wiedergegeben.

Die Konchoide der Fermatschen Spirale mit der Gleichung

(24) $\varrho = a\sqrt{\theta} + l$ oder $(\varrho - l)^2 = a^2\theta$

nannte JAK. BERNOULLI[150]) »parabolische Spirale«. Diese hat eine eigentümliche Form; der Zweig nämlich, dem das negative Vorzeichen der Wurzel entspricht, bildet

[150]) Act. Erud. Jan. 1691 = *Opera,* t. I, 431.

mit sich selbst und mit dem andern Zweige unendlich viele Doppelpunkte, die scheinbar regellos, wenigstens unsymmetrisch verteilt sind[151]). Außerdem hat die Kurve einen Wendepunkt. Die Bedingung für die Existenz eines solchen ergibt die Gleichung 5. Grades in ϱ

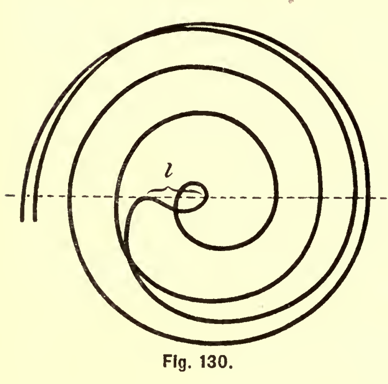


Fig. 130.

$$4\,\varrho^2(\varrho - l)^3 + 2\,a^4(\varrho - l) + a^4\,\varrho = 0\,.$$

Diese hat aber nur eine reelle Lösung, die, wie man sofort sieht, zwischen 0 und l liegt. Für $l = 0$ trennt sich in der Tat die Wurzel $\varrho = 0$ ab, während die 4 andern imaginär sind. Alles übrige mag sich der Leser aus (24) und der Fig. 130 selbst ableiten.

197. Wir erwähnten oben, daß auch noch die Inverse der Fermatschen Spirale von Interesse sei. Sie hat die Gleichung

$$(25) \qquad \varrho = a/\sqrt{\theta} \quad \text{oder} \quad \varrho^2\,\theta = a^2$$

und heißt nach Cotes »Lituus« (= Krummstab), da ihr einer Zweig, den man früher allein betrachtete, in der Tat mit einem Bischofsstab verglichen werden kann (vgl. Fig. 131). Wir sehen aber aus (25), daß für jedes positive θ zwei entgegengesetzte gleiche Werte von ϱ hervorgehen, so daß der Anfangspunkt Mittelpunkt ist. Gleichzeitig ist er aber auch doppelter asymptotischer Punkt; denn für wachsendes θ nimmt ϱ immer mehr und schließlich bis zu Null ab für $\theta = \infty$. Für $\theta = 0$ ist $\varrho = \pm\infty$, aber die Polarsubtangente gleich Null; also ist die Polarachse selbst Asymptote an beide Zweige. Aus dem bisherigen ist klar, daß jeder Zweig einen Wendepunkt haben muß. In der Tat gibt die Bedingung hierfür $\theta^2 = \frac{1}{4}$; die

[151]) Genaueres über die Verteilung enthält das Schriftchen von G. D. E. Weyer *„Über die parabolische Spirale"*. Kiel (Lipsius und Tischer) 1894, 36 S. gr. 8°.

reellen Wendepunkte haben also die Koordinaten $\theta = \frac{1}{2}$, $\varrho = \pm a\sqrt{2}$.

Aus der geometrischen Deutung der Gleichung (25) ergibt sich sofort folgende Erzeugung des Lituus: *Hat man ein System konzentrischer Kreise und eine Gerade durch den gemeinsamen Mittelpunkt, und läßt man diese Gerade sich um den Mittelpunkt drehen, dabei auf jedem Kreise den Punkt P anmerkend, wo der überstrichene Sektor einen konstanten Wert* ($\frac{1}{2}a^2$) *erreicht, so ist der Ort dieser Punkte P ein Lituus.* Ferner ist der Lituus, wie aus den Formeln (21) hervorgeht, der Ort für den Endpunkt der Polarsubnormale bei der Fermatschen Spirale; andererseits ist der Ort für den Endpunkt der Polarsubtangente beim Lituus eine Fermatsche Spirale. Die Normale (oder Tangente) konstruiert man beim Lituus wie bei allen Kurven (20), indem man die Polarsubnormale (oder -tangente) durch ϱ ausdrückt.

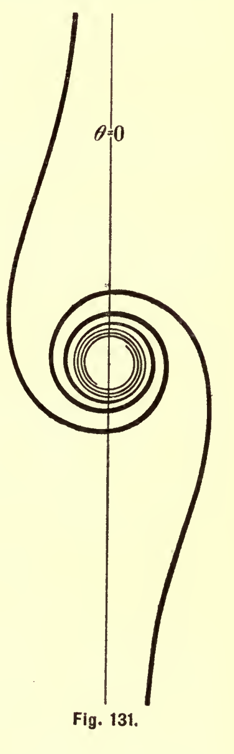


Fig. 131.

198. Wendet man auf den Lituus dieselbe Konstruktion an, die von der hyperbolischen Spirale zur Kochleoide führte, so ergibt sich die Kurve

$$(26) \qquad \varrho = \frac{a \sin\theta}{\sqrt{\theta}},$$

die den Ort für die Endpunkte derjenigen Bogen in dem der Kochleoide zugrunde liegenden Kreisbüschel darstellt, denen gleiche Sektoren entsprechen. Sie ist, wie es scheint, noch nie untersucht worden und wir geben daher wenigstens ihre Form (Fig. 132).

Wie die Archimedische Spirale, so können alle algebraischen Spiralen, insbesondere alle parabolischen oder hyperbolischen Spiralen, aufgefaßt werden als Orthogonalprojektionen des Durchschnittes einer gewöhnlichen Schraubenfläche mit einer geeigneten Rotationsfläche auf eine zur

Schraubenachse senkrechte Ebene. Denn haben die beiden Flächen die Gleichungen

$$z = c \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\,, \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = f(z)\,,$$

so ist die Gleichung der genannten Projektion

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f\left(c \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right),$$

oder in Polarkoordinaten

$$\varrho = f(c\,\theta)\,,$$

wo c auch gleich 1 gesetzt werden kann. Für die Archimedische Spirale $\varrho = a\,\theta$ ergibt sich als Meridiankurve der Rotationsfläche wirklich die Gerade $cx = az$, für die hyperbolische Spirale $\varrho = a/\theta$ die Hyperbel $xz = ac$, für die Fermatsche Spirale $\varrho = a\sqrt{\theta}$ die Parabel $c\,x^2 = a^2 z$, für den Lituus $\varrho = a/\sqrt{\theta}$ die Kubik $x^2 z = a^2 c$ usw.

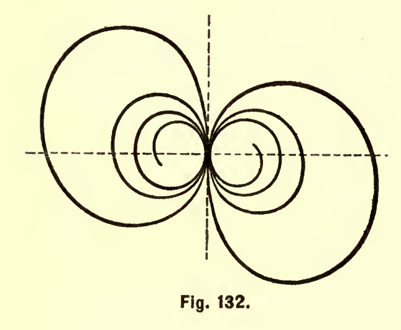


Fig. 132.

199. Nachdem wir die Rollkurven der Kreise und Geraden untersucht haben, liegt es nahe, nach den Kurven zu fragen, die erzeugt werden, wenn ein Kegelschnitt auf einer Geraden rollt. Es ist aber klar, daß hier die Verhältnisse gleich wesentlich komplizierter werden, da die Rektifikation, wenigstens der Mittelpunktkegelschnitte, elliptische Integrale erfordert. Doch lassen sich die interessantesten Rollkurven, die hier auftreten — sie werden durch die Brennpunkte beschrieben — mittels natürlicher Koordinaten noch recht übersichtlich behandeln.

Um die natürliche Gleichung der Kurve aufzustellen, welche ein Brennpunkt F einer Ellipse mit den Halbachsen a, b beschreibt, wenn diese auf einer Geraden rollt, haben wir uns der Gleichungen (5) und (9) in Nr. 127 zu bedienen, wobei wir die Elemente für die Ellipse aus Nr. 126 entnehmen. Sind diese $\overline{\mathcal{R}}$, $\bar{s}$, die der Rollkurve

$\mathcal{R}$, s, die Polarkoordinaten von F in bezug auf den momentanen Berührungspunkt ϱ, θ, so hat man

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\varrho} - \frac{\overline{\mathcal{R}}\sin\theta}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho} - \frac{2a - \varrho}{a\varrho} = \frac{1}{a} - \frac{1}{\varrho},$$

also

(27) $$\frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a}.$$

Läßt man also die entstandene Kurve um die Gerade als Achse rotieren, so entsteht eine Rotationsfläche, deren mittlere Krümmung konstant ($= 1/2a$) *ist.* Indem Ch. Delaunay Rotationsflächen dieser Art zu bestimmen suchte, kam er auf die in Rede stehenden Kurven[152], die man daher heute meist »Delaunaysche Kurven« nennt. Dabei sei gleich bemerkt, daß die ganze Untersuchung mit kleinen Änderungen auch für eine rollende Hyperbel gilt. In den bisher angeschriebenen Gleichungen ist dann nur ϱ mit negativem Zeichen zu nehmen.

Unter Benutzung der natürlichen Gleichung des Kegelschnittes erhalten wir ferner für die Rollkurve

$$s = \int \frac{\varrho}{\mathcal{R}}\, d\bar{s} = \int \frac{a b \varrho\, d\overline{\mathcal{R}}}{3\overline{\mathcal{R}}\sqrt{[(a b \overline{\mathcal{R}})^{\frac{2}{3}} - b^2][a^2 - (\iota b \overline{\mathcal{R}})^{\frac{2}{3}}]}}.$$

Nun ist aber $(a b \overline{\mathcal{R}})^{\frac{2}{3}} = \varrho(2a - \varrho)$, hieraus

$$d\overline{\mathcal{R}} = 3(a - \varrho)\sqrt{\varrho(2a - \varrho)}\, d\varrho/ab$$

und folglich nach einer kleinen Rechnung

(28) $$s = \int \frac{a b\, d\varrho}{(2a - \varrho)\sqrt{2a\varrho - \varrho^2 - b^2}} = \int \frac{a b\, d\varrho}{(2a - \varrho)\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (\varrho - a)^2}},$$

wo ε die numerische Exzentrizität $(= \sqrt{a^2 - b^2}/a)$ des Kegelschnittes bedeutet. Die Gleichungen (27) und (28) liefern eine Parameterdarstellung der gesuchten Kurve in natürlichen Koordinaten. Wollen wir die Gleichung in $\mathcal{R}$, s selbst, so müssen wir aus (27) $\varrho = a\mathcal{R}/(\mathcal{R} - a)$ und $d\varrho = -a^2 d\mathcal{R}/(\mathcal{R} - a)^2$ in (28) einsetzen. Das ergibt schließ-

[152]) J. de math. (1) **6**, 1841, 309—315.

lich, wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel immer unberücksichtigt bleiben kann,

(29) $$s = \int \frac{a\,b\,d\mathcal{R}}{(\mathcal{R} - 2\,a)\sqrt{\varepsilon^2(\mathcal{R} - a)^2 - a^2}}\,.$$

Da diese Integration ausführbar ist, erhalten wir die natürliche Gleichung einer Delaunayschen Kurve in endlicher Form. Diese stellt sich am besten dar, wenn man sie nach $\mathcal{R}$ auflöst und lautet

(29*) $$\mathcal{R} = a \cdot \frac{1 - 2\,\varepsilon\cos(s/a) + \varepsilon^2}{\varepsilon(\varepsilon - \cos(s/a))}\,.$$

200. Der Leser überzeuge sich nun zunächst, daß man die Gleichung in derselben Form schreiben kann, wenn man eine Hyperbel als rollende Kurve zugrunde legt. Die beiden

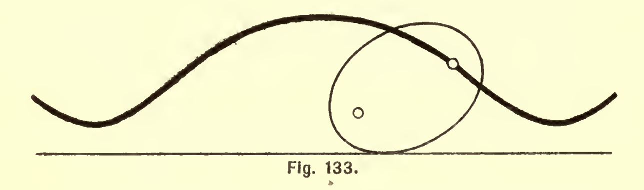


Fig. 133.

Fälle werden in (29*) durch die Größe von ε unterschieden. Es ist auch sofort zu ersehen, daß die Kurve (29*) für $\varepsilon < 1$ (Ellipse) und $\varepsilon > 1$ (Hyperbel) ganz verschiedene Gestalt haben muß, da für $\varepsilon > 1$ der Nenner nicht mehr verschwinden kann, also keine Wendepunkte auftreten können, während für $\varepsilon < 1$ überall, wo $\cos(s/a) = \varepsilon$ ist, die Krümmung das Vorzeichen wechselt. Wir erhalten so zweierlei Formen, die den gestreckten und verschlungenen Trochoiden ähneln. Diese sind durch die Kurven in Fig. 133 und 134 gegeben. Indem man mit (29*) noch die Variation von θ und $y = \varrho \sin\theta$ betrachtet, ist eine Diskussion der Kurven auch in Rücksicht auf ihre Lage zur festen Geraden nicht schwierig. Wir unterlassen sie hier, da die Erzeugung selbst genug Anhaltspunkte bietet.

Zwischen den beiden Formen steht auch hier eine solche mit lauter Spitzen, allerdings eine ausgeartete. Denn für $\varepsilon = 1$ wird (29*) zu dem Kreise $\mathcal{R} = 2\,a$, den man sich nur unendlich oft nebeneinander gereiht zu denken

hat, um die in Rede stehende Zwischenform (samt ihrer Spiegelung an der festen Geraden) zu erhalten. Der Übergang von der Ellipse zur Hyperbel geschieht ja bei unserer Annahme, wo a konstant oder wenigstens endlich bleibt und ε sich verändert, nicht durch die Parabel, sondern durch eine unendlich flache Ellipse, also eine Strecke von der Länge $2a$, die in der Tat beim Abrollen ein System von aneinanderschließenden Halbkreisen erzeugt.

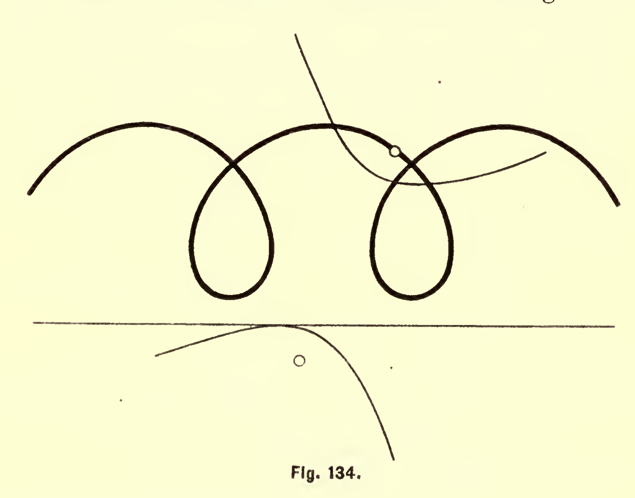


Fig. 134.

201. Es muß aber auch eine eigentliche Kurve geben, die als zwischen den beiden Arten von Delaunayschen Kurven stehend betrachtet werden kann, die Ortslinie des Brennpunktes einer abrollenden Parabel.

Um diesen Übergang zu bewerkstelligen, gehen wir am besten von (28) aus, das erste dort gegebene Integral benutzend. Wir dividieren Zähler und Nenner mit $a\sqrt{a}$, lassen a und b unendlich werden, so daß aber $\lim b^2/a = q$ (endlich) bleibt. Das Integral wird dann

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt{q}\int\frac{d\varrho}{\sqrt{2\varrho - q}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{q(2\varrho - q)},$$

und da aus (27) für unseren Fall

$$\mathcal{R} = -\varrho \tag{30}$$

folgt, so ist die natürliche Gleichung der fraglichen Kurve

$$\mathcal{R} = \frac{s^2}{p} + p\,, \tag{31}$$

wo wir nur $p = -\frac{1}{2} q$ gesetzt haben. Diese Kurve nennt man »Kettenlinie (Catenaria)«; denn in der analytischen Mechanik wird gezeigt, daß eine an zwei Enden aufgehängte homogene Kette (Faden) die Form dieser Linie annimmt[153]). Über die Form selbst ist zuvörderst zu bemerken, daß alle Kettenlinien ähnliche Kurven sind. Dies geht schon aus unserer Erzeugung hervor, da alle Parabeln ähnlich sind; man sieht es aber auch aus

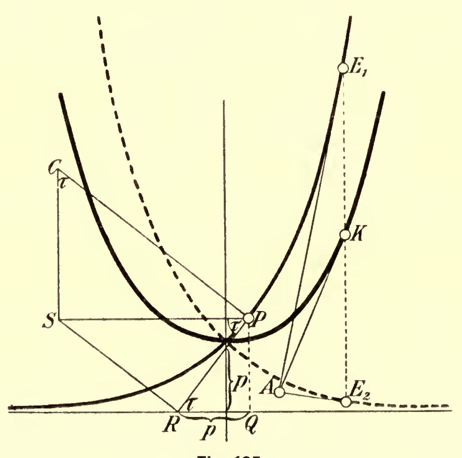


Fig. 135.

Gleichung (31), denn die Substitution $\mathcal{R} = \varkappa \mathcal{R}'$, $s = \varkappa s'$ ist mit der Substitution $p = p'/\varkappa$ gleichwertig. Die Bogen sind in (31) vom tiefsten Punkte aus gezählt, für den $\mathcal{R}$ das Minimum p hat. Für den Tangentenwinkel hat man $d\tau = \int ds/\mathcal{R}$, also wenn man im tiefsten Punkte $\tau = 0$ nimmt,

$$\tau = \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{p} \qquad \text{oder} \qquad s = p \operatorname{tg} \tau\,. \tag{32}$$

[153]) Galilei noch hielt die Kurve für eine Parabel. Die Frage wurde von. Jak. Bernoulli öffentlich aufgeworfen und fast gleichzeitig von Huygens, Leibniz und Joh. Bernoulli gelöst (Act. Erud. 1690 ff.).

Diese Eigenschaft charakterisiert die Kettenlinie, ebenso wie die durch Gleichung (30) gegebene. Aus ihr sieht man in Verbindung mit (31), daß mit wachsendem s nach beiderlei Richtung die Kurve immer flacher werdend sich schließlich senkrecht zur Tangente im Scheitel stellt (s. die stark ausgezogene Kurve in Fig. 135). Die Mannheimsche Kurve ist eine Parabel, deren Parameter $\frac{1}{4}$ des Parameters derjenigen Parabel ist, die der Erzeugung zugrunde liegt; ihre Achse steht senkrecht zu der Geraden, auf der man die Kettenlinie muß rollend denken (vgl. die Mannheimsche Kurve der Kreisevolvente in Nr. 162).

202. Auch die Gleichung der Kettenlinie in rechtwinkligen Koordinaten ist von einfacher Gestalt. Aus $dx = ds \cos\tau$ erhält man sofort

$$x = p \log \frac{s + \sqrt{s^2 + p^2}}{p} \qquad \text{oder} \qquad e^{\frac{x}{p}} = \frac{1}{p}\left(s + \sqrt{s^2 + p^2}\right),$$

aus $dy = ds \sin\tau$ ebenso

$$y = \sqrt{s^2 + p^2}\,.$$

Die Elimination von s bewerkstelligt man am einfachsten, indem man noch bildet

$$e^{-\frac{x}{p}} = \frac{1}{p}\left(-s + \sqrt{s^2 + p^2}\right),$$

wonach sich sofort

$$(33) \qquad y = \frac{p}{2}\left(e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}\right) = p \operatorname{ch} \frac{x}{p}$$

als kartesische Gleichung ergibt. Man erhält also eine Kettenlinie, wenn man zu den Ordinaten der beiden »Exponentialkurven« (»logarithmischen Linien«) $y = p\,e^{x/p}$ und $y = p\,e^{-x/p}$ das arithmetische Mittel nimmt (Fig. 135). Da für die Exponentialkurven die Subtangente (RQ) konstant und zwar gleich p ist, die Tangenten dreier entsprechenden Punkte E_1, E_2, K der beiden Exponentialkurven und der Kettenlinie aber durch einen Punkt A laufen, kann man an die Kettenlinie die Tangente ziehen, wenn etwa die Exponentialkurven gezeichnet vorliegen.

Zusätze. 1. Nach dem Obigen sind auch alle Exponentialkurven ähnlich. Man kann in der Tat jede Gleichung $y = a\,\beta^{x/b}$ auf die Form $y = a\,e^{x/p}$ und durch Parallelverschieben der y-Achse

auf die Form $y = p\, e^{x/p}$ bringen. Für den Krümmungsradius der Exponentialkurve erhält man $\mathcal{R} = p/\cos^2\tau \sin\tau = RP/\cos\tau \sin\tau = SP/\sin\tau = MP$, womit seine Konstruktion gegeben ist. Für die Fläche der Exponentialkurve zwischen der Asymptote (x-Achse) und zwei Ordinaten ergibt sich $\mathcal{F} = p(y - y_0)$, für die Fläche zwischen Kurve, Asymptote und einer Ordinate also $\mathcal{F}_0 = p\,y$. Da aber $\triangle PRQ = \frac{1}{2} p\, y$, so halbiert die Tangente PR immer die Fläche zwischen Kurve, Asymptote und Ordinate.

2. Die Fläche $\mathcal{F}_1$, die zwischen der Symmetrieachse der Kettenlinie und einer dazu Parallelen, der x-Achse und dem zugehörigen Bogen s liegt, ergibt sich als $\mathcal{F}_1 = p\, s$, wächst also proportional mit dem Bogen.

203. Indem wir uns vorbehalten, auf Kurven, die mit den »elliptischen und hyperbolischen Kettenlinien«, wie die Delaunayschen Kurven auch genannt wurden[154]), zusammenhängen, gleich nachher zurückzukommen, wollen wir hier noch einige, die von der gemeinen (parabolischen) Kettenlinie ausgehen, besprechen.

Zunächst seien einige Verallgemeinerungen der Kettenlinie besprochen. Diese teilen sich in zwei Familien. Die einen entsprechen einer Verallgemeinerung der kartesischen, die andern einer solchen der natürlichen Gleichung. Die Gleichung der Kettenlinie in rechtwinkligen Koordinaten ist eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $d^2y/dx^2 = y/p^2$. Die Kurven, die der allgemeinen Lösung dieser Differentialgleichung

$$y = a\, e^{x/p} + b\, e^{-x/p} \tag{34}$$

entsprechen, sind daher die nächstliegenden Verallgemeinerungen der Kettenlinie. Es sind das Kurven von geringem mathematischen Interesse. Sie finden aber im Baufache Anwendung und wurden »Klinoiden«[155]) (κλίνω, ich neige) genannt, im Falle $b = a$ $(\neq p)$ »Gewölbelinien«[156]). Über ihre Konstruktion und die der Tangente ist dasselbe zu sagen, wie oben bei der Kettenlinie. Die beiden zugrunde liegenden Exponentialkurven sind kongruent (mit der Subtangente p), nur ihre Lage zur y-Achse ist verschieden; sie schneiden auf dieser bzw. die Stücke a und b ab.

---

[154]) Von Lindelöf (Mém. Soc. Sc. Finl. 1863).

[155]) Heinzerling, Zeitschr. f. Bauwesen, 1869 u. 1872.

[156]) O. Schlömilch, *Übungsbuch zum Studium d. höh. Analysis*, I. Teil, 5. Aufl., Leipzig 1904, S. 116.

204. Vom mathematischen Standpunkte aus sind die durch Verallgemeinerung der natürlichen Gleichung der Kettenlinie entstehenden Kurven, wenn auch nur in morphologischer Hinsicht, beachtenswerter. Es ist an sich ja ohne weiteres zu erwarten, daß natürliche Gleichungen, wenn auch der einfachsten Art, Kurvenformen liefern, die von den gewohnten stark abweichen. Denn die natürliche Gleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in den kartesischen Koordinaten. Die Kurven, die solchen Differentialgleichungen entsprechen, sind aber noch recht wenig untersucht. Wir wollen nun zunächst sehen, welche Änderungen an der Gestalt der Kettenlinie dadurch hervorgebracht werden, daß wir die beiden in der Gleichung (31) vorkommenden Konstanten als verschieden annehmen.

Wir betrachten also Kurven von der natürlichen Gleichung

$$\mathcal{R} = \frac{s^2}{p} + q\,, \tag{35}$$

indem wir q verschiedene Werte erteilen, während wir p fest denken. Man unterscheidet dann sofort zwei wesentlich verschiedene Fälle, $q > 0$ und $q < 0$, zwischen denen $q = 0$ vermittelt. Betrachten wir zunächst die erste Möglichkeit, so ist es, auch der Formeln wegen, besser $q = \varkappa^2 p$ zu setzen, also die Gleichung (35) in der Form

$$\mathcal{R} = \frac{s^2}{p} + \varkappa^2 p \tag{35*}$$

zu schreiben. Dann erhält man

$$\tau = \frac{1}{\varkappa} \operatorname{arctg} \frac{s}{\varkappa p} \quad \text{oder} \quad s = \varkappa p \operatorname{tg}(\varkappa \tau)\,. \tag{36}$$

Für $s = \infty$ ist also $\tau = \pi/2\varkappa$. Wenn $\varkappa > 1$, so wird demnach unsere Kurve im Verhältnis zur Kettenlinie immer flacher, indem sie ihre beiden symmetrischen Zweige allmählich die Richtungen $\pm\pi/2\varkappa$ annehmen läßt, ohne daß sie aber in diesen Richtungen Asymptoten hätte, wie ja auch die Kettenlinie selbst keine besitzt. Für diese kann es aus der kartesischen Gleichung gefolgert werden, während letztere bei den allgemeineren Kurven in endlicher

Form nicht aufgestellt werden kann. Da aber $\mathcal{R} = \varkappa^2 p / \cos^2 \varkappa\tau$, so hat man die Parameterdarstellung

$$(37) \qquad x = \varkappa^2 p \int_0^\tau \frac{\cos\tau\, d\tau}{\cos^2 \varkappa\tau}, \quad y = \varkappa^2 p \int_0^\tau \frac{\sin\tau\, d\tau}{\cos^2 \varkappa\tau}.$$

Wenn nun die Kurve eine Asymptote hat, so bleibt das Lot $g = x \sin\tau - y \cos\tau$ vom Anfangspunkt auf die Tangente in (x, y) für den entsprechenden Grenzwert von τ, hier $\pi/2\varkappa$ endlich. Wir haben also zu untersuchen, ob das Integral

$$g = \varkappa^2 p \int_0^{\pi/2\varkappa} \frac{\sin(\pi/2\varkappa - \tau)\, d\tau}{\cos^2 \varkappa\tau} = -\varkappa^2 p \int_{\pi/2\varkappa}^0 \frac{\sin\tau'\, d\tau'}{\sin^2 \varkappa\tau'}$$

einen endlichen Wert hat. In der letzteren Form wird ja die Funktion unter dem Integralzeichen an der Grenze $\tau' = 0$ unendlich. Das würde noch nicht beweisen, daß g selbst unendlich ist. Setzen wir aber statt der Sinus die Reihenentwicklungen ein, so sehen wir, daß sich an der Stelle $\tau' = 0$ g verhält wie $\int (1/\tau')\, d\tau'$, also wie $\log\tau'$. Aus diesem Grunde ist das Lot g unendlich und es existiert keine Asymptote, auch nicht für $\varkappa < 1$.

205. Sehen wir nun zu, welche Gestalt die Kurve für $\varkappa < 1$ annimmt. Da jetzt $\pi/2\varkappa > \frac{1}{2}\pi$, so erhellt, daß sich die Zweige der Kettenlinie gegeneinander biegen und sich also, wenn $\varkappa$ auch noch so wenig von 1 verschieden ist, schneiden müssen [Fig. 136 (*a*)]. Bei kleiner werdendem $\varkappa$ biegen sich die Zweige immer mehr herum, bis sie sich, sobald der Wert $\varkappa = \frac{1}{3}$ überschritten ist, auf der anderen Seite des Anfangspunktes nochmals schneiden [Fig. 136 (*b*)]. Vom Anfangspunkt in einer Richtung ausgehend, trifft man jetzt die Kurve zweimal; allgemeiner $(n-1)$-mal, wenn $1/n > \varkappa > 1/(n+1)$. Da auch der Anfangswert von $\mathcal{R}$ immer kleiner wird, nimmt der Anfangspunkt immer mehr den Charakter eines doppelten asymptotischen Punktes an, zu dem er für $\varkappa = 0$ wird (Fig. 137). Die betreffende Kurve

$$(38) \qquad \mathcal{R} = s^2/p$$

müssen wir einen Augenblick für sich betrachten. Sie wurde schon von K. C. F. Krause unter dem Namen

»curva antiloga« aufgestellt[157]). Wir heißen sie kürzer »Antiloga«. Da man hier τ nicht vom Anfangspunkt ($s = 0$) aus rechnen kann, setzen wir

$$\tau = p\int_s^{s_0} \frac{ds}{s^2} = \frac{p}{s\,s_0}(s_0 - s)\,.$$

Hieraus ersieht man, daß s_0 zwar nicht Null, aber unendlich groß genommen werden kann, so daß

$$\tau = p\int_s^{\infty} \frac{ds}{s^2} = \frac{p}{s}$$

wird. Die Kurve hat also zwar im Anfangspunkt einen asymptotischen Punkt, geht aber in einer bestimmten

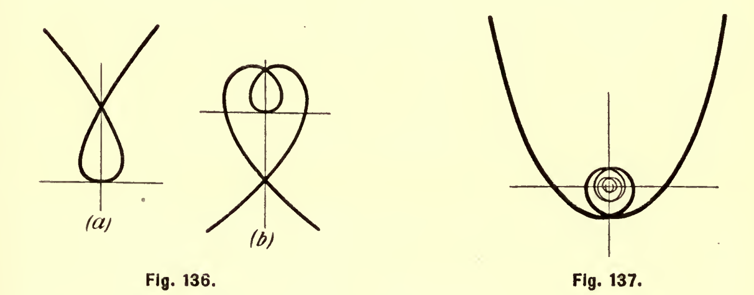


Fig. 136. Fig. 137.

Richtung ins Unendliche, nicht, wie etwa die logarithmische Spirale, in unendlich vielen Windungen. Wie die beiden Zweige, aus denen man sich die ganze Kurve zusammengesetzt denken muß, gegeneinander liegen, darüber gibt die natürliche Gleichung keinen Aufschluß. Eine Asymptote hat auch diese Kurve nicht, ebensowenig wie die folgenden, die negativen Werten von q entsprechen. Dies nach dem obigen Muster nachzuweisen, überlassen wir dem Leser.

206. Wir setzen nun in Gleichung (35) $q = -\varkappa^2 p$, betrachten also die Kurven mit der Gleichung

(39) $$\mathcal{R} = \frac{s^2}{p} - \varkappa^2 p\,.$$

---

[157]) *Novae theoriae linearum curvarum etc.* (Monachii 1835), S. 88.

Hier ist für $s = 0$ zunächst $\mathcal{R}$ negativ, wird immer kleiner, bis die Krümmung für $s = \pm \varkappa p$ unendlich groß wird, von da ab wird $\mathcal{R}$ positiv und wächst mit s ins Unendliche. Ob an den Stellen $\mathcal{R} = 0$ Spitzen oder asymptotische Punkte sind, wird durch den Verlauf von τ entschieden. Wir haben nun erstens für $|s| < \varkappa p$

$$\tau = p \int_0^s \frac{ds}{s^2 - \varkappa^2 p^2} = \frac{1}{2\varkappa} \log \frac{\varkappa p - s}{\varkappa p + s}. \tag{40}$$

Also wird τ an den Stellen $s = \pm \varkappa p$ unendlich und die Kurve besteht zunächst aus einem symmetrischen Zweig, der an seinen beiden Enden asymptotische Punkte trägt. Die Gesamtlänge dieses Zweiges ist $2 \varkappa p$. Für die hier anschließenden Zweige, die den beiden Zweigen der Kurve (38) entsprechen, können wir τ nicht nach (40) weiterzählen. Wir setzen zweitens für $|s| > \varkappa p$

$$\tau = p \int_s^\infty \frac{ds}{s^2 - \varkappa^2 p^2} = \frac{1}{2\varkappa} \log \frac{s + \varkappa p}{s - \varkappa p} \tag{40*}$$

und sehen daraus, daß diese Zweige an den ersten ebenfalls mit asymptotischen Punkten anschließen und je größer s wird, desto mehr wie die der Antiloga sich gestalten. Die Richtung der unendlichen Äste gegen die Scheiteltangente des ersten Zweiges kann aber nicht angegeben werden. Die Kurven, die durch Gleichung (39) dargestellt werden, haben etwa die Gestalt der Fig. 138. Sie wurden von E. Cesàro »Pseudokatenarien« genannt.

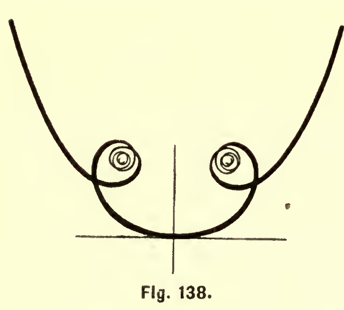


Fig. 138.

Bem. Aus den Gleichungen (39) und (40) ergibt sich die Parameterdarstellung

$$s = -\varkappa p \frac{e^{\varkappa\tau} - e^{-\varkappa\tau}}{e^{\varkappa\tau} + e^{-\varkappa\tau}}, \qquad \mathcal{R} = -\frac{4\varkappa^2 p}{(e^{\varkappa\tau} + e^{-\varkappa\tau})^2}.$$

Demnach haben die asymptotischen Punkte in bezug auf das Koordinatensystem der Scheiteltangente und -Normale die Koordinaten

$$x_0 = \pm 4\,\varkappa^2 p \int_0^\infty \frac{\cos\tau\, d\tau}{(e^{\varkappa\tau} + e^{-\varkappa\tau})^2}\,, \qquad y_0 = 4\,\varkappa^2 p \int_0^\infty \frac{\sin\tau\, d\tau}{(e^{\varkappa\tau} + e^{-\varkappa\tau})^2}\,.$$

Der Wert von x_0 ist $\pm p\,\pi/2\,\mathrm{sh}(\pi/2\,\varkappa)$, während das zweite Integral sich nicht in geschlossener, endlicher Form angeben läßt[158]).

207. Die Evoluten der Kettenlinien lassen wir beiseite; die Evolventen aber bieten Interesse. Wir stellen sie der Allgemeinheit wegen für Gleichung (35) auf. Sind $\overline{\mathcal{R}}$ und $\bar{s}$ die Elemente der Evolvente, so ist bekanntlich, wenn wir die Abwicklung immer im Scheitel der Kettenlinie beginnen $\overline{\mathcal{R}} = s$, $d\bar{s} = s\,ds/\mathcal{R}$. Dies ergibt, für $\mathcal{R} = s^2/p + q$, $\bar{s} = \frac{1}{2}p\,\{\log(s^2 + p\,q) - \log p\,q\}$. Löst man diese Gleichung nach $s (= \overline{\mathcal{R}})$ auf, so ergibt sich, wenn die Striche an den Koordinaten wieder weggelassen werden

Fig. 139.

(41) $$\mathcal{R} = \sqrt{p\,q\,(e^{2s/p} - 1)}$$

als natürliche Gleichung der gesuchten Evolventen. Es ist offenbar, daß auch hier die Fälle $q > 0$, $q < 0$, die durch $q = 0$ ineinander übergehen, wesentlich voneinander verschieden sind. Es sei zunächst wieder $q = \varkappa^2 p$. Dann erhält man

(41*) $$\varkappa\,\tau = \mathrm{arctg}\sqrt{e^{2s/p} - 1}\,,$$

also die Parameterdarstellung

(41†) $$s = \tfrac{1}{2}\,p\log(1 + \mathrm{tg}^2\varkappa\,\tau)\,, \qquad \mathcal{R} = \varkappa\,p\,\mathrm{tg}\,\varkappa\,\tau\,.$$

Der Krümmungsradius ist im Scheitel der Kettenlinie 0, die Evolvente setzt mit einer Spitze an. In bezug auf

[158]) E. Cesàro hat (S. 17 seines Buches) auch für das zweite Integral einen elementaren Ausdruck angegeben, der aber nach den Bemerkungen von M. Lerch u. W. Kapteyn im Int. math. **14**, 1907, 155/9 unrichtig sein muß. Dort ist auch die Berechnung des ersten Integrales erläutert.

die Tangente dieser Spitze sind die Winkel τ gerechnet. $\mathcal{R}$ wird dann größer und größer und mit s unendlich für $\tau_0 = \pi/2\varkappa$. Diese Richtung ist zur Richtung der unendlichen Äste der Grundkurve natürlich senkrecht, da ja das Koordinatensystem um $\frac{1}{2}\pi$ gedreht ist. Wir müssen aber wieder untersuchen, ob auch die Evolventen keine Asymptoten haben. Wir erhalten für die Subtangente der unendlich fernen Punkte

$$g = \varkappa p \int_0^{\pi/2\varkappa} \operatorname{tg} \varkappa \tau \sin\left(\frac{\pi}{2\varkappa} - \tau\right) d\tau = \varkappa p \int_0^{\pi/2\varkappa} \operatorname{ctg} \varkappa \psi \sin \psi \, d\psi .$$

Das letztere Integral ist aber sicher auch in der Nähe der unteren Grenze endlich; denn es ist ja $\lim_{\psi=0} \operatorname{ctg} \varkappa \psi \sin \psi = 1/\varkappa$, also selbst endlich. Im Gegensatz zur Grundkurve haben also unsere Evolventen Asymptoten.

208. Für die Evolvente der gemeinen Kettenlinie ($\varkappa = 1$) wird $g = p$. Da außerdem $\tau_0 = \frac{1}{2}\pi$, fallen beide Asymptoten in die Gerade, die bei der kartesischen Gleichung der Kettenlinie als x-Achse benutzt wurde, die sogenannte »Direktrix« der Kettenlinie. Diese ist Wendeasymptote für die Evolvente (vgl. Fig. 140). Da ferner für diese nach ($41^\dagger$) $\mathcal{R} = p \operatorname{tg} \tau$, so muß der Abschnitt auf jeder Tangente vom Berührungspunkte bis zur Asymptote (PR) gleich p sein. In bezug auf das Koordinatensystem der Kettenlinie ist also die »Tangente« der Evolvente konstant. *Diese Kurve ist demnach der Ort eines schweren Punktes P, der an einem Faden von der Länge p gezogen wird, wenn das andere Ende R dieses Fadens eine Gerade durchläuft.* Daher wurde sie »Traktorie (der Geraden)« oder kurz »Traktrix« (traho, ich ziehe) genannt[159]. Aus diesen Eigenschaften kann auch sofort eine Parameterdarstellung in rechtwinkligen Koordinaten und damit die kartesische Gleichung abgeleitet werden. Man erhält aber aus ($41^\dagger$) direkt für die allgemeineren Kurven

$$(42) \qquad x = \varkappa p \int_0^{\tau} \operatorname{tg} \varkappa \tau \cos \tau \, d\tau , \qquad y = \varkappa p \int_0^{\tau} \operatorname{tg} \varkappa \tau \sin \tau \, d\tau ,$$

---

[159]) Leibniz, Huygens 1693.

also für die Traktrix ($\varkappa = 1$)

(43) $x = p(1 - \cos\tau)$, $y = p \log \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\tau) - p \sin\tau$.

Will man das Achsenkreuz der Kettenlinie zugrunde legen, so ist x durch $p - y$, y durch x zu ersetzen. Auf dieses System bezogen lautet die kartesische Gleichung der Traktrix

(43*) $$x = p \log \frac{p - \sqrt{p^2 - y^2}}{y} - \sqrt{p^2 - y^2}.$$

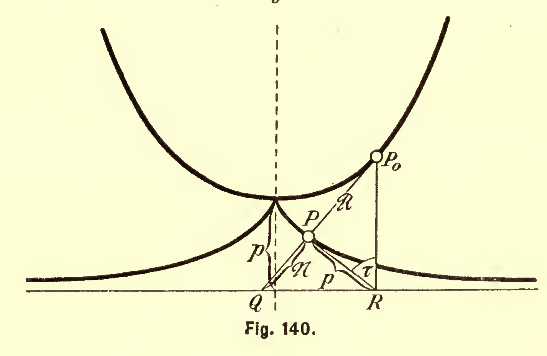


Fig. 140.

Zusatz. Aus dem in Fig. 140 gegebenen Zusammenhang zwischen Kettenlinie und Traktrix folgt eine sehr einfache Konstruktion der Tangente an erstere, die der Leser sich selbst formulieren mag. Für letztere ist sie selbstverständlich.

209. Die bisherigen Betrachtungen galten nur für $q > 0$. Mit immer kleiner werdendem $\varkappa$ machen auch die Evolventen, wie die Grundkurven, immer mehr Windungen um den Anfangspunkt. Dieser muß also auch für die Hauptevolvente der Antiloga mit der Gleichung $\mathfrak{R} = s^2/p$ ein doppelter asymptotischer Punkt sein. Man erhält $d\bar{s} = p\, s\, ds/s^2$, also, wenn man mit s nicht kürzt, $\bar{s} = \frac{1}{2} p \log(s^2/p^2)$ und als Gleichung der Evolvente

(44) $$\overline{\mathfrak{R}} = \pm p\, e^{\bar{s}/p} \qquad \left[= p\sqrt{e^{2\bar{s}/p}}\right].$$

Diese zerfällt also hier in zwei kongruente Kurven. Rechnen wir τ wieder von der Tangente des unendlich fernen Punktes aus, so ergibt sich

$$\tau = \frac{1}{p}\int\limits_s^\infty \frac{ds}{e^{s/p}} = e^{-s/p} = \frac{p}{\mathfrak{R}},$$

wo wir die Striche an $\mathcal{R}$ und s wieder weggelassen haben. Der Abstand g des asymptotischen Punktes von der Tangente im unendlich fernen Punkte ist nichts anderes als die y-Koordinate, also

$$g = p\int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau = \tfrac{1}{2}\,p\,\pi\,^{160)}\,.$$

Diese Tangente ist also Asymptote der Spirale (44), die in Fig. 141 dargestellt ist.

Fig. 141.

Wir haben nun in Gleichung (41) noch $q = -\varkappa^2 p$ zu zetzen. Die entstehenden Kurven, die Evolventen der Pseudokatenarien, wenn die Abwicklung im Scheitel begonnen wird, heißen nach E. Cesàro »Pseudotraktrizen«. Ihre Gleichung ist

$$\mathcal{R} = \varkappa\,p\sqrt{1 - e^{2s/p}}\,. \tag{45}$$

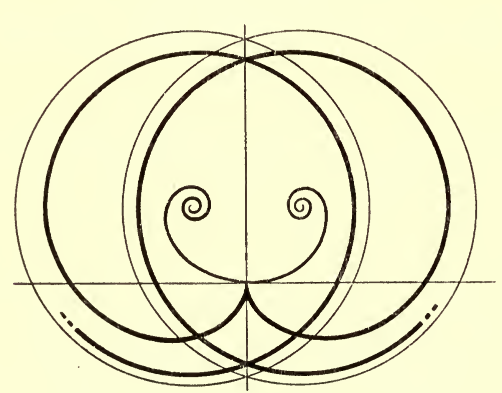


Fig. 142.

Wir sehen daraus für negative s den Krümmungsradius $\mathcal{R}$ wachsen von $\mathcal{R} = 0$ an (Spitze) bei $s = 0$ bis $\mathcal{R} = \varkappa p$ bei $s = -\infty$. Hieraus und aus der Gestalt der Grundkurve, die am Ende des Bogens von der Länge $\varkappa p$ einen asymptotischen Punkt trägt, ersieht man, daß die Pseudo-

[160]) S. Cesàro, *Alg. Analysis*, Leipzig 1904, S. 699, 725, 736, 740 oder Lejeune-Dirichlet, *Vorlesungen über best. Integrale*, Braunschweig 1904, S. 194.

traktrix einen asymptotischen Kreis um diesen Punkt vom Radius $\varkappa p$ hat, dem sich die Kurve von innen nähert. Da sie außerdem symmetrisch ist in bezug auf die Spitzentangente, hat sie die Gestalt von Fig. 142. Über die asymptotischen Punkte der Grundkurve hinaus können wir die Abwicklung nicht fortsetzen. Die Pseudotraktrix entspricht also als Evolvente nur dem im Endlichen liegenden Teil der Pseudokatenarie. Gleichung (45) stellt auch weiter keine Zweige dar. Auf Evolventen, die in anderen Punkten beginnen, können wir nicht eingehen. Auch die Aufstellung von τ im vorliegenden Falle überlassen wir dem Leser.

210. Wir knüpfen nun nochmals an die Traktrix an. Verlängern wir in Fig. 140 den Krümmungsradius $P_0 P = \mathcal{R}$ bis zur Direktrix (Asymptote) um das Stück $PQ = \mathcal{N}$, die »Normale« der Traktrix in bezug auf die Leitlinie als x-Achse, so sehen wir, daß für alle Punkte der Traktrix das Produkt aus Krümmungsradius und Normale einen konstanten Wert hat, und zwar ist, wenn wir die Vorzeichen der Strecken berücksichtigen,

$$(46) \qquad \mathcal{R} \cdot \mathcal{N} = -p^2 \, (=\text{konst.}) \, .$$

Diese Gleichung charakterisiert jedoch keineswegs die Traktrix. Vielmehr definiert sie eine ganze Familie von Kurven, die in der Flächentheorie von großer Wichtigkeit sind. Denn lassen wir eine Kurve, die der Bedingung (46) genügt, um ihre Leitlinie rotieren, so erhalten wir eine Rotationsfläche von konstanter Krümmung. Diese Flächen haben besonders Beltrami dazu gedient, die elliptische und hyperbolische Geometrie der Ebene zu versinnlichen[161]). Sie unterscheiden sich nach dem Vorzeichen der Konstanten auf der rechten Seite von (46). Ist diese positiv, so entspricht die Geometrie auf der Fläche der elliptischen Geometrie; als Typus dieser Art Flächen gilt die Kugel. Ist das Vorzeichen wie bei der Traktrix negativ, so bieten die Flächen ein Bild der hyperbolischen Ebene; als Typus gilt die Traktrixfläche, die infolgedessen auch »Pseudosphäre« genannt wird. Wir werden aber gleich sehen, daß Kreis und Traktrix eigentlich keine Typen der Kurven (46), sondern nur Grenzfälle sind.

[161]) Giorn. di mat. **4**, 1866; **6**, 1868.

Von den Kurven (46) bekommen wir sofort eine deutlichere Vorstellung, wenn wir bemerken, daß unter ihren Parallelkurven Delaunaysche Kurven sind. In der Tat, wenn wir in der Definitionsgleichung (27) der letzteren, wo ja ϱ mit der jetzt durch $\mathcal{N}$ bezeichneten Größe identisch ist, $\mathcal{R}$ durch $\mathcal{R}+a$, ϱ durch $\mathcal{N}+a$ ersetzen, so ergibt sich $\mathcal{R}\mathcal{N}=a^2$. Vergrößern wir in dieser Gleichung aber nochmals $\mathcal{R}$ und $\mathcal{N}$ je um a, so erhält man $1/\mathcal{R}+1/\mathcal{N}=-1/a$, also eine der ersten kongruente Delaunaysche Kurve. Demnach verläuft in der Mitte zwischen zwei kongruenten, im Abstande $2a$ parallelen Delaunayschen Kurven eine Kurve von der Art (46), allerdings mit positiver Konstante. Wir brauchen aber nur $a = pi$ zu setzen, um die zweite Gattung von Kurven der Art (46) zu erhalten. Deren zugehörige Delaunaysche Kurven sind allerdings imaginär. Hierüber unten Näheres.

Bem. Es ist jedenfalls bezeichnend, daß die Oberfläche der Pseudosphäre $\mathcal{F}=4p^2\pi$ und das Volumen $V=\frac{4}{3}p^3\pi$ ist, beide Werte also mit den entsprechenden einer Kugel vom Radius p übereinstimmen. Die Fläche der Traktrix zwischen der Kurve und der Asymptote ist $\frac{1}{2}p^2\pi$.

211. Um die natürliche Gleichung der Kurvenfamilie aufzustellen, für welche $\mathcal{R}\mathcal{N}=a^2$ ist, wollen wir die unentwickelte Gleichung (29) der Delaunayschen Kurven benutzen und die Parallelkurve im Abstande a bestimmen. Da für die neue Kurve $\mathcal{R}'=\mathcal{R}-c$, $s'=s-c\tau$ ist, wenn wir vorderhand den willkürlichen Abstand c nehmen, so hat man, wenn außerdem anstatt (29) zuerst allgemein $s=\int f(\mathcal{R})\,d\mathcal{R}$ gesetzt wird, $\tau=\int f(\mathcal{R})\,d\mathcal{R}/\mathcal{R}$, also $s'=\int(\mathcal{R}-c)f(\mathcal{R})\,d\mathcal{R}/\mathcal{R}$ oder schließlich

$$s'=\int \mathcal{R}'f(\mathcal{R}'+c)\,d\mathcal{R}'/(\mathcal{R}'+c),$$

also in unserem Falle, unter Weglassung der Striche

$$s=\int\frac{a\,b\,\mathcal{R}\,d\mathcal{R}}{(\mathcal{R}+c)(\mathcal{R}+c-2a)\sqrt{(\mathcal{R}+c-a)^2\varepsilon^2-a^2}}.$$

Hieraus geht für $c=2a$ wirklich wieder (29) selbst hervor, wenn man nur $-a$ statt a setzt. Für $c=a$ aber erhalten wir

$$s=\int\frac{a\,b\,\mathcal{R}\,d\mathcal{R}}{(\mathcal{R}^2-a^2)\sqrt{\mathcal{R}^2\varepsilon^2-a^2}}.$$

Wertet man dieses Integral aus und löst nach $\mathcal{R}$ auf, so ergibt sich als natürliche Gleichung der gesuchten Kurven nach einiger Rechnung

(47) $$\mathcal{R} = \frac{a}{\varepsilon}\sqrt{1 + (1 - \varepsilon^2)\,\mathrm{tg}^2\frac{s}{a}}\,,$$

wobei $\varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ gesetzt ist. Insbesondere wegen derjenigen Kurven dieser Art, für welche die parallelen Delaunayschen Kurven nicht reell sind, müssen wir auch den Tangentenwinkel τ aufstellen. Es kommt

$$\tau = \frac{\varepsilon}{a}\int\frac{ds\cos(s/a)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2(s/a)}} = \arcsin\left(\varepsilon\sin\frac{s}{a}\right)$$

oder

(48) $$\sin\tau = \varepsilon\sin(s/a)\,.$$

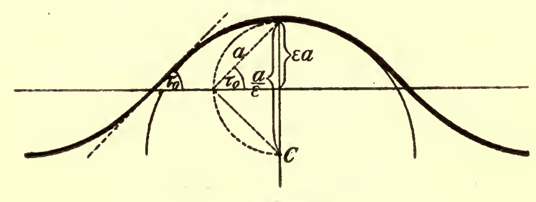


Fig. 143.

Hier sind offenbar die beiden Fälle $\varepsilon < 1$, $\varepsilon > 1$ zu unterscheiden. Zwischen beiden liegt $\varepsilon = 1$, das dem Kreise $\mathcal{R} = a$ entspricht. Für $\varepsilon < 1$ kann $\mathcal{R}$ nie Null werden. Es hat einen Minimalwert für $s = 0$ $(\tau = 0)$, nämlich $\mathcal{R} = a/\varepsilon$; die zugehörige Normale ist dann $\mathcal{N} = \varepsilon a$. Das ist zugleich der Abstand des Punktes von der Direktrix (vgl. Fig. 143). Für $s = \pm\frac{1}{2}a\pi$ wird $\mathcal{R} = \infty$, $n = 0$, $\sin\tau_0 = \pm\varepsilon$. Die Kurve schneidet also die Direktrix und setzt sich dann auf der anderen Seite mit einem kongruenten Bogen fort. Im Schnittpunkt ist eine Inflexion. Die Figur zeigt, wie man den Winkel τ_0 erhält. Je mehr sich ε der Einheit nähert, desto steiler wird der Durchschnitt. Für $\varepsilon = 1$ wird $\tau_0 = \frac{1}{2}\pi$, die einzelnen Bögen der Kurve gehen in Halbkreise über. Denkt man sich die fehlende Reihe der Halbkreise ergänzt [Fig. 144 (a)] und trennt die Kreise jetzt durch die Direktrix in zwei Reihen von Halbkreisen

[Fig. 144 (b)], so stellt eine solche Reihe den Übergang zu $\varepsilon > 1$ vor.

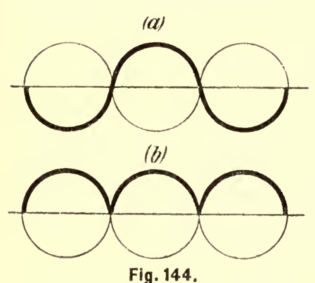


Fig. 144.

In diesem Falle ist der Wert $\mathcal{R} = a/\varepsilon$ für $s = 0$ $(\tau = 0)$ ein Maximum. Die Bogenlänge s kann wegen (48) hier nur bis zu dem Wert s_0 gehen, für welchen

$$\sin(s_0/a) = \pm 1/\varepsilon$$

ist. Dann ist

$$\operatorname{tg}(s_0/a) = 1/\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

und demnach $\mathcal{R}_0 = 0$, sowie $\tau_0 = \pm \frac{1}{2}\pi$. Diese Punkte sind also Spitzen. Ihre Entfernung q von der Direktrix ist $q = \lim \mathcal{N} \cos\tau$ für $\tau = \tau_0$. Nun ist aber $\mathcal{N} \cos\tau = \varepsilon\, a \cos(s/a)$, also in der Grenze $q = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ (vgl. Fig. 145). Wir sehen so, daß

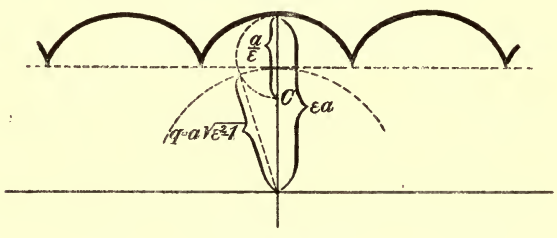


Fig. 145.

die Gerade, welche alle Spitzen enthält, für größer werdendes ε immer weiter von der Direktrix abrückt.

212. Um nun die zweite Gattung der Kurven von der Art (46), d. h. diejenigen, die durch Gleichung (46) selbst dargestellt werden, zu erhalten, setzen wir in (47) $a = p\, i$. Da $i \operatorname{tg}(s/p\, i) = \operatorname{th}(s/p)$ (vgl. Nr. 152), so lautet die natürliche Gleichung dieser Kurven zunächst

$$(49) \qquad \mathcal{R} = \frac{p}{\varepsilon}\sqrt{(1 - \varepsilon^2)\operatorname{th}^2(s/p) - 1}\,.$$

Hier muß ε jedenfalls < 1 sein. Da aber $\operatorname{th}(s/p)$ für reelle s ebenfalls < 1 ist, so wird bei dieser Zählung der Bogen $\mathcal{R}$ nur für imaginäre s reell. Wir setzen daher

$s/p = \frac{1}{2} i \pi - \bar{s}/p$, dann wird $\operatorname{th}(s/p) = -\operatorname{cth}(\bar{s}/p)$ und die Gleichung

(49*) $$\mathcal{R} = \frac{p}{\varepsilon} \sqrt{(1-\varepsilon^2)\operatorname{cth}^2(\bar{s}/p) - 1}\,.$$

Außerdem ist

(50) $$\sin\tau = \varepsilon \operatorname{ch}(\bar{s}/p)\,, \qquad q = p\sqrt{1-\varepsilon^2}\,.$$

So sehen wir, daß die Kurve für $\bar{s} = 0$ mit einem Wendepunkte ($\mathcal{R} = \infty$) auf der Direktrix beginnt, τ aber im Gegensatz zu der ersten Art der vorigen Gattung mit $\bar{s}$ wächst bis $\frac{1}{2}\pi$, wo $\operatorname{ch}(\bar{s}_0/p) = 1/\varepsilon$, $\operatorname{cth}(\bar{s}_0/p) = 1/\sqrt{1-\varepsilon^2}$ $[\bar{s}_0 = p \log(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})/\varepsilon]$, also $\mathcal{R}_0 = 0$ ist. Dort ist demnach eine Spitze mit der Entfernung $q = p\sqrt{1-\varepsilon^2}$ von der Direktrix. Die Wiederholung dieses Zuges gibt die ganze Kurve. Die Richtung der Wendetangente ist durch $\sin\tau = \varepsilon$ gegeben (vgl. Fig. 146).

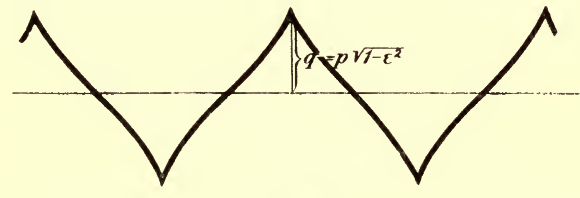


Fig. 146.

Wird ε kleiner und kleiner, so durchsetzt die Kurve die Gerade immer schräger; die von einer Spitze ausgehenden Züge nähern sich immer mehr der Traktrix. In diese geht die Kurve über für $\varepsilon = 0$. Wiewohl es einige Mühe macht, ist es interessant genug, diesen Übergang an der Gleichung (49*) wirklich auszuführen. Vor allem müssen wir auf die Spitze als Anfangspunkt transformieren, also $\bar{s} = s - \bar{s}_0$ setzen. Wird dann cth durch die Exponentialfunktionen ersetzt, ε in die Wurzel und alles auf einen Nenner gebracht, so ergibt sich schließlich ein Ausdruck der Art

$$\mathcal{R} = p\sqrt{\frac{4\,e^{-2s/p}\left(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^2 - \left\{e^{-2s/p}\left(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^2 + \varepsilon^2\right\}^2}{\left\{e^{-2s/p}\left(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)^2 - \varepsilon^2\right\}^2}}\,,$$

der für $\varepsilon = 0$ wirklich in $\mathcal{R} = p\sqrt{e^{2s/p} - 1}$ übergeht.

213. Ein negatives ε kommt nicht in Betracht, würde auch die Gleichung (49) nicht ändern. Aber ε^2 kann negativ werden, ε also rein imaginär. Dann wird aus (49), wenn wir $\varepsilon = i\acute{\varepsilon}$ setzen,

$$\mathcal{R} = \frac{p}{\acute{\varepsilon}}\sqrt{1-(1+\acute{\varepsilon}^2)\,\mathrm{th}^2(s/p)}\,. \tag{51}$$

Diese Gleichung ist, wie sie vorliegt, brauchbar und stellt reelle Kurven dar. Es ist

$$\sin\tau = \acute{\varepsilon}\,\mathrm{sh}(s/p)\,,\qquad q = p\sqrt{1+\acute{\varepsilon}^2}\,. \tag{52}$$

Demnach beginnt die Kurve mit $s = 0$, $\mathcal{R} = p/\acute{\varepsilon}$ $(\tau = 0)$ im Abstande $|\mathcal{N}| = \acute{\varepsilon}p$ von der Direktrix und während τ absolut genommen nach beiden Seiten wächst, nimmt $\mathcal{R}$ bis zu 0 ab für $\sin\tau_0 = 1$ $(\tau = \frac{1}{2}\pi)$, $\mathrm{sh}(s_0/p) = 1/\acute{\varepsilon}$, $\mathrm{th}(s_0/p) = 1/\sqrt{1+\acute{\varepsilon}^2}$ $\left[s_0 = p\log\left(1+\sqrt{1+\acute{\varepsilon}^2}\right)/\acute{\varepsilon}\right]$. Dort sind Spitzen in der Entfernung $q = p\sqrt{1+\acute{\varepsilon}^2}$ von der Leitlinie (Fig. 147). Der absolute Wert von $\acute{\varepsilon}$ unterliegt keiner Beschränkung.

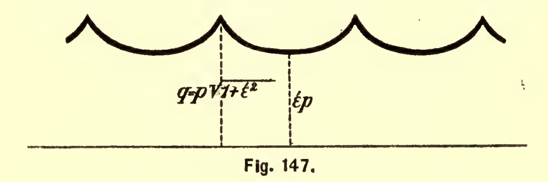


Fig. 147.

Noch ein Wort über die imaginären Delaunayschen Kurven, die im Abstande $\pm p i$ parallel zu den Kurven laufen, die der Bedingung $\mathcal{R}\cdot\mathcal{N} = -p^2$ genügen. Sie werden erzeugt durch die Brennpunkte eines auf einer Geraden abrollenden Kegelschnittes, dessen eine Achse $a = p i$ ist. Die andere ist $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Nun ist entweder ε reell und < 1, also auch b rein imaginär, aber dem absoluten Werte nach kleiner als a; oder es ist $\varepsilon = i\acute{\varepsilon}$, dann ist auch b rein imaginär, aber absolut genommen größer als a. Der rollende Kegelschnitt ist also in jedem Falle eine imaginäre Ellipse.

214. Den Kurven $\mathcal{R}\cdot\mathcal{N} =$ konst. sind die Kurven analog, für welche das Verhältnis des Krümmungsradius und der Normalen $\mathcal{R}/\mathcal{N} =$ konst. ist, bei welchen also der Krümmungsradius von einer festen Geraden in einem kon-

stanten Verhältnis geteilt wird. Die Frage nach solchen Kurven wurde zuerst von JOH. BERNOULLI (1716) gestellt; man nennt sie aber heute »Ribaucoursche Kurven«[162]), wiewohl BERNOULLI sie schon klassifiziert hatte. Wir erhalten sie als Rollkurven aus den Sinusspiralen (Nr. 92). Eine solche Kurve rolle auf einer Geraden G; wir suchen den Ort des Poles P derselben (Fig. 148). Für die Sinusspirale ist $\mathcal{R}_p : \varrho = 1 : (n+1)$, außerdem zeigt die Figur, daß $y : \varrho = \mathcal{R}_p : \mathcal{R}$, also hat man zunächst

$$(53) \qquad (n+1)\,\mathcal{R}\, y = \varrho^2 .$$

Fig. 148.

Da hier $\mathcal{Q} = \mathcal{R}$, so gibt die Gleichung (9) von Nr. 127 für den Krümmungsradius $\overline{\mathcal{R}}$ des Ortes von P ohne weiteres

$$(54) \qquad \overline{\mathcal{R}} = \frac{n+1}{n}\,\varrho ,$$

und somit ist dieser Ort nach der obigen Definition eine Ribaucoursche Kurve[163]). Um die natürliche Gleichung aufzustellen, müssen wir noch $\bar{s} = \int \varrho\, ds / \mathcal{R}$ durch ϱ und also durch $\overline{\mathcal{R}}$ ausdrücken. Mit Benutzung der natürlichen Gleichung der Sinusspiralen [S. 135 (9)] ergibt sich zunächst

$$(55) \qquad s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{\varrho\, d\mathcal{R}}{\mathcal{R}\sqrt{\left(\frac{n+1}{a}\mathcal{R}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}} .$$

---

[162]) RIBAUCOUR, Mém. Ac. Belg. **44**, 1880.
[163]) O. BONNET, Journ. de math. (1) **9**, 1844, 97—112.

Nun ist aus (53) $\varrho = (n+1)\mathcal{R}\sin\mu$, woraus wegen der Polarkoordinatengleichung der Sinusspiralen $(n+1)\mathcal{R} = a^n \varrho^{1-n}$ folgt. Mit Anwendung von (54) ergibt sich so

$$\mathcal{R} = a^n n^{1-n}(n+1)^{n-2}\overline{\mathcal{R}}^{1-n},$$
$$d\mathcal{R} = (1-n)\, a^n n^{1-n}(n+1)^{n-2}\overline{\mathcal{R}}^{-n} d\overline{\mathcal{R}}$$

und hieraus nach einiger Rechnung

$$\bar{s} = -n\int \frac{d\overline{\mathcal{R}}}{\sqrt{\left(\frac{n\overline{\mathcal{R}}}{(n+1)a}\right)^{-2n} - 1}} \tag{56}$$

als Gleichung der gesuchten Rollkurven. Nun nimmt man aber, aus einem Grunde, der in Nr. 217 deutlich werden wird, gewöhnlich das Verhältnis $\overline{\mathcal{R}}/\varrho = 2/(\nu+1)$ an, so daß $n = (1+\nu)/(1-\nu)$ wird. Setzen wir ferner $(n+1)a/n = b$, so ergibt sich

$$s = \frac{\nu+1}{\nu-1}\int \frac{d\mathcal{R}}{\sqrt{\left(\frac{\mathcal{R}}{b}\right)^{2\frac{\nu+1}{\nu-1}} - 1}} \tag{56*}$$

(wo die Striche an den Koordinaten wieder weggelassen wurden) als die natürliche Gleichung der Ribaucourschen Kurven.

215. Unter den Kurven (56*) sind für mehrere einfache Werte von ν Kurven, die uns bekannt sind. So gibt $\nu = 0$ $s = \int -\mathcal{R}\,d\mathcal{R}/\sqrt{b^2 - \mathcal{R}^2}$, also $s = \sqrt{b^2 - \mathcal{R}^2}$, d. i. eine gemeine Zykloide; in der Tat ist für diese $\mathcal{R} = 2\mathfrak{N}$ (Nr. 144), wenn G alle Spitzen der Zykloide enthält. Ferner hat man für $\nu = -2$ $s = \frac{1}{3}\int d\mathcal{R}/\sqrt{(\mathcal{R}/b)^{\frac{2}{3}} - 1}$, d. i. eine Parabel, für welche die Gerade G Direktrix ist; denn dann ist $\mathcal{R} = -2\mathfrak{N}$. Für $\nu = -3$ erhält man $s = \frac{1}{2}\int d\mathcal{R}\sqrt{b}/\sqrt{\mathcal{R} - b}$, also $s = \sqrt{b(\mathcal{R} - b)}$, d. i. eine Kettenlinie; für diese ist G gleichfalls die Leitlinie, da dann $\mathcal{R} = -\mathfrak{N}$ ist (Nr. 201). Auch der Wert $\nu = 1$ entspricht einer einfachen Kurve, deren Gleichung aber aus (56*) nicht zu entnehmen ist. Da aber $\mathcal{R} = \mathfrak{N}$ wird, sehen wir, daß dies ein Kreis sein

muß, der G zum Durchmesser hat. Der Wert $\nu = -1$ macht $\mathcal{R} = \infty$, entspricht also einer Geraden.

Eine bekannte Kurve ergibt noch $\nu = -\frac{1}{3}$. In diesem Falle wird $s = -\frac{1}{2}\int d\mathcal{R}\sqrt{\mathcal{R}}/\sqrt{b - \mathcal{R}}$. Dieses Integral ist zwar auswertbar, aber das Resultat wird unübersichtlich. Wir bemerken nun, daß die Kurve aus $s = -\frac{1}{2}\int \mathcal{R}\, d\mathcal{R}/\sqrt{(\mathcal{R} + c)(b - (\mathcal{R} + c))}$ für $c = 0$ hervorgeht. Für variables c stellt aber diese Gleichung ein System von Parallelkurven dar (s. Nr. 211). Setzt man nun $c = \frac{1}{2} b$, so wird $s = \frac{1}{2}\int - \mathcal{R}\, d\mathcal{R}/\sqrt{\frac{1}{4} b^2 - \mathcal{R}^2}$, also $s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} b^2 - \mathcal{R}^2}$. Das ist aber die Gleichung der regulären Astroide (Nr. 80). Die Ribaucoursche Kurve für $\nu = -\frac{1}{3}$ ist also eine schiefe Astroide. Die Strecke $\hat{a}$, welche die zugrunde liegende

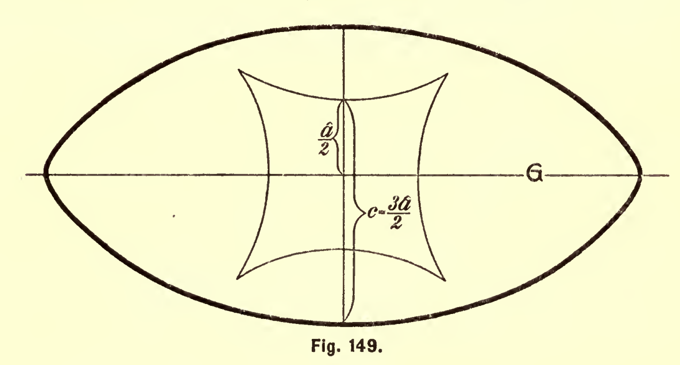


Fig. 149.

reguläre Astroide charakterisiert, ist $\frac{1}{3} b$; da nun $c = \frac{3}{2}\hat{a}$, so ist die in Rede stehende Ribaucoursche Kurve gerade die schiefe Astroide, für welche sich je zwei Spitzen in einen Spitzpunkt vereinigen. Die Gerade G ist eine Symmetrieachse der Kurve, die Verbindungslinie der beiden Spitzpunkte (Fig. 149).

Die angegebenen Werte von ν entsprechen den Indizes n der Sinusspiralen in dieser Weise:

n	1	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	∞
ν	0	-1	-2	-3	$-\frac{1}{3}$	1

Damit haben wir auf einen Schlag folgende Sätze, die wir, die Reihe der Indizes einhaltend, aufführen:

Rollt ein Kreis auf einer Geraden G, so beschreibt ein Punkt der Peripherie eine Zykloide mit G als Ort der Spitzen; das ist die gewöhnliche Erzeugung der Zykloide. Rollt eine logarithmische Spirale auf G, so beschreibt das Auge eine Gerade. *Rollt eine Tschirnhausensche Kubik auf* G, *so beschreibt der Punkt, der die Strecke Scheitel-Knoten im Verhältnis 1 : 8 teilt, eine Parabel mit* G *als Direktrix. Rollt eine Parabel auf* G, *so beschreibt ihr Brennpunkt eine Kettenlinie mit* G *als Direktrix. Rollt eine Kardioide auf* G, *so beschreibt die Spitze eine schiefe Astroide mit 2 Spitzpunkten, die auf* G *liegen.* Der Wert ∞ für n entspricht keiner Sinusspirale. Andererseits geben die Lemniskate ($n = 2$) und gleichseitige Hyperbel ($n = -2$) zu neuen, komplizierteren Kurven Anlaß.

216. Wir können jetzt auch die Ribaucoursche Kurve auf einer Geraden Γ rollen lassen und nach der Enveloppe

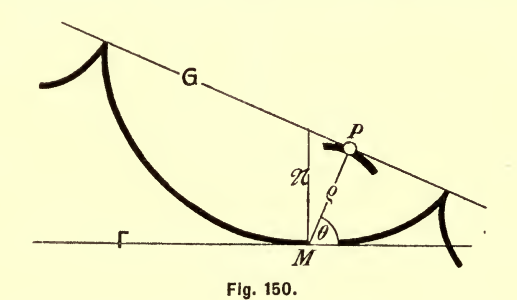


Fig. 150.

ihrer Leitlinie G fragen. Diese Enveloppe wird nach unseren früheren Sätzen beschrieben durch den Fußpunkt P des Lotes vom jeweiligen Berührungspunkte M der Kurve mit Γ auf G (vgl. Fig. 150). Da die Normale der Ribaucourschen Kurve, gerechnet bis zur Direktrix, $\mathcal{N} = \frac{1}{2}(n+1)\mathcal{R}$ ist, so wird $MP = \varrho = \frac{1}{2}(n+1)\,\mathcal{R}\sin\theta$. Nun ist nach Formel (20) von Nr. 130 für den Ort von P $\overline{\mathcal{R}} = \varrho + \mathcal{Q}\sin\theta$. Da aber $\mathcal{Q} = \mathcal{R}$, so ergibt sich nach dem vorigen

$$\overline{\mathcal{R}} = \tfrac{1}{2}(n+3)\,\mathcal{R}\sin\theta = \frac{n+3}{n+1}\,\varrho\,.$$

Dadurch ist wieder eine andere Ribaucoursche Kurve mit Γ als Direktrix definiert, deren Index n' sich aus der Glei-

chung $(n+3):(n+1) = 2:(n'+1)$ bestimmt. Also ist $n' = (n-1)/(n+3)$. Wir können demnach sagen: *Rollt eine Ribaucoursche Kurve vom Index n auf einer Geraden* Γ, *so umhüllt ihre Direktrix* G *eine Ribaucoursche Kurve vom Index* $(n-1)/(n+3)$ *mit* Γ *als Direktrix.* Die Indizes n, n', die zu bekannten Kurven führen, entsprechen sich folgendermaßen

n	1	-2	0	-3
n'	0	-3	$-\frac{1}{3}$	∞

D. h.: Rollt ein Kreis auf einer Geraden Γ, so umhüllt jeder Durchmesser eine Zykloide (Nr. 147). *Rollt eine Parabel auf* Γ, *so umhüllt ihre Direktrix eine Kettenlinie mit* Γ *als Leitlinie. Rollt eine Zykloide auf* Γ, *so umhüllt ihre Direktrix eine schiefe Astroide mit zwei Spitzpunkten, die auf* Γ *liegen. Rollt eine Kettenlinie auf einer Geraden* Γ, *so geht ihre Direktrix durch einen festen Punkt;* denn der Punkt allein kann offenbar der Bedingung $\overline{\mathcal{R}} = 0$ genügen.

217. Die Sinusspiralen und Ribaucourschen Kurven sind Glieder ein und derselben großen Kurvenfamilie, die man »Cesàrosche Kurven« heißt. E. Cesàro[164] hat sie durch die Bedingung definiert, daß der Krümmungsradius $\mathcal{R}$ proportional sei demjenigen vom Kurvenpunkte P aus gerechneten Normalenabschnitt $\mathcal{N}$, der durch die Polare Π von P in bezug auf einen festen Kreis K um O abgeschnitten wird (Fig. 151). Die Proportionalität sei durch die Gleichung ausgedrückt

$$\mathcal{N} = (n+1)\mathcal{R}\,. \tag{57}$$

Jeder rationale oder irrationale Wert von n bestimmt dann eine Klasse von Cesàroschen Kurven, die, wie wir sehen werden, immer noch ∞^2 Kurvenindividuen enthält.

Wird der Radius r des »Direktrixkreises« zu Null, reduziert sich also dieser auf seinen Mittelpunkt O, so haben wir offenbar die Sinusspiralen. Wird aber r unendlich groß, so rückt einer der auf PO befindlichen Punkte A, A' von K, z. B. A' ins Unendliche. Ist Q der Schnittpunkt von Π mit PO, so muß, da $(PAQA')$

[164]) Nouv. Ann. (3) **7**, 1888, 171—190; (3) **9**, 1890, 143—157; (3) **13**, 1894, 102—106. Benennung nach E. Wölffing.

ein harmonisches Quadrupel ist, schließlich $PA = AQ$ werden. Wir erhalten offenbar die Ribaucourschen Kurven. Da wir aber oben die Normale nicht bis zu Π, sondern nur bis zur Direktrix selbst, die hier durch A parallel zu Π läuft, rechneten, setzten wir, um die Indizes in Übereinstimmung zu bringen, $\mathcal{N} = \frac{1}{2}(n+1)\mathcal{R}$.

Bevor wir andere Kurvenarten als Cesàrosche Kurven agnoszieren können, müssen wir deren allgemeine Gleichung aufstellen. Es seien in bezug auf das Koordinatensystem von Tangente und Normale in P x, y die rechtwinkligen,

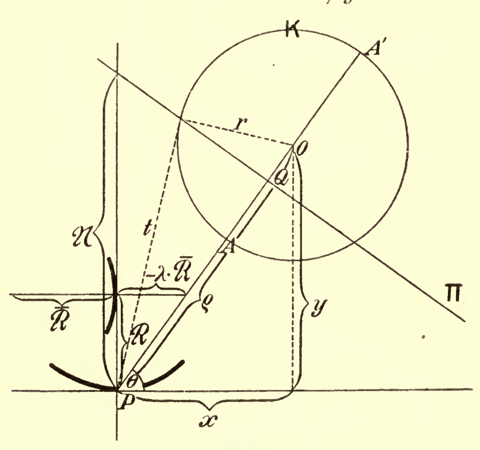


Fig. 151.

ϱ, θ die Polarkoordinaten von O. Ist dann t die Länge der Tangente von P an K, r der Radius von K, so hat man

$$t^2 = \varrho^2 - r^2 = \varrho \cdot \overline{PQ} = \varrho \mathcal{N} \sin\theta ,$$

also

(58) $$\varrho^2 - r^2 = (n+1)\mathcal{R} y .$$

Differenziert man diese Gleichung, wo $\varrho^2 = x^2 + y^2$ zu setzen ist, nach s, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Bedingungen der Unbeweglichkeit (Nr. 123)

(59) $$(n+1) y \, d\mathcal{R} = (n-1) x \, ds .$$

Hieraus hat man für die natürliche Gleichung zunächst den Ansatz

(59*) $$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{y}{x} d\mathcal{R} ,$$

wo x und y noch durch $\mathcal{R}$ auszudrücken sind. Da nach der Unbeweglichkeitsbedingung für y $x\,ds = -\mathcal{R}\,dy$, kann man (59) auch schreiben

$$(59^\dagger)\qquad \frac{1+n}{1-n}\cdot\frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}} = \frac{dy}{y}\,.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt

$$(60)\qquad y = \mu\,\mathcal{R}^{\frac{1+n}{1-n}},$$

wo μ eine Integrationskonstante bedeutet. Die Koordinate x kann man nun mittels (58) ausdrücken und es kommt, wenn man diese Werte in (59*) setzt

$$(61)\qquad s = \frac{n+1}{n-1}\int\frac{\mu\,\mathcal{R}^{\frac{1+n}{1-n}}\,d\mathcal{R}}{\sqrt{\mu(n+1)\,\mathcal{R}^{\frac{2}{1-n}} - \mu^2\,\mathcal{R}^{2\frac{1+n}{1-n}} + r^2}}\,.$$

Schafft man unter dem Integral den Faktor, der bei $d\mathcal{R}$ steht, in die Wurzel des Nenners und setzt, zur Herstellung der Homogeneität, $\mu = c^{\frac{2n}{n-1}}$, wo c nun eine Strecke bedeutet, so kann man die natürliche Gleichung der Cesàroschen Kurven in der Form schreiben

$$(61^*)\qquad s = \frac{n+1}{n-1}\int\frac{d\mathcal{R}}{\sqrt{(n+1)\left(\frac{\mathcal{R}}{c}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + \frac{r^2}{c^2}\left(\frac{\mathcal{R}}{c}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}\,.$$

Da zwei willkürliche Konstante r, c auftreten, gibt es tatsächlich für jedes n ∞^2 Kurven.

218. Sehen wir nun zunächst, wie die Gleichungen der Sinusspiralen und Ribaucourschen Kurven aus dieser allgemeinen Gleichung hervorgehen. Für $r=0$ verschwindet das zweite Glied unter der Wurzel und es ergibt sich, wenn man nur die Konstante c etwas verändert, ohne weiteres die Gleichung der Sinusspiralen (Nr. 92). Wollen wir $r=\infty$ werden lassen, so müssen wir die Konstante c so wählen, daß der Koeffizient $r^2/c^{\frac{4n}{n-1}}$ des zweiten Gliedes unter der Wurzel endlich bleibt, m. a. W. wir

müssen r ins Unendliche wachsen lassen wie $c^{\frac{2n}{n-1}}$. Die Größe c selbst wird dabei ∞ oder 0, je nachdem $2n/(n-1)$ positiv oder negativ ist; jedenfalls aber verschwindet das erste Glied unter der Wurzel des Nenners. Setzen wir $r^2 / c^{\frac{4n}{n-1}} = b^{-2\frac{n+1}{n-1}}$, so wird aus (61*)

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\mathcal{R}}{\sqrt{(\mathcal{R}/b)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}},$$

was in der Tat mit (56*), der Gleichung der Ribaucourschen Kurven identisch ist.

Wenn wir in (59) $d\mathcal{R}/ds = \overline{\mathcal{R}}/\mathcal{R}$ setzen, wo $\overline{\mathcal{R}}$ den Krümmungsradius der Evolute bedeutet, so erhalten wir $y/x = (n-1)\,\mathcal{R}/(n+1)\,\overline{\mathcal{R}}$. Nennen wir ferner den Abschnitt auf der Geraden von $\overline{\mathcal{R}}$, der zwischen dem Endpunkte von $\overline{\mathcal{R}}$ und dem Radiusvektor PO liegt, $-\lambda\,\overline{\mathcal{R}}$, so ist aus der Fig. 151 zu ersehen, daß $y/x = \mathcal{R}/(-\lambda\,\overline{\mathcal{R}})$. Daher ist das Verhältnis λ konstant und gleich $(1+n)/(1-n)$, also nur von n abhängig. Wir können diese Eigenschaft folgendermaßen ausdrücken: *Bei jeder Cesàroschen Kurve teilt der Radiusvektor des Poles O zum Kurvenpunkte P den Krümmungsradius $\overline{\mathcal{R}}$ der Evolute in konstantem Verhältnis, und zwar ist der Abschnitt vom Evolutenpunkte aus gerechnet* $\frac{1+n}{1-n}\,\overline{\mathcal{R}}$. Es ist beachtenswert, daß diese Eigenschaft auch als Definition der Cesàroschen Kurven dienen kann. Denn die Integration der Bedingungsgleichung führt auf (58) mit r^2 als willkürlicher Konstante zurück.

219. Setzen wir nun hier $n = 0$, so haben wir Kurven, für die der Krümmungsmittelpunkt der Evolute immer auf dem Radiusvektor von einem festen Punkte O aus liegt. Das war aber eine Eigenschaft aller zykloidalen Kurven (im weitesten Sinne). Außerdem war bei diesen der Krümmungsradius der Kurve selbst im Punkte P durch die Polare in bezug auf den Grundkreis bestimmt. Hier erhalten wir nun aus (57) für $n = 0$ $\mathcal{R} = \mathcal{N}$. Also ist die Direktrix mit dem festen Kreise der zykloidalen Kurven identisch. Die Sätze über Zykloidalen ergeben sich so als Spezialisierungen der ganz allgemeinen über Cesàrosche

Kurven. Wir müßten nur noch zeigen, daß die natürliche Gleichung für $n = 0$ wirklich in die der Zykloidalen übergeht. Das wollen wir aber dem Leser überlassen und bemerken nur, daß man hierzu Gleichung (61) benutzen muß, weil in (61*) die Konstante so spezialisiert ist, daß sie für $n = 0$ hinausfällt.

Setzt man ferner in (61*) $n = -2$, so erhält man sofort die natürliche Gleichung eines allgemeinen Kegelschnittes in der Form (24) der Nr. 126. Um die Form (27) zu erhalten, ist es nur nötig $c = \sqrt{a\,b}$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ zu setzen. Daß der Pol O in den Mittelpunkt des Kegelschnittes fällt, können wir aus dem Beispiel der gleichseitigen Hyperbel, für die uns das bekannt ist, ersehen. Aus dem Werte von r ergibt sich so, daß für Kegelschnitte, wenn man sie als Cesàrosche Kurven auffaßt, der orthoptische Kreis, der bei der Parabel in die Direktrix übergeht, Leitlinie ist. Auf weitere hieraus für Kegelschnitte folgende Sätze gehen wir nicht ein.

220. Wir erhalten eine Reihe von Beziehungen zwischen Cesàroschen Kurven spezieller Art und anderen uns bekannten Kurven, wenn wir zwei allgemeine Theoreme aufstellen, die man J. Steiner und E. Habich verdankt. Es ist dazu nötig, die Fußpunktskurve F einer Kurve K in bezug auf einen Punkt P ihrer Ebene und die von P erzeugte Rollkurve Φ, wenn K auf einer Geraden G rollt, zusammen zu betrachten. Die Aufstellung der Fußpunktskurve in natürlichen Koordinaten müssen wir erst vornehmen. Es sei M der momentane Berührungspunkt der Tangente G mit K, F der Fußpunkt des Lotes von P auf die Tangente (vgl. Fig. 152), so hat F in bezug auf das System der Tangente und Normale in M die Koordinaten $x = \varrho \cos\theta$, $y = 0$. Also sind die Fortschreitungsrichtungen für F gegeben durch folgende Gleichungen (s. Nr. 123)

$$\delta x / ds = \varrho \sin\theta / \mathcal{R}, \qquad \delta y / ds = \varrho \cos\theta / \mathcal{R}. \tag{62}$$

Dabei sind für P die Unbeweglichkeitsbedingungen zu beachten. Es ist demnach $\delta y / \delta x = \operatorname{ctg}\theta$, was nur die schon früher kinematisch abgeleitete Eigenschaft der Normale von F bestätigt (Nr. 66, Zus. 1). Ferner erhält man aus (62) durch Quadrieren und Addieren das Verhältnis $\varkappa = ds'/ds = \varrho / \mathcal{R}$

des Bogenelementes von F zu dem von K. Für $\mathfrak{R}'$ hat man die Gleichung (15) von Nr. 123 zu benutzen. Nur ist zu beachten, daß dort ϑ den Neigungswinkel der Tangente der neuen Kurve gegen die der alten bedeutet. Dieser Winkel ist hier $\frac{1}{2}\pi - \theta$. So erhält man

$$\varrho/\mathfrak{R}\mathfrak{R}' = 2/\mathfrak{R} - \sin\theta/\varrho,$$

also für die Fußpunktskurve F die Gleichungen

$$(63) \qquad s' = \int \frac{\varrho}{\mathfrak{R}}\, ds\,, \qquad \frac{1}{\mathfrak{R}'} = \frac{2}{\varrho} - \frac{\mathfrak{R}\sin\theta}{\varrho^2}\,.$$

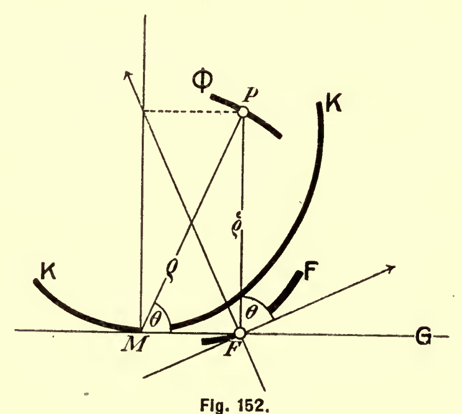


Fig. 152.

Für die Rollkurve Φ hat man nach Nr. 127 die schon öfters verwendete Darstellung

$$(64) \qquad s'' = \int \frac{\varrho}{\mathfrak{R}}\, ds\,, \qquad \frac{1}{\mathfrak{R}''} = \frac{1}{\varrho} - \frac{\mathfrak{R}\sin\theta}{\varrho^2}\,.$$

Vergleicht man nun die beiden ersten Gleichungen in (63) und (64), so erhält man den Steinerschen Satz[165]): *Beschreibt der Punkt P in der Ebene der Kurve* K, *wenn diese auf einer Geraden* G *rollt, eine Kurve* Φ, *so ist jeder Bogen von* Φ *gleich dem entsprechenden Bogen der Fußpunktskurve* F *von* K *in bezug auf P.*

221. So ist jeder Bogen einer Trochoide, der einem einmaligen Abrollen des erzeugenden Kreises entspricht, gleich der Gesamtlänge einer Pascalschen Schnecke, ins-

[165]) J. f. Math. **21**, 1840, 101.

besondere ein Bogen der Zykloide gleich der Länge der entsprechenden Kardioide ($8r$). *In ähnlicher Weise ist die Länge eines Bogens derselben Art einer Delaunayschen Kurve gleich der Peripherie des über der Hauptachse der beschreibenden Ellipse oder Hyperbel als Durchmesser errichteten Kreises;* die Rektifikation der Kettenlinie reduziert sich auf die einer Geraden. *Zu jeder Rosenkurve kann man ferner eine Ellipse angeben, deren Umfang der Gesamtlänge der Rosenkurve gleich ist.* Daß die Rektifikation der logarithmischen Spirale sich gleichfalls auf die einer Geraden reduziert, wissen wir schon. Weitere solche Beispiele zu bilden, können wir dem Leser überlassen. Als allgemeineren Satz wollen wir nur gemäß dem Bonnetschen Theorem [163]) noch den folgenden aufstellen: *Die Rektifikation einer Ribaucourschen Kurve vom Index n ist mit der einer Sinusspirale vom Index* $\nu = \frac{1}{2}(n+1)$ *identisch.*

Zusatz. Die Rektifikation der Sinusspiralen zwischen gewissen Grenzen hängt von bestimmten Integralen ab, die sich durch Eulersche Integrale zweiter Gattung ausdrücken lassen. Schreiben wir die Gleichung der Sinusspirale in der Form $\varrho = a\cos^{1/n} n\theta$, so wird

$$s = a\int (\cos n\,\theta)^{\frac{1-n}{n}}\,d\theta = \frac{a}{n}\int (\cos\vartheta)^{\frac{1-n}{n}}\,d\vartheta\,.$$

Nun sind die Eulerschen Integrale I. und II. Gattung (Beta- und Gammafunktionen) definiert durch die Gleichungen

$$B(p\,,\,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\,, \qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx$$

mit der sie verknüpfenden Beziehung

$$B(p\,,\,q) = \Gamma(p)\,\Gamma(q)/\Gamma(p+q)\,.$$

Setzt man in dieser Relation $x = \sin^2\vartheta$, $p = \frac{1}{2}\mu$, $q = \frac{1}{2}\nu$, so ergibt sich die Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{\mu-1}\vartheta\cdot\cos^{\nu-1}\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\mu)\cdot\Gamma(\frac{1}{2}\nu)}{\Gamma(\frac{1}{2}(\mu+\nu))}\,.$$

Für die Werte $\mu = 1$, $\nu = 1/n$ entsteht aus der linken Seite das Bogenintegral. Es wird

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos\vartheta)^{\frac{1}{n}-1}\,d\vartheta = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(1/2\,n)}{\Gamma(1/2\,n+\frac{1}{2})}\,.$$

Nun ist bekanntlich $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und da nach der Gaußschen Produktformel

$$\Gamma(a)\,\Gamma(a+\tfrac{1}{2}) = 2^{1-2a}\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2a)\,,$$

so wird, wenn man diese auf den Nenner anwendet, der Bogen s zwischen den Grenzen 0 und $\pi/2n$

$$s = \frac{a}{n}\cdot 2^{\frac{1}{n}-2}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2n)}{\Gamma(1/n)}\,.$$

Die ganze Kurve besteht aber, wenn sie geschlossen ist, aus $2n$ solchen kongruenten Stücken. Wir erhalten so für den Umfang des Kreises vom Durchmesser $a (n = 1)$ $u = a\,\Gamma^2(\frac{1}{2})$ $[\Gamma(1) = 1]$, woraus man die Bestätigung entnehmen kann, daß $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ist; ebenso für den Umfang der Lemniskate $(n = 2)$ $u = a\,\Gamma^2(\frac{1}{4})/\sqrt{2\pi}$ [166]).

Für die Fläche der Sinusspiralen möge der Leser selbst die entsprechende Formel mit denselben Mitteln aufstellen[167]). Nur die gewöhnliche Reduktionsformel $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$ muß noch verwendet werden.

222. Wir kehren zu unseren Gleichungen (63) und (64) zurück, um die Werte von $1/\mathcal{R}'$ und $1/\mathcal{R}''$ zu subtrahieren. Es kommt

$$1/\mathcal{R}' - 1/\mathcal{R}'' = 1/\varrho\,.$$

Dies ist aber die Gleichung, welche den Durchmesser $\mathcal{Q} (= \varrho)$ des Wende- oder Rückkehrkreises bestimmt, wenn die durch $\mathcal{R}'$ und $\mathcal{R}''$ charakterisierten Kurven F und Φ aufeinander rollen. $\mathcal{R}''$ muß nur gemäß den Festsetzungen der Nr. 127 mit entgegengesetztem Zeichen genommen werden. D. h. die Kurven rollen so aufeinander, daß beide Krümmungsradien nach derselben Richtung gehen. Nun hat aber der Pol P in bezug auf das Koordinatensystem der Tangente und Normale der Fußpunktskurve in F die Polarkoordinaten $\tilde{\varrho} = \varrho\sin\theta$, $\tilde{\omega} = \theta$, so daß P immer auf dem Wendekreis liegt. *Daher beschreibt der Pol P der Fußpunktskurve F einer Kurve K, wenn F auf derjenigen Kurve Φ abrollt, die von P beim Rollen von K auf einer Geraden G erzeugt wird, die feste Gerade G* [168]). Denn da P auf dem Inflexionskreis bleibt, muß P eine Gerade durchlaufen nach Nr. 132; daß aber diese mit G identisch ist, folgt daraus, daß der Abstand der Geraden G von P immer gerade gleich $\varrho\sin\theta = \tilde{\varrho}$ ist. Die Kurven

[166]) Vgl. J. A. Serret, Journ. de math. (1) **7**, 1842, 114—119.
[167]) Vgl. G. Loria, Stzgsb. böhm. Ges. Prag 1897.
[168]) E. Habich, Mathesis **2**, 1882, 145—148.

müssen natürlich so rollen, daß sie sich in jedem Augenblick in entsprechenden Punkten berühren. Aus der Umkehrung der Bewegung, oder indem man den Rückkehrkreis direkt betrachtet, folgt dann sofort: *Rollt* Φ *auf* F *ab, so dreht sich die Gerade* G *immer um den in der Ebene von* F *festen Punkt* P.

Aus diesen allgemeinen Sätzen folgt eine ganze Reihe von einzelnen Theoremen, die der Verfasser, wenigstens soweit sie sich auf die direkte Bewegung beziehen, zusammengestellt hat[169]). Wir wollen die hauptsächlichsten derselben hier anführen. Zunächst können wir mittels des Bonnetschen Satzes (Nr. 214) den folgenden immer noch ziemlich umfassenden aussprechen: *Rollt eine Sinusspirale vom Index n auf einer Ribaucourschen Kurve vom Index* $2n - 1$, *so beschreibt ihr Pol die Direktrix der letzteren; rollt die Ribaucoursche Kurve auf der Sinusspirale, so dreht sich ihre Direktrix um den Pol der letzteren.* Dabei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß die beiden rollenden Kurven auch die dem Habichschen Satze entsprechende Größenbeziehung haben. Nur so sind auch die folgenden spezielleren Theoreme gültig.

223. Rollt eine Pascalsche Schnecke auf einer Trochoide, so beschreibt ihr Doppelpunkt die Direktrix der letzteren; diese Direktrix dreht sich um den Doppelpunkt der Pascalschen Schnecke, wenn die Trochoide auf der Schnecke rollt. Soll ein Punkt in der Ebene eines Kreises eine Gerade beschreiben, so muß der Kreis auf einer Delaunayschen Kurve rollen; artet der Kreis in eine Gerade aus, so wird die Delaunaysche Kurve zur Kettenlinie. Rollt eine Rosenkurve (Pseudorhodonee) auf einer geeigneten Ellipse (Hyperbel), so beschreibt ihr Knoten eine Achse des Kegelschnitts; diese Achse dreht sich um den Knoten bei der umgekehrten Bewegung. Wird die Rosenkurve zur Archimedischen Spirale, so artet der Kegelschnitt in eine Parabel aus; die logarithmische Spirale muß auf einer Geraden rollen, damit ihr Pol eine Gerade beschreibe. Beim Abrollen zweier kongruenten Parabeln beschreibt der Brennpunkt der einen die Direktrix der anderen, die Direktrix der einen dreht sich um den Brenn-

---

169) Arch. Math. Phys. (3) 11, 1907, 307—314.

punkt der anderen (die vermittelnde Kurve K ist hier eine Tschirnhausensche Kubik). Rollt eine Galileische Spirale auf einer Tschirnhausenschen Kubik, so beschreibt ihr Pol diejenige Gerade, die im Pol der letzteren auf deren Symmetrieachse senkrecht steht, und diese Gerade dreht sich beim umgekehrten Rollen um den Pol der Galileischen Spirale (vermittelnde Kurve K ist hier eine Sturmsche Spirale, vgl. Nr. 194).

Zusatz. Rollt Φ nicht auf F ab, sondern auf einer beliebigen anderen Kurve Λ, so hüllt G eine bestimmte Kurve H ein (vgl. Fig. 153). Der momentane Berührungspunkt *M′* auf G ist der Fußpunkt des Lotes von dem Berührungspunkt *R* zwischen Φ und Λ. Dieser

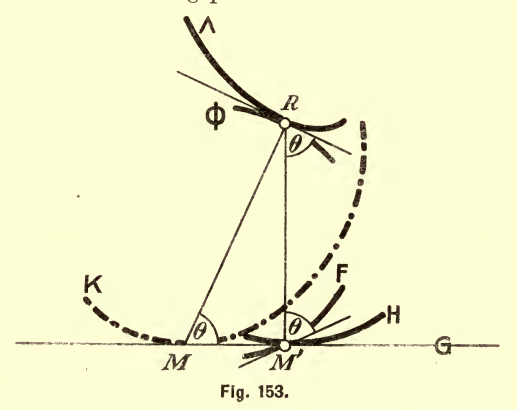


Fig. 153.

fällt also immer, wenn wir statt Φ auf Λ die Kurve F rollen lassen, mit dem in der Ebene von F fest gedachten Punkte *P* der Fig. 152 zusammen. *Daher ist die Enveloppe von* G, *wenn* Φ *auf* Λ *rollt, mit dem Orte von P, wenn* F *auf* Λ *rollt, identisch.* Hieraus folgt zunächst die Bestätigung einer Reihe von Sätzen, die wir für Sinusspiralen und Ribaucoursche Kurven schon aufgestellt haben. Neu ist aber z. B. folgendes Theorem: *Rollt eine Delaunaysche Kurve auf einem beliebigen Kreis (einer Geraden), so hüllt ihre Direktrix verschlungene oder gestreckte Epitrochoiden (Trochoiden) ein.* Wird der Kreis gerade gleich dem Scheitelkreis des erzeugenden Kegelschnittes, so reduzieren sie sich auf einen Punkt. *Unter denselben Verhältnissen hüllt die Direktrix der Kettenlinie eine verschlungene oder gestreckte Kreisevolvente ein;* wenn der Abstand des Scheitels der Kettenlinie gerade mit dem Radius des Kreises übereinstimmt, eine Archimedische Spirale[170]).

[170]) E. Habich, a. a. O. u. Mathesis **6**, 1886, 103—106.

V. ABSCHNITT.

DIE METHODE DER KOORDINATENVERWANDLUNG.

§ 27. Übergang von rechtwinkligen zu natürlichen und Polarkoordinaten.

224. Die Methode der Koordinatenverwandlung als Hilfsmittel, um aus bekannten Kurven neue zu erhalten, ist uns nicht ganz fremd. Wir machten schon die Beobachtung, daß jeder Kurve $f(s, \mathcal{R}) = 0$ eine Kurve $f(x, y) = 0$, die sogenannte Mannheimsche Kurve, entsprach als Ort des Krümmungsmittelpunktes des jeweiligen Berührungspunktes, wenn die erstere Kurve auf einer Geraden rollt. Sehen wir alle unsere in natürlicher Gleichung gegebenen Kurven durch, so bemerken wir, daß diese zum Teil bekannte (wie die Kettenlinien), zum Teil komplizierte (wie die Delaunayschen und Cesàroschen Kurven), uns nicht weiter interessierende Mannheimsche Kurven liefern. Wir werden aber auf einige beachtenswerte neue Kurven kommen, wenn wir einfache kartesische Gleichungen zu natürlichen Koordinaten transformieren, indem wir $x = s$, $y = \mathcal{R}$ setzen, also die Frage stellen: *Welche Grundkurve* K *gehört zu einer Kurve* K′ *mit der Gleichung* $f(x, y) = 0$, *wenn man diese als Mannheimsche Kurve von* K *betrachtet?*

Halten wir zunächst unter den Normalformen der Kegelschnittsgleichung Umschau, so sehen wir, daß uns nur noch die auf die Asymptoten bezogene Gleichung der gleichseitigen Hyperbel noch nicht vorkam.

Ihr entspricht eine Grundkurve, die in natürlichen Koordinaten dargestellt wird durch

$$\mathcal{R} s = a^2 . \tag{1}$$

Da sich für den Tangentenwinkel ergibt $\tau = \int ds/\mathcal{R} = s^2/2a^2$, kann man (1) durch die beiden Gleichungen ersetzen

$$(1^*) \qquad \mathcal{R} = a/\sqrt{2\tau}\,, \quad s = a\sqrt{2\tau}\,.$$

In rechtwinkligen Koordinaten ergibt sich hieraus sofort die Darstellung

$$(1^\dagger) \qquad x = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\tau \frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau\,, \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^\tau \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau\,.$$

Die hier auftretenden Integrale sind unter dem Namen der Fresnelschen Integrale bekannt und spielen in der Theorie der Brechung des Lichtes eine Rolle[171]). Von demselben Gesichtspunkte aus wurde die durch (1†) dargestellte Kurve von dem Physiker A. Cornu (1874) aufgestellt und studiert. Erst E. Cesàro wies nach, daß bei dieser Kurve die Krümmung dem Bogen proportional, daß sie also mit der durch (1) dargestellten identisch ist. Er nannte sie »Klothoide« (κλώϑω, ich spinne). Was ihre Gestalt betrifft, so hat sie im Anfangspunkt ($\tau = 0$, $s = 0$), gegen den sie symmetrisch ist, einen Wendepunkt. Der Krümmungsradius nimmt rasch ab, wird aber erst für $s = \infty$ ($\tau = \infty$) zu Null. Daher hat die Kurve zwei asymptotische Punkte, deren Koordinaten x_0, y_0 durch (1†) gegeben sind, wenn man dort die obere Grenze der

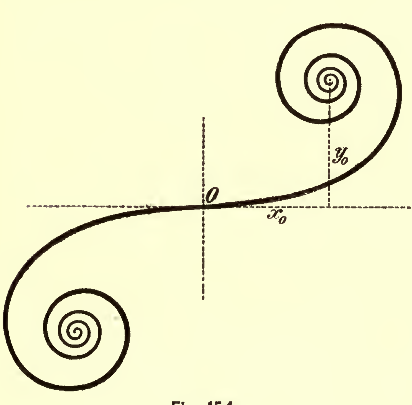


Fig. 154.

---

[171]) Bei Fresnel, *Oeuvres complètes,* t. I, S. 319, sowie in Verdets *Leçons d'optique physique,* t. I, S. 328 findet sich Näheres über diese Integrale.

Integrale unendlich groß werden läßt (Fig. 154). Dann sind aber die Integrale auswertbar. Es ist nämlich

$$x_0 + i y_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \tau^{-\frac{1}{2}} e^{i\tau} \, d\tau = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(-i)^{\frac{1}{2}}} = a \sqrt{\frac{i\pi}{2}} ,$$

woraus man, wenn man links und rechts quadriert und dann Reelles und Imaginäres einzeln Null setzt,

$$x_0 = y_0 = \tfrac{1}{2} a \sqrt{\pi}$$

erhält.

225. E. Cesàro hat eine sehr merkwürdige Eigenschaft der Klothoide, die zudem für sie charakteristisch ist, angegeben[172]. Es ist eine Eigenschaft der Bogenschwerpunkte. Sind die Schwerpunktskoordinaten ξ, η, so hat man für einen vom Wendepunkt O aus gemessenen Bogen von der Länge s

$$s\,\xi = \int_0^s x \, ds , \quad s\,\eta = \int_0^s y \, ds ,$$

also mit Hilfe von (1*) und (1†)

$$(2) \qquad \xi = \frac{a}{\sqrt{2\tau}} \int_0^\tau \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} \int_0^\tau \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\varphi}} \, d\varphi , \qquad \eta = \frac{a}{\sqrt{2\tau}} \int_0^\tau \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}} \int_0^\tau \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varphi}} \, d\varphi .$$

Integrieren wir in dem Ausdruck für ξ partiell, indem wir beachten, daß $d\tau / 2\sqrt{\tau} = d(\sqrt{\tau})$ und daß der nach der oberen Grenze genommene Differentialquotient eines bestimmten Integrals gleich dem Integranden ist (wo φ durch τ ersetzt werden muß), so erhält man

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\tau \frac{\cos\varphi}{\varphi} \, d\varphi - \frac{a}{\sqrt{2\tau}} \int_0^\tau \cos\tau \, d\tau ,$$

also, wenn man dasselbe Verfahren auch auf den Ausdruck für η anwendet, schließlich

$$(2^*) \qquad \xi = x - \mathcal{R} \sin\tau , \qquad \eta = y - \mathcal{R}(1 - \cos\tau) .$$

---

[172] Nouv. Ann. (3) 5, 1886, 511—520. — Die Parallelkurve der Klothoide hat der Verfasser diskutiert im Arch. Math. Phys. **11**, 1907, 373/5.

Die geometrische Interpretation dieses Resultates sagt aus, daß der Schwerpunkt (ξ, η) sich auf dem Krümmungskreis des Bogenendpunktes, und zwar im tiefsten Punkte desselben befindet.

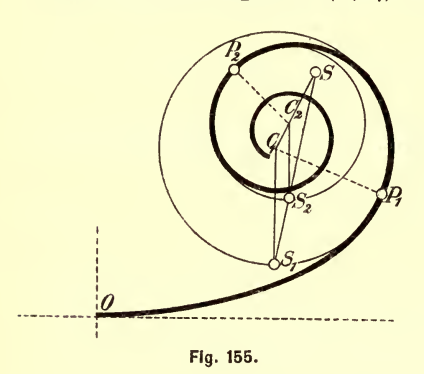


Fig. 155.

Betrachten wir nun zwei von O aus gemessene Bogen $OP_1 = s_1$ und $OP_2 = s_2$ $(s_2 > s_1)$ mit den Schwerpunkten S_1 und S_2 (Fig. 155), so liegt der Schwerpunkt S des Bogens P_1P_2 auf S_1S_2 so, daß $SS_2 : S_2S_1 = s_1 : (s_2 - s_1)$ oder $SS_1 : SS_2 = s_2 : s_1$. Aus der Gleichung der Klothoide folgt aber

$$s_2 : s_1 = \mathcal{R}_1 : \mathcal{R}_2 = C_1S_1 : C_2S_2 .$$

Also ist der Schwerpunkt S eines beliebigen Klothoidenbogens der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Krümmungskreise in den Endpunkten des Bogens.

Zusatz. Es sei angemerkt, daß die Klothoide schon von A. Peters und K. C. F. Krause (1835) in der Gleichungsform $s^2 = 2a^2\tau$ betrachtet wurde. Wir überlassen es dem Leser, die einfachsten Gleichungen in s, τ und $\mathcal{R}, \tau$ zu untersuchen. Die meisten derselben führen auf schon behandelte Kurven; so stellt $s = a\tau$ den Kreis, $\mathcal{R} = a\tau$ die gewöhnliche Kreisevolvente dar. Durch $s\tau = a$ wird, wie wir schon gesehen haben, die Antiloga von Krause, durch $\mathcal{R}\tau = a$ ihre Evolvente dargestellt. Überhaupt ist die Kurve $f(s, \tau) = 0$ die Evolute der Kurve $f(\mathcal{R}, \tau) = 0$. Näheres über die Gleichung $f(\mathcal{R}, \tau) = 0$ in Nr. 257 ff.

226. Ein weiteres Beispiel der soeben angewendeten Koordinatentransformation sei die Kurve, deren Mannheimsche Kurve die gewöhnliche Kettenlinie $y = p\,\mathrm{ch}(x/p)$ ist, d. i. die Kurve mit der natürlichen Gleichung

$$(3) \qquad \mathcal{R} = p\,\mathrm{ch}(s/p) = \tfrac{1}{2}p\,(e^{s/p} + e^{-s/p}) .$$

Wir wollen gleich sagen, daß auch diese Linie in der Mechanik eine Rolle spielt. Sie ist die Gleichgewichtsfigur für einen Faden, der an zwei Punkten aufgehängt ist, dessen Dicke aber so variiert, daß er an jeder Stelle der-

selben Spannung unterworfen ist. Sie heißt daher »Kettenlinie gleichen Widerstandes«. Für den Tangentenwinkel ergibt die bekannte Formel

(4) $$\tau = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{s/p} - \tfrac{1}{2}\pi ,$$

woraus

(4*) $$s = p \log \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\tau + \tfrac{1}{4}\pi) .$$

Durch Einsetzen in (3) erhält man ferner

(4†) $$\mathcal{R} = \tfrac{1}{2} p \left[\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\tau + \tfrac{1}{4}\pi) + \operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\tau + \tfrac{1}{4}\pi)\right]$$

oder schließlich

(5) $$\mathcal{R} \cos\tau = p .$$

Diese Gleichung drückt eine Eigenschaft unserer Kurve aus, die auch zu ihrer geometrischen Definition dienen kann. Sie lautet: *Bei der Kettenlinie gleichen Widerstandes ist die Projektion des Krümmungsradius auf eine feste Gerade konstant.* Diese feste Gerade ist senkrecht zur Tangente im Anfangspunkte.

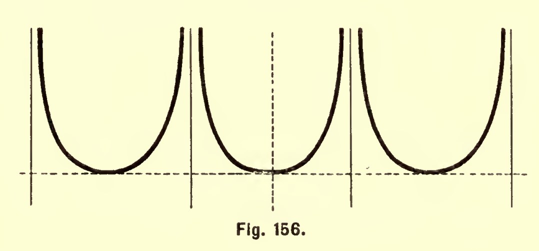


Fig. 156.

Dort hat der Krümmungsradius ein Minimum p, wächst mit s und τ, bis er für $\tau = \frac{1}{2}\pi$ ($s = \infty$) unendlich groß wird. Gegen die Normale des Anfangspunktes ist die Kurve symmetrisch. $\mathcal{R}$, s und τ wachsen wie bei der Kettenlinie. Doch ist ein großer Unterschied. Denn der Übergang zu rechtwinkligen Koordinaten ergibt

(6) $$x = p\tau , \quad y = -p \log \cos\tau ,$$

so daß also x für $\tau = \frac{1}{2}\pi$ nicht unendlich wird. Die Kurve hat demnach die Parallelen in den Abständen $\pm\frac{1}{2}p\pi$ von der y-Achse zu Asymptoten (vgl. Fig. 156). Dieser eine Zug muß aber, da mit weiter wachsendem τ die Ordinate wieder die alten Werte annimmt, sich un-

endlich oft wiederholen, so daß die Kurve alle Parallelen zur y-Achse in den Abständen $\pm\frac{1}{2}(2\nu+1)\pi$ zu Asymptoten hat. All dies könnte auch direkt aus der kartesischen Gleichung

$$y = -p \log \cos(x/p) \tag{6*}$$

gefolgert werden.

227. Wir hätten noch eine ganze Familie von Kurven, die auf die zweimal angewendete Weise aus ihren Mannheimschen Kurven abzuleiten wären. Wir meinen die Kurven mit der natürlichen Gleichung $\mathcal{R} = a^{1-n} s^n$, wo n eine beliebige Zahl sein mag. Die Mannheimschen Kurven dieser Familie haben die kartesische Gleichung $y = a^{1-n} x^n$ und heißen konsequenterweise »höhere Parabeln und Hyperbeln« oder kurz »binomische Kurven«. Aber wir haben auch letztere selbst noch zu untersuchen. Nun kann man aber diese binomischen Kurven aus einer anderen Familie, die wir schon, wenigstens in ihren Hauptvertretern, besprochen haben, den binomischen Spiralen $\varrho = a\,\theta^n$ durch eine ganz ähnliche Transformation ableiten, indem man nämlich nur die Polarkoordinaten mit rechtwinkligen vertauscht, also etwa $\varrho = y$, $\theta = x/r$ setzt, wobei r gleich der Maßeinheit genommen werden kann[173]. Auch dieser Transformation, die wie die vorige zunächst rein analytischer Natur ist, kann ein geometrisches Bild untergelegt werden. Wir betrachten sie aber besser von rückwärts und setzen

$$x = r\,\theta\,, \quad y = \varrho\,. \tag{7}$$

So betrachtet, ist die Transformation eine Abbildung der (x, y)-Ebene auf die (ϱ, θ)-Ebene, wo die Parallelen zur y- bzw. x-Achse übergehen in die Geraden durch den Pol, bzw. die konzentrischen Kreise um denselben. Dabei bleiben die Längen in der Richtung der y-Achse erhalten, während die Längen in der Richtung der x-Achse desto mehr verkleinert (vergrößert) werden, je näher (ferner) der Punkt der x-Achse selbst, die sich auf den Pol reduziert, ist. Dazwischen ist offenbar eine Parallele $y = \eta$, auf welcher die Längen gleichfalls erhalten bleiben. Dem

---

[173]) Diese Transformation wurde schon von Varignon, Mém. Ac. Paris 1704, Paris 1722, ausführlich betrachtet.

Punkte (η, ξ) entspricht nun der Punkt $(\varrho = \eta, \theta = \xi/r)$. Der vom Punkte $\theta = 0$ aus gemessene Kreisbogen hat die Länge $\eta\xi/r$, die nur dann mit ξ identisch ist, wenn $\eta = r$ wird. Man kann also die Transformation (7) so auffassen, daß man die Parallele $y = r$ der (x, y)-Ebene auf den Kreis $\varrho = r$ aufwickelt, also gleichsam die Peripherie dieses Kreises als Abszissenachse[174]) benutzt, indem man dabei die Ordinaten senkrecht zur Peripherie aufträgt, ohne sie in der Länge zu verändern. Hat dann die Kurve der (x, y)-Ebene eine Parallele zur x-Achse als Asymptote, so besitzt die Bildkurve einen asymptotischen Kreis, im Falle der x-Achse selbst einen asymptotischen Punkt.

228. Da ferner eine beliebige Gerade $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ in eine Archimedische Spirale $\alpha r \theta + \beta \varrho + \gamma = 0$ übergeht, so wird eine beliebige Asymptote der Grundkurve, die keine Achsenparallele ist, in eine asymptotische Archimedische Spirale übergehen. Entsprechend sahen wir schon bei den Pseudozykloidalen, daß sie logarithmische Spiralen als Asymptoten haben, da $\alpha s + \beta \mathcal{R} + \gamma = 0$ immer eine logarithmische Spirale darstellt, sofern nur $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$ ist, was wir auch hier annehmen müssen.

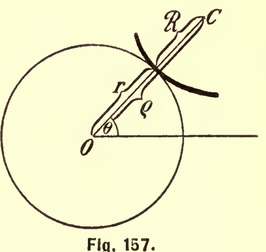


Fig. 157.

Gerade, Archimedische und logarithmische Spirale entsprechen sich also in den drei Koordinatensystemen der (x, y), (ϱ, θ) und $(\mathcal{R}, s)$. Ebenso sind die gleichseitige Hyperbel $xy = a^2$, die hyperbolische Spirale $\varrho\theta = a$ und die Klothoide $\mathcal{R}s = a^2$ in derselben Weise verwandt, ferner die Exponentialkurve $y = a e^{x/a}$, die logarithmische Spirale $\varrho = a e^{\theta}$ und die Evolvente der Antiloga $\mathcal{R} = a e^{s/a}$, auch die Kettenlinie, die Summenspirale und die Kettenlinie gleichen Widerstandes, um nur bekannte Kurven anzuführen.

Von diesem Gedanken ausgehend, wollen wir also auch den Familien in rechtwinkligen und natürlichen Koordi-

---

[174]) Der Gedanke einer beliebigen Kurve als Abszissenachse ist durchgeführt z. B. bei M. Petrovich, Stzgsb. böhm. Ges. Prag 1898.

naten näher treten, die den binomischen Spiralen $\varrho = a\,\theta^n$ entsprechen. Da uns aber dies einige Zeit in Anspruch nehmen wird, möchten wir zuvor noch die Frage zu beantworten suchen, ob auch für den Übergang von Polarkoordinaten zu natürlichen Koordinaten, oder umgekehrt, eine geometrische Unterlage geschaffen werden kann.

229. Zu diesem Zwecke werden wir die Kurve $f(\mathcal{R}, s) = 0$ auf einem Kreise vom Radius r statt auf einer Geraden rollen lassen und ebenso wie dort den Ort des Krümmungsmittelpunktes C für den jeweiligen Berührungspunkt suchen. Legen wir durch den Anfangspunkt ($s = 0$) eine Polarachse und nehmen den Mittelpunkt O des Kreises als Pol, so ist dieser Ort in Polarkoordinaten gegeben, wenn wir in $f(\mathcal{R}, s) = 0$ die Substitution

(8) $$\mathcal{R} = \varrho - r\,, \quad s = r\,\theta$$

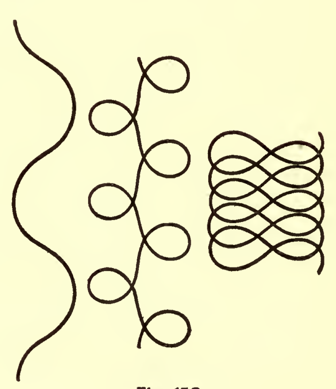
vornehmen. Wir erhalten also die Kurve $f(\varrho - r, r\,\theta) = 0$ als »verallgemeinerte Mannheimsche Kurve«[175]) der abrollenden Kurve. Ihre Konchoide vom Pol aus mit dem Zwischenstück r ist erst diejenige mit der Gleichung $f(\varrho, r\,\theta) = 0$. Lassen wir also Kurven mit möglichst einfacher natürlicher Gleichung auf dem Kreise rollen, so entsprechen ihnen als verallgemeinerte Mannheimsche Kurven nicht die einfachsten Formen in Polarkoordinaten, sondern deren Konchoiden. Will man die in Polarkoordinaten einfachsten Kurven selbst erhalten, so ist es nötig, auf dem Kreise vom Radius r Kurven mit der Gleichungsform $f(\mathcal{R} + r, s) = 0$ rollen zu lassen, die wir »natürliche Konchoiden« der Kurven $f(\mathcal{R}, s) = 0$ nennen wollen.

Die Anwendung dieser Begriffe auf unsere bekannten Kurven verleiht einigen Konchoiden erhöhtes Interesse. Wir erhalten sogleich den Satz: *Rollt eine logarithmische Spirale auf einem Kreise, so beschreibt das jeweilige Krümmungszentrum des Berührungspunktes eine Archimedische Spirale;* in der Tat ist jede Konchoide der letzteren mit ihr selbst kongruent, wie auch alle natürlichen Koncho-

---

[175]) So wurde sie vom Verfasser genannt. S. die Abhdlg. *„Über eine Verallgemeinerung des Begriffes der Mannheimschen Kurve"* in Math.-nat. Mitt. Württemberg (2) **9**, 1907, 1—9. Gleichzeitig befaßte sich, unabhängig davon, mit demselben Ort P. Ernst, Mtsh. Math. Phys. **18**, 1907, 315/6.

iden der ersteren mit der ursprünglichen Spirale kongruent sind. Das Abrollen der Klothoide führt zur Konchoide der hyperbolischen Spirale als verallgemeinerter Mannheimscher Kurve, die Kreisevolvente $\mathcal{R} = \sqrt{2\,a\,s}$ ergibt die parabolische Spirale $\varrho = \sqrt{2\,a\,r\,\theta} + r$ (eine Konchoide der Fermatschen Spirale), die Antiloga $\mathcal{R} = s^2/a$ eine Galileische Spirale $\varrho = r^2\,\theta^2/a + r$. Die spezielle Galileische Spirale $\varrho = r^2\,\theta^2/a$ ergibt sich als verallgemeinerte Mannheimsche Kurve, wenn man die natürlichen Konchoiden der Antiloga, das sind die Kettenlinien, insbesondere die gewöhnliche Kettenlinie und die Pseudokatenarien auf dem Kreise rollen läßt. Die Kurven müssen nur eventuell mit der konkaven Seite gegen den Kreismittelpunkt gewendet abrollen. Läßt man die Evolvente der Antiloga $\mathcal{R} = a\,e^{s/a}$ auf dem Kreise rollen, so erhält man als verallgemeinerte Mannheimsche Kurve die sog. »Konchospirale« $\varrho = a\,e^{r\,\omega/a} + r$, die Konchoide der logarithmischen Spirale.


Fig. 158.

230. Fragt man schließlich nach Kurven, deren verallgemeinerte Mannheimsche Kurven bekannte Konchoiden seien, so werden vor allem die interessieren, welche der Konchoide des Nikomedes und der Pascalschen Schnecke entsprechen. Die beiden Polargleichungen lauten $\varrho = a/\cos\theta + r$ und $\varrho = a\cos\theta + r$. Es handelt sich also um die beiden Kurven, die in gewissem Sinne zueinander reziprok sind

$$(9) \qquad \begin{cases} \mathcal{R} = a/\cos(s/r)\,, \\ \mathcal{R} = a\cos(s/r)\,. \end{cases}$$

Indem wir ihre Diskussion dem Leser überlassen, bemerken wir nur, daß die erstere je nach dem Verhältnis r/a verschiedene Formen annimmt, deren einige in Fig. 158 gegeben sind, während die andere etwa die Gestalt von

Fig. 159 hat[176]. Die Mannheimsche Kurve der letzteren[177] ist die Sinuslinie.

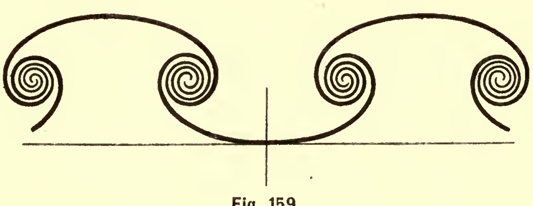


Fig. 159.

Zusätze. 1. Es ist nicht ohne Interesse, auch den Ort des Auges der logarithmischen Spirale zu verfolgen, wenn diese auf einem Kreise rollt. Es beginne die Rollbewegung mit dem Pol in A ($OA = r$) und erfolge, wenn die Spirale mit der konkaven Seite abrollt, im Sinne des Uhrzeigers (Fig. 160). Ist nun die Spirale bis zum Berührungspunkt B fortgeschritten, so möge ihr Auge in P, der zu B gehörige Krümmungsmittelpunkt in C liegen. Schneidet man CP mit der Tangente von B in A', so ist $BA' = \operatorname{arc} BA$, gleich dem abgerollten Bogen der Spirale. Also ist

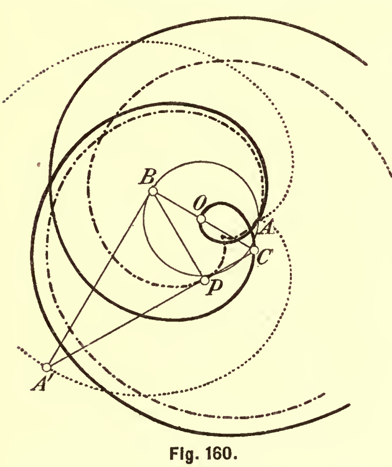


Fig. 160.

$$BC/BA' = R/s = \varkappa,$$

d. i. konstant. Die Gerade $A'C$ ist demnach gegen die Normale $A'B$ der von A' beschriebenen Kreisevolvente unter dem konstanten Winkel $\alpha = \operatorname{arctg} \varkappa$ geneigt und hüllt folglich eine Evolutoide (Nr. 125, Beisp. 2) der Kreisevolvente, d. i. wieder eine Kreisevolvente ein. Nun ist aber P der momentane Berührungs-

[176] Über die bestimmten Integrale, auf die die Bestimmung der Wendepunkte der ersten, sowie der asymptotischen Punkte der zweiten führt, siehe die Bemerkungen von Lerch und Kapteyn im Int. math. **14**, 1907, 155/60.

[177] Diese Kurve tritt auf als Bahnkurve des Berührungspunktes einer Kugel mit einer Ebene, wenn die drei Trägheitsmomente der Kugel verschieden sind, ihr Schwerpunkt aber im Mittelpunkt liegt und noch eine besondere Bedingung erfüllt ist. Vgl. E. Stübler, Habil.-Schrift Stuttgart 1906, 36/39.

punkt von $A'C$ mit der Enveloppe. *Also beschreibt der Pol P eine gewöhnliche Kreisevolvente.* Die Rechnung ergibt für ihren zugehörigen Kreisradius $\bar{r} = r \sin\alpha$; ihr Grundkreis hat natürlich denselben Mittelpunkt O, ihre Anfangsrichtung ist gegen OA um den Winkel $\chi = -(\alpha + \operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{2}\pi)$ gedreht[178]).

2. Dem Übergang von kartesischen zu Polarkoordinaten kann auch eine räumliche Grundlage gegeben werden. Es sei in der (x, y)-Ebene eine Kurve $\varrho = f(\theta)$ gegeben. Wir erteilen jedem Punkte dieser Kurve dieselbe Schraubenbewegung um die z-Achse. Dann wird eine Schraubenfläche allgemeiner Art entstehen, deren »Normalschnitt« unsere Kurve ist. Den »Meridianschnitt«, durch dessen Schraubung die Fläche ebenfalls erzeugt werden kann, erhalten wir, indem wir für jeden Punkt der Grundkurve die Schraubung bis zu einer Ebene fortsetzen, die mit der (x, z)-Ebene den Winkel ψ einschließt. Der Punkt mit den Koordinaten ϱ, θ geht hierbei in den Punkt $x = \varrho\cos\psi$, $y = \varrho\sin\psi$, $z = -r(\psi - \theta)$ über, wo r durch die Ganghöhe ausgedrückt werden kann. In der (x, z)-Ebene $(\psi = 0)$ hat man also für den Meridianschnitt die Gleichungen $x = \varrho$, $z = r\theta$, die wegen $\varrho = f(\theta)$ in $x = f(z/r)$ übergeht. Wir können also sagen: *Ist* $\mathsf{F}(x, z) = 0$ *der Meridianschnitt einer Schraubenfläche, so ist* $\mathsf{F}(\varrho, r\theta) = 0$ *ihr Normalschnitt*[179]). Setzt man $\varrho = f(r\theta) + r$, so wird $x = f(z) + r$, was durch eine Parallelverschiebung der (y, z)-Ebene in $x' = f(z)$ übergeht. Halten wir diese beiden Gleichungen mit $\mathcal{R} = f(s)$ zusammen, so können wir sagen: *Ist die verallgemeinerte Mannheimsche Kurve einer Kurve* K *Normalschnitt einer Schraubenfläche, so ist die Mannheimsche Kurve von* K *Meridianschnitt derselben Schraubenfläche.*

231. Wir wollen nun die Familie der Kurven mit der natürlichen Gleichung

$$\mathcal{R} = a^{1-n} s^n, \tag{10}$$

wo n eine rationale Zahl sei, in Kürze untersuchen. G. Pirondini nannte sie »Pseudospiralen«[180]). Für den Tangentenwinkel erhält man, den Fall $n = 1$ (logarithmische Spirale) ausgenommen,

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\mathcal{R}} = \frac{s^{1-n}}{(1-n)a^{1-n}}. \tag{10*}$$

---

[178]) S. den Aufsatz des Verf. S. 4. Der Satz wurde schon von G. B. Airy aufgestellt, Trans. Cambr. math. Soc. 1827, S. 277.

[179]) E. Duporcq, Int. math. **8**, 1901, 313; G. Loria, Bibl. math. **7**, 1906, 67/68; P. Ernst a. a. O.

[180]) Journ. Sc. Math. Coimbra **15**, 1905, S. 145—173.

Hieraus ist zu ersehen, daß für $n < 1$ im Anfangspunkte $s = 0$ auch $\tau = 0$ ist. Dieser ist also jedenfalls kein asymptotischer Punkt. Es ist aber zu unterscheiden zwischen $0 < n < 1$, wo $\mathcal{R} = 0$, und $n < 0$, wo $\mathcal{R} = \infty$ wird. Da aber diese Werte vielfache Wurzeln der Gleichung (10) sind, ist der Schluß, daß im ersten Falle eine Spitze, im zweiten ein Wendepunkt auftrete, unberechtigt. Man kann nur behaupten, daß die Kurve im ersten Falle eine Berührung niedrigerer Ordnung mit der Tangente habe, im zweiten eine solche höherer Ordnung. In der Tat ist hier

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x^{2-n}} = \frac{1}{2-n} \lim \frac{\operatorname{tg} \Delta \tau}{\Delta x^{1-n}} = \frac{1}{(2-n)(1-n)} \lim \frac{\Delta \tau / \Delta x}{\Delta x^{-n}}$$
$$= \frac{1}{(2-n)(1-n)} \lim \frac{s^n}{\mathcal{R}} = \frac{a^{n-1}}{(2-n)(1-n)} \lesseqgtr 0\,,$$

d. h. Δy wird zu Null wie Δx^{2-n}, also niedriger als Δx^2 für $0 < n < 1$ $(\mathcal{R} = 0)$ und höher als Δx^2 für $n < 0$ $(\mathcal{R} = \infty)$. Ist nun erstens n der Quotient einer geraden Zahl durch eine ungerade, so nimmt $\mathcal{R}$, wenn s durch 0 geht, wieder dieselben Werte an und die Kurve verhält sich im Anfangspunkt wie in einem gewöhnlichen Punkte (Δy ändert das Zeichen nicht mit Δx). Ist aber zweitens n der Quotient von zwei ungeraden Zahlen, so wechselt $\mathcal{R}$, wenn s durch 0 geht, das Zeichen (also auch Δy, wenn Δx negativ wird) und die Kurve hat im Anfangspunkte eine Inflexion. Drittens kann n auch noch durch den Quotienten einer ungeraden durch eine gerade Zahl dargestellt werden. Dann gibt es für jeden positiven Wert von s zwei gleiche, durch das Zeichen zu unterscheidende Werte von $\mathcal{R}$, während für negative s $\mathcal{R}$ imaginär wird (für jedes positive Δx existieren zwei durch das Zeichen voneinander verschiedene Werte von Δy). Der Anfangspunkt ist eine Spitze.

232. Es sei nun zunächst $0 < n < 1$, so wird für $s = \infty$ $\tau = \infty$ und $\mathcal{R} = \infty$. Die Kurven gehen also in spiraligen Windungen ins Unendliche. Ihre beiden Zweige schließen im Anfangspunkt nach der vorhin gegebenen Unterscheidung wie bei einer gewöhnlichen Kreisevolvente, die zu den vorliegenden Kurven gehört $(n = \frac{1}{2})$, wie bei einer Archimedischen oder einer Fermatschen Spirale aneinander.

Wenn $n < 0$ wird, hat man für $s = \infty$ auch $\tau = \infty$, aber $\mathcal{R} = 0$. Es treten also asymptotische Punkte auf, die die Koordinaten haben

$$x_0 = (1-n)^{\frac{n}{1-n}} a \int_0^\infty \tau^{\frac{n}{1-n}} \cos\tau \, d\tau \,, \quad y_0 = (1-n)^{\frac{n}{1-n}} a \int_0^\infty \tau^{\frac{n}{1-n}} \sin\tau \, d\tau \,.$$

Diese Integrale lassen sich durch die Γ-Funktion ausdrücken. Man hat nämlich[181])

$$\int_0^\infty \frac{\cos\tau}{\tau^\mu} d\tau = \frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi}\,, \quad \int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau^\mu} d\tau = \frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi}\,,$$

also etwa

$$x_0 = (1-n)^{\frac{n}{1-n}} a \cdot \frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{n}{n-1}\right)\cos\frac{n\pi}{2(1-n)}}\,.$$

Dieser Ausdruck geht nach der Formel $\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \pi/\sin\mu\pi$[182]) über in

$$x_0 = (1-n)^{\frac{n}{1-n}} a \cdot \frac{\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{1-n}\right)\sin\frac{\pi}{1-n}}{2\pi\sin\frac{\pi}{2(1-n)}}$$

und schließlich erhält man

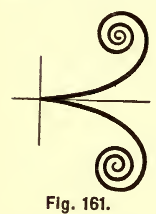
$$(11^*) \quad \begin{cases} x_0 = (1-n)^{\frac{n}{1-n}} a\,\Gamma\left(\frac{1}{1-n}\right)\cos\frac{\pi}{2(1-n)}\,, \\ y_0 = (1-n)^{\frac{n}{1-n}} a\,\Gamma\left(\frac{1}{1-n}\right)\sin\frac{\pi}{2(1-n)}\,. \end{cases}$$

Die Entfernung jedes der asymptotischen Punkte vom Anfangspunkt ist also $(1-n)^{\frac{n}{1-n}} a\,\Gamma\left(\frac{1}{1-n}\right)$, die Richtung nach dem asymptotischen Punkt bildet mit der Tangente des Anfangspunktes den Winkel $\pi/2(1-n)$. Nach der obigen Unterscheidung schließen die zwei Zweige im Anfangspunkt aneinander wie bei der Klothoide ($n = -1$), wie bei einem Zweig der Fig. 159 oder wie in Fig. 161.

---

181) S z. B. bei E. Cesàro, Algebr. Anal. S. 781.
182) Ebd. S. 396.

Zwischen den beiden betrachteten Formen steht für $n=0$ der Kreis. Für $n=1$ kommt nun die logarithmische Spirale. Sobald $n>1$, wird nach (10*) für $s=0$ $\tau=\infty$, also ist für $n \gtreqless 1$ im Anfangspunkte ein asymptotischer Punkt. Während aber die logarithmische Spirale mit unendlich vielen Windungen ins Unendliche geht, nehmen die Pseudospiralen für $s=\infty$ eine bestimmte Richtung an, da für $s=\infty$ $\tau=0$ wird. Um zu untersuchen, ob eine Asymptote vorhanden ist, bilden wir


Fig. 161.

$$\bar{\tau}=\int\limits_{s}^{\infty}\frac{ds}{\mathcal{R}}=\frac{a^{n-1}}{(n-1)\,s^{n-1}}\,,$$

dann ist die Entfernung p des asymptotischen Punktes von der Tangente im unendlich fernen Punkte gegeben durch

$$p=\int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{R}\sin\bar{\tau}\,d\bar{\tau}=(n-1)^{\frac{n}{1-n}}\,a\int\limits_{0}^{\infty}\bar{\tau}^{-\frac{n}{n-1}}\sin\bar{\tau}\,d\bar{\tau}\,.$$

Ersetzt man an der unteren Grenze, wo die Integralfunktion unendlich groß wird, $\sin\bar{\tau}$ durch $\bar{\tau}$, so sieht man, daß dort das Integral sich wie $\int\tau^{-\frac{1}{n-1}}d\tau$ verhält, also wie $\frac{n-1}{n-2}\tau^{\frac{n-2}{n-1}}$. Dieser Wert und damit p ist für $\tau=0$ nur endlich für $n>2$; es wird dann

$$p=(n-1)^{\frac{1}{1-n}}\,a\,\Gamma\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\sin\frac{\pi}{2(n-1)}\,.$$

Die Pseudospiralen trennen sich also für $n>1$ wieder in zwei Familien. Für $1<n\leqq 2$ haben sie zwei Zweige ohne Asymptoten, die nach den obigen drei Unterscheidungen verschieden gegeneinander angeordnet sein können (Fig. 162). Ob die asymptotischen Punkte nicht etwa vereinigt sind, läßt sich aus der bloßen Gleichung nicht ersehen. Für die Antiloga ($n=2$) erkannten wir dies durch einen Grenzübergang. Wird $n>2$, so haben die Pseudospiralen eine Asymptote. Es gibt wieder dreierlei Formen (Fig. 163).

233. Die Pseudospiralen genießen die Eigentümlichkeit, daß ihre Evoluten (und also alle sukzessiven Evoluten) Kurven derselben Art sind. Denn die oft angewendeten Gleichungen $\overline{s} = \mathcal{R}$, $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}\, d\mathcal{R}/ds$ ergeben aus (10)

$$\overline{\mathcal{R}} = n\, a^{\frac{1-n}{n}} \overline{s}^{\frac{2n-1}{n}} \tag{12}$$

als Gleichung der Evoluten. Man findet z. B. als Evolute der Antiloga $\mathcal{R} = 2\, a^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{3}{2}}$. Das ist, obwohl die Antiloga selbst den in der Art verschiedenen Exponenten $\frac{2}{1}$ hat, doch eine Kurve desselben Typus wie die Antiloga, da sich die Formen (*a*) und (*c*) der Fig. 162 mangels einer Asymptote nicht unterscheiden lassen. Als Evolute der

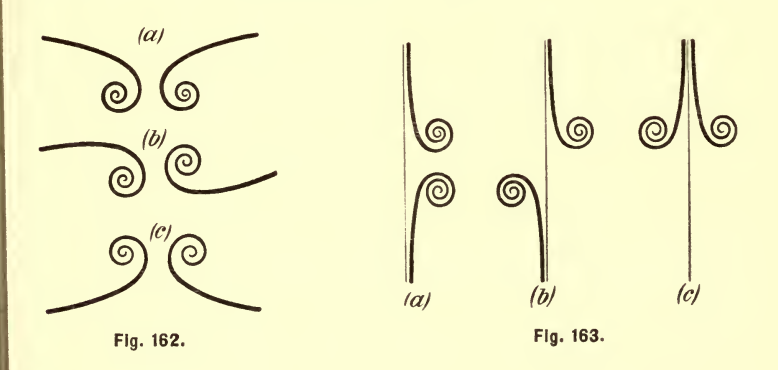


Fig. 162. Fig. 163.

Klothoide ergibt sich $\mathcal{R} = -a^{-2} s^3$. Das ist ersichtlich eine Kurve der Art (*b*) in Fig. 163 mit Asymptote. Und zwar sieht man dies nicht nur aus der Lage der asymptotischen Punkte, sondern auch aus dem unendlich fernen Punkt. Denn für den Übergang von positiven zu negativen Werten von s durch ∞, der hier stattfindet, gelten dieselben Regeln, die wir in Nr. 231 für den Übergang durch $s = 0$ aufgestellt haben. Daß man hier den unendlich fernen Punkt als Wendepunkt, im Falle (*a*) der Fig. 163 aber als gewöhnlichen auffassen muß, da $\mathcal{R}$ im ersten Falle das Zeichen wechselt, im zweiten nicht, kann nicht befremden, da zu der (üblichen) umgekehrten Auf-

fassung, die aus projektiven Anschauungen erwuchs, keine Veranlassung gegeben ist[182a]).

§ 28. *W*-Kurven.

234. Nunmehr wollen wir uns zu den »binomischen Kurven« mit der kartesischen Gleichung

$$(1) \qquad y = a^{1-n} x^n$$

wenden. Es mögen aber, der Allgemeinheit wegen, die zugrunde gelegten Achsen schiefwinklige sein mit dem Achsenwinkel ω. Da jedoch der Gebrauch dieser Achsen, obwohl sie in der Praxis häufig auftreten, in den modernen Lehrbüchern ganz vernachlässigt wird, müssen wir erst einige einschlägige Formeln aufstellen. Es sei τ wie immer der Tangentenwinkel, $\mathfrak{T}$ die Länge der Tangente vom Kurvenpunkt P bis zum Schnittpunkt B mit der x-Achse, $\mathfrak{S}$ die Subtangente BA (die schiefe Projektion von $\mathfrak{T}$ auf die x-Achse; vgl. Fig. 164). Dann ist, wenn $dy/dx = y'$ gesetzt wird

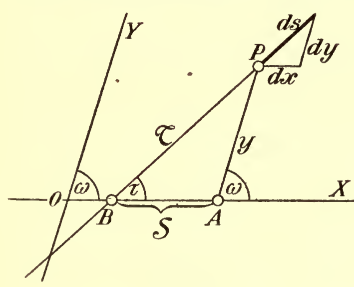


Fig. 164.

$$y' = \frac{\sin\tau}{\sin(\omega - \tau)}, \quad \text{woraus} \quad \operatorname{tg}\tau = \frac{y'\sin\omega}{1 + y'\cos\omega}.$$

Da infolgedessen

$$\cos\tau = \frac{1 + y'\cos\omega}{\sqrt{1 + 2y'\cos\omega + y'^2}}, \quad \sin\tau = \frac{y'\sin\omega}{\sqrt{1 + 2y'\cos\omega + y'^2}},$$

so ergibt sich

$$(2) \qquad \frac{d\tau}{dx} = \frac{y''\sin\omega}{1 + 2y'\cos\omega + y'^2}.$$

[182a]) E. Cesàro, der in seinem Buche die natürlichen Koordinaten zum Ausgangspunkt nimmt, kann infolgedessen gar nicht auf den Begriff »unendlich ferne Gerade« kommen und faßt das Unendliche als Punkt auf.

Außerdem ist $ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos\omega$, oder

(3) $$\frac{ds}{dx} = (1 + 2y'\cos\omega + y'^2)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Durch Division von (2) in (3) erhält man

(4) $$\mathcal{R} = \frac{(1 + 2y'\cos\omega + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''\sin\omega}\,.$$

Wie man sieht, geht diese Formel für $\omega = \frac{1}{2}\pi$ sofort in die für rechtwinklige Koordinaten über. Ferner hat man $\mathcal{S} : y = \sin(\omega - \tau) : \sin\tau$ und mit Hilfe des obigen Wertes von y'

(5) $$\mathcal{S} = y/y'\,.$$

Ebenso ergibt sich für die Tangente

(6) $$\mathcal{T} = y\frac{\sin\omega}{\sin\tau} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + 2y'\cos\omega + y'^2}\,.$$

Da nun in unserem Falle

$$y' = n\,a^{1-n}x^{n-1}\,,$$
$$y'' = n(n-1)\,a^{1-n}x^{n-2}\,,$$

so wird nach (5)

(7) $$\mathcal{S} = x/n\,,$$

also die Tangente ohne weiteres konstruierbar. Aus (5) und (6) erhält man

$$\sqrt{1 + 2y'\cos\omega + y'^2} = \mathcal{T}/\mathcal{S}\,,$$

und wenn man diesen Wert in (4) einsetzt

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{T}^3}{n(n-1)\,a^{1-n}x^{n-2}\mathcal{S}^3\sin\omega} = \frac{n\,\mathcal{T}^3}{(n-1)\,y\,\mathcal{S}\sin\omega}\,.$$

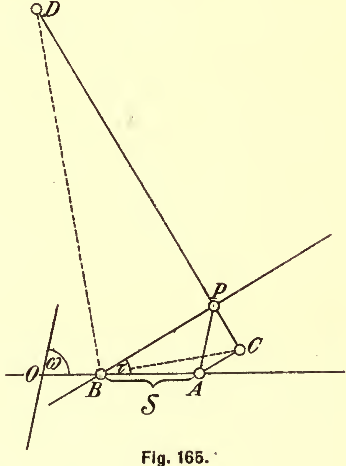


Fig. 165.

Daraus wird nun, unter Benützung von (6)

(8) $$\mathcal{R} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{\mathcal{T}^2}{\mathcal{S}\sin\tau} = \frac{n}{n-1}\cdot\mathcal{R}'\,.$$

Hiernach läßt sich $\mathcal{R}'$, und also auch $\mathcal{R}$, sofort konstruieren. Man ziehe $AC \parallel BP$ (C auf der Normale), dann

ist $PC = \mathcal{S} \sin \tau$. Nun verbinde man B mit C und errichte $BD \perp BC$ (D auf PC), dann ist $PD = \mathcal{R}'$ [183]). Indem man $\mathcal{R}'$ mit $n/(n-1)$ multipliziert, erhält man $\mathcal{R}$ der Länge, nicht immer der Richtung nach. Diese geht aber aus der Gestalt der Kurve ohne weiteres hervor.

235. Für den Verlauf der Kurve (1) ist zwischen den Werten $n \gtrless 0$ zu unterscheiden. Es kann dann — wir betrachten zunächst nur rationale Werte von n — auch immer $|n| > 1$ vorausgesetzt werden, also wenn wir

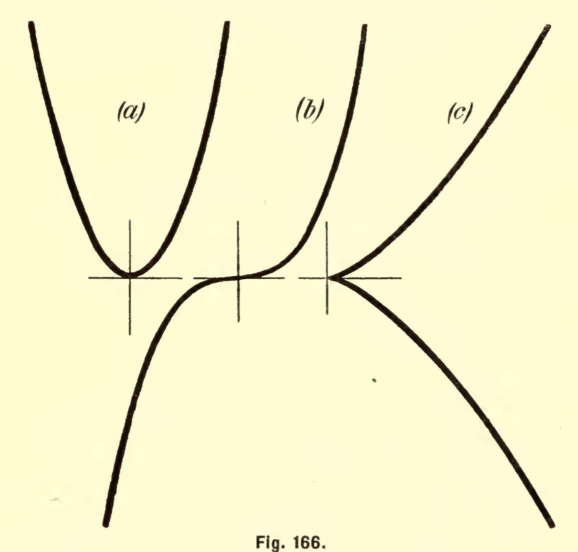


Fig. 166.

$|n| = p/q$ setzen, $p > q$. Denn dem Werte q/p des Exponenten entspricht dieselbe Kurve mit vertauschten Koordinatenachsen. Ist nun $n > 0$, so hat die Kurve (»höhere Parabel«) in jedem Falle einen im Anfangspunkt (mit der x-Achse als Tangente) beginnenden, gegen die x-Achse konvexen, aufsteigenden Ast im ersten Quadranten. Der zweite Ast liegt symmetrisch gegen den ersten in bezug auf die y-Achse im Falle (a) (Typus des gewöhnlichen Punktes im Ursprung), in bezug auf den Anfangspunkt im Falle (b)

[183]) F. Dingeldey, Zeitschr. Math. Phys. **54**, 1906, 89. Eine andere Konstruktion gab F. Kosch, ebd. **45**, 1900, 165.

(Typus des Wendepunktes), in bezug auf die x-Achse im Falle (c) (Typus der Spitze), nach den bei den Pseudospiralen (Nr. 231) gegebenen Unterscheidungen (vgl. Fig. 166).

Außer im Falle $n = 2$ (gewöhnliche Parabel) ist der Anfangspunkt immer ein singulärer Punkt, für $n = 3$ ($y = a^{-2} x^3$; »kubische Parabel«) ein gewöhnlicher Wendepunkt (Liniensingularität), für $n = \frac{3}{2}$ ($y^2 = a^{-1} x^3$; Neilsche Parabel) eine gewöhnliche Spitze (Punktsingularität). Fig. 166 gibt die genannten drei Kurven wieder. In allen anderen Fällen ist der Anfangspunkt eine höhere Singularität, die aus den eben angeführten fundamentalen Singularitäten kann zusammengesetzt gedacht werden.

236. Um diese Analyse des Anfangspunktes wirklich vorzunehmen, schreiben wir zunächst, $n = p/q$ setzend, Gleichung (1) in der Form

$$y = \varkappa x^{p/q}, \qquad [p > q] \tag{9}$$

wo $\varkappa = a^{(q-p)/q}$ zu denken ist. Die Kurve ist von der Ordnung p, der singuläre Punkt heißt von der Ordnung q, weil eine beliebige durch ihn gehende Gerade (z. B. die y-Achse) dort q koinzidierende Schnittpunkte mit der Kurve hat[184]). Für die Klasse des Zweiges kann man zwar einem allgemeinen Satze die Zahl $p - q$ entnehmen, wir wollen aber doch, auch aus anderen Gründen, gleich die Linienkoordinatengleichung der Kurve aufstellen. Da nur die x-Achse singulär ist, d. i. die Gerade $u = 0$, $w = 0$, setzen wir die Koordinate $v = 1$. Man hat nun die Gleichung der Tangente an (9) zu bilden (laufende Koordinaten ξ, η):

$$-\xi \varkappa n x^{n-1} + \eta + (n-1) y = 0,$$

wo $p/q = n$ gesetzt ist. Diese ist zu vergleichen mit

$$\xi u + \eta + w = 0.$$

So ergibt sich

$$u = -\varkappa n x^{n-1}, \quad w = (n-1) y,$$

woraus man mit Hilfe von (9) die gewünschte Gleichung erhält

$$p^p w^{p-q} = (-1)^p q^q (p-q)^{p-q} a^{p-q} u^p \tag{10}$$

[184]) Vgl. für das folgende des Verf. *Alg. K.*, Abschn. VII.

oder kurz

(10*) $$w = \varkappa' u^{\frac{p}{p-q}}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Klasse der Kurve ihrer Ordnung p gleich ist und gibt für die Klasse des singulären Punktes wirklich $p-q$, d. h. es fallen $p-q$ Tangenten der Kurve, von einem Punkte der x-Achse aus, in die singuläre Tangente.

237. Um nun die Zahlen δ bzw. ϱ der Doppelpunkte und Spitzen festzustellen, die der singuläre Punkt absorbiert, muß man zuerst den sogenannten »Diskriminantenindex« $j = 2\delta + 3\varrho$ suchen, d. i. die Zahl, um die die Klassenzahl $p(p-1)$ der ohne Punktsingularitäten gedachten Kurve sich durch den Einfluß des singulären Punktes verringert. Man denkt sich zu diesem Zwecke den Zweig in q Partialzweige zerlegt, die den q^{ten} Einheitswurzeln entsprechen. Diese kann man also schreiben, wenn $\varepsilon^q = 1$

$$y_1 = \varkappa x^{p/q},\ y_2 = \varkappa \varepsilon x^{p/q},\ y_3 = \varkappa \varepsilon^2 x^{p/q},\ \ldots,\ y_q = \varkappa \varepsilon^{q-1} x^{p/q}.$$

Jeder dieser Zweige schneidet jeden anderen in p/q Punkten, da $y_i - y_k = \varkappa x^{p/q}(\varepsilon^{i-1} - \varepsilon^{k-1})$. Die Multiplizität des Schnittes der Kurve mit sich selbst in diesem Punkte ist folglich $\frac{1}{2} q(q-1) \cdot p/q = \frac{1}{2} p(q-1)$. Das Doppelte dieser Multiplizität ist der Diskriminantenindex. Wir haben so $j = p(q-1)$ und da man weiß, daß $\varrho = q-1$, so ergibt sich $\delta = \frac{1}{2}(p-3)(q-1)$.

Nennt man δ' und ϱ' die Zahl der Doppel- und Wendetangenten, die in der x-Achse vereinigt liegen, so erhält man entsprechend nach (10*)

$$j' = p(p-q-1),\ \varrho' = p-q-1,\ \delta' = \tfrac{1}{2}(p-3)(p-q-1).$$

Beisp. Ist $q = 1$ (n eine ganze Zahl), so ist der Anfangspunkt eine reine Liniensingularität, ist $p = q+1$ (n von der Form $1 + 1/g$), eine reine Punktsingularität. Wir sahen dies schon an der kubischen bzw. Neilschen Parabel. Als weitere Beispiele wollen wir die Parabeln der vierten und fünften Ordnung nehmen. Es gibt zwei solche vierter Ordnung, die »Flachparabel« $y = a^{-3}x^4$ ($\varrho' = 2$, $\delta' = 1$) und die »Spitzparabel« $y = a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{4}{3}}$ ($\varrho = 2$, $\delta = 1$), die mit den Auflösungen des Flach- und Spitzpunktes in den Fig. 167 und 168 wiedergegeben sind. Auch hier ist die erste Singularität eine reine Linien-, die zweite eine bloße Punktsingularität.

Von der 5. Ordg. hat man 4 Parabeln, deren Singularitäten im Ursprung zu je zweien einander polarreziprok entsprechen (vgl. Fig. 169). Es sind (*a*) die »Wendeflachparabel« ($y = a^{-4} x^5$; $\varrho' = 3$, $\delta' = 3$, Liniensingularität) und (*b*) die »Rückkehrspitzparabel« ($y = a^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{5}{4}}$, $\varrho = 3$, $\delta = 3$, Punktsingularität), ferner (*c*) die »Rückkehrflachparabel« ($y = a^{-\frac{3}{2}} x^{\frac{5}{2}}$; $\varrho = \delta = 1$, $\varrho' = \delta' = 2$) und (*d*) die »Wendespitzparabel« ($y = a^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{5}{3}}$; $\varrho = \delta = 2$, $\varrho' = \delta' = 1$). Die beiden letzteren Singularitäten sind gemischter Art[185]).

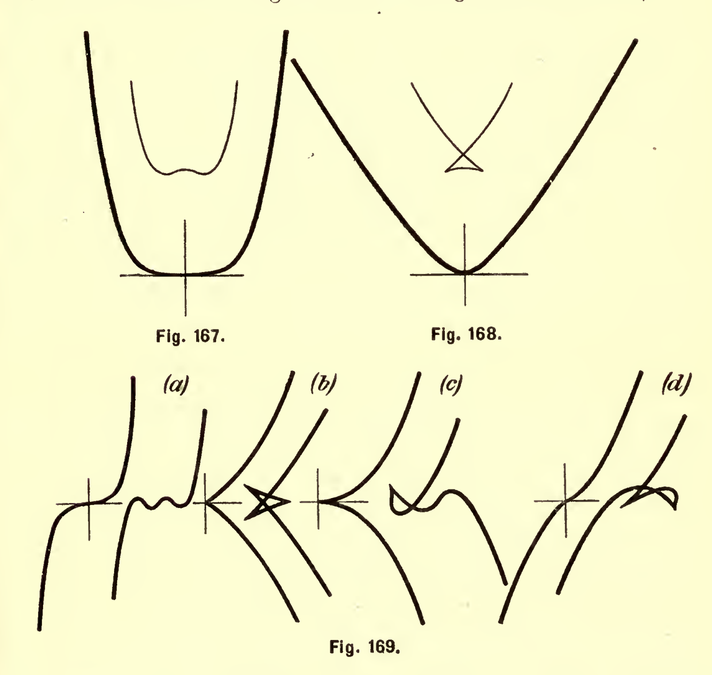


Fig. 167.

Fig. 168.

Fig. 169.

238. Der singuläre Anfangspunkt, bzw. sein Diskriminantenindex $j = p(q - 1)$ ist natürlich noch nicht imstande, die allgemeine Klassenzahl $p(p - 1)$ auf die wirkliche p herabzudrücken. Unsere Kurve hat aber auch

[185]) Der Leser sei darauf aufmerksam gemacht, daß die von DE GUA (s. P. SAUERBECK, *Anal. Gem. nach de Gua*, Leipzig 1902, 28—36) gegebenen Auflösungen dieser Singularitäten zum Teil nur der Reduktion des Geschlechtes der Kurve, nicht aber der Reduktion der Klasse entsprechen, welche die Singularität verursacht.

den unendlich fernen Punkt der y-Achse, für welchen $x = 0$ und $z = 0$ ist, als singulären Punkt. In der Tat, homogenisieren wir Gleichung (9), so ergibt sich $y^q z^{p-q} = \varkappa x^p$ und wenn wir $y = 1$ setzen, d. h. durch Projektion die x-Achse mit der unendlich fernen Geraden vertauschen,

$$z = \varkappa' x^{\frac{p}{p-q}}. \tag{11}$$

Hieraus ersieht man, daß dieser Punkt ein singulärer Punkt gleicher Art, wie der Anfangspunkt ist. Ja noch mehr; da (11) mit (10*) in den Exponenten übereinstimmt, können wir sagen: *Die Singularität des unendlich fernen Punktes ist die zu der des Anfangspunktes reziproke.*

Polarisiert man demnach unsere binomische Parabel in bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt, so entsteht eine Kurve derselben Ordnung (Klasse) mit den nämlichen zwei Singularitäten. Legt man einen Kegelschnitt zugrunde, der die Gleichung $\alpha x^2 + \beta y^2 + 1 = 0$ hat, so lauten die Transformationsformeln

$$\vartheta u = \alpha x, \quad \vartheta v = \beta y, \quad \vartheta w = z,$$

und es kann demnach durch passende Wahl von α und β erreicht werden, daß die Kurve zu sich selbst polarreziprok ist.

Aus (23) ergeben sich in Analogie zu den beim Anfangspunkt gegebenen Formeln für die unendlich ferne Singularität die Zahlen $\bar{j} = p(p-q-1)$, $\bar{\varrho} = p - q - 1$, $\bar{\delta} = \frac{1}{2}(p-3)(p-q-1)$, $\bar{\varrho}' = q - 1$, $\bar{\delta}' = \frac{1}{2}(p-3)(q-1)$. Nun ist $j + \bar{j} = p(q-1) + p(p-q-1) = p(p-2)$ die Gesamtreduktionszahl für die Klasse. Diese muß also werden $p(p-1) - p(p-2) = p$, wie oben direkt gezeigt wurde. Ferner ist die Summe aller einfachen Punktsingularitäten $\varrho + \delta + \bar{\varrho} + \bar{\delta} = (q-1) + \frac{1}{2}(p-3)(q-1) + (p-q-1) + \frac{1}{2}(p-3)(p-q-1) = (p-2) + \frac{1}{2}(p-3)(p-2) = \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$. Für die Summe $\varrho' + \delta' + \bar{\varrho}' + \bar{\delta}'$ ergibt sich dieselbe Zahl. Also ist die binomische Kurve rational. Dies ist übrigens selbstverständlich, da man statt (9) setzen kann

$$x = t^q, \quad y = \sqrt[q]{\varkappa}\, t^p. \tag{12}$$

Beisp. Vom projektiven Standpunkt aus sind nach dem obigen die Flach- und Spitzparabel, sowie je zwei der Parabeln 5. Ordnung nicht verschieden. Denn es ist nur die Lage ihrer zwei singulären Punkte jedesmal vertauscht. Fig. 170 gibt das Bild einer Projektion der Flach- (oder Spitz-) Parabel ins Endliche. Das Achsenkreuz mit der unendlich fernen Geraden wird zu einem Dreieck, auf welches als Koordinatendreieck bezogen die Kurve die Gleichung hat

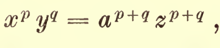
$$x_2\, x_3^3 = \lambda\, x_1^4\,.$$

Fig. 170.

239. Es ist nun noch der Fall ins Auge zu fassen, daß in Gleichung (1) der Exponent n negativ, etwa $= -p/q$ $[p > q]$ ist. Dann haben wir es mit »höheren Hyperbeln« von der Gleichung

$$(13) \qquad x^{\frac{p}{q}}\, y = a^{\frac{p+q}{q}}$$

zu tun. Führen wir aber wieder z ein, so kann man die Gleichung schreiben



$$(13^*) \qquad x^p\, y^q = a^{p+q}\, z^{p+q}\,,$$

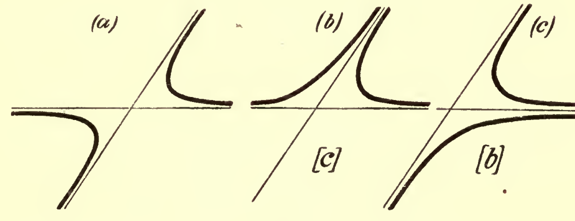


Fig. 171.

der wir, je nachdem wir x oder $y = 1$ setzen, die beiden Formen geben können

$$y = \varkappa\, z^{\frac{p+q}{q}}\,, \qquad x = \varkappa' z^{\frac{p+q}{p}}\,,$$

d. h. wir haben eine Kurve der $(p+q)^{\text{ten}}$ Ordg., die in den unendlich fernen Punkten der Achsen singuläre Punkte der q^{ten} bzw. p^{ten} Ordg. hat mit der x-Achse, bzw. der y-Achse als Tangenten (Asymptoten). Die drei charakteristischen Formen sind demnach entsprechend der immer benützten Einteilung die der Fig. 171, denen die Gleichungen

$$x\, y = a^2\,, \quad x^2\, y = a^3\,, \quad x\, y^2 = a^3$$

entsprechen. Bei höheren Kurven entfernt sich, je nachdem die Berührung flach oder spitz erfolgt, die Kurve mehr oder weniger von der Asymptote. Man kann hiernach jede höhere Hyperbel in eine höhere Parabel projizieren, indem man nur den einen unendlich singulären Punkt ins Endliche verlegt[186]).

240. Bevor wir aber dazu übergehen, die in Frage stehenden Kurven vom rein projektiven Standpunkte aus zu betrachten, wollen wir noch einige Worte über die Quadratur und Rektifikation der binomischen Kurven selbst sagen. Sieht man vom Exponenten $n = -1$ ab, so ergibt sich für die Fläche

$$\mathcal{F}/\sin\omega = a^{1-n}\int\limits_{x_0}^{x} x^n\,dx = \frac{a^{1-n}}{n+1}\left(x^{n+1} - x_0^{n+1}\right) = \frac{x\,y - x_0\,y_0}{n+1}\,.$$

Dieses Resultat läßt sich leicht interpretieren, besonders für den Fall $n > 0$, wo $x_0 = y_0 = 0$ genommen werden kann. Ist $n < 0$, so hat an der Stelle $x_0 = y_0 = 0$ das Integral nur für $|n| < 1$ einen Sinn; dafür kann es aber bis $x_0 = \infty$ erstreckt werden, wenn $|n| > 1$ ist. Man wird sofort bemerken, daß die integrierbare unendlich sich ausdehnende Fläche immer zu der flachen Stelle der Kurve sich hinerstreckt.

Bezüglich der Rektifikation muß man sich auf rechtwinklige Achsen beschränken, um überhaupt auf integrable Fälle zu stoßen. Unter dieser Voraussetzung wird

$$s = \int\sqrt{1 + n^2\,a^{2(1-n)}\,x^{2(n-1)}}\,dx\,.$$

Dies Integral gehört zu den binomischen, deren Differentiale von der Form $x^\lambda(a + b\,x^\mu)^\nu\,dx$ sind. Man weiß, daß solche Differentiale integrierbar sind 1. wenn ν eine ganze Zahl ist, 2. wenn $(\lambda+1)/\mu$ oder 3. wenn $(\lambda+1)/\mu + \nu$ eine ganze Zahl γ ist. Die erste Bedingung ist hier nicht erfüllt. Für die zweite muß, da $\lambda = 0$, $1/(2n-2) = \gamma$, also $n = 1 + 1/2\gamma$ sein; für die dritte findet man ebenso $n = 1 + 1/(2\gamma - 1)$. Wenn also n von der Form $1 + 1/g$ ist, wo g irgend eine ganze Zahl (>1) bedeutet, ist die binomische Kurve (durch algebraische bzw. logarithmische

---

[186]) Die höheren Hyperbeln heißen auch, wegen ihrer Verwendung in der Thermodynamik »polytropische Kurven«.

Funktionen) rektifizierbar. Das ist nach dem obigen dann der Fall, wenn der Anfangspunkt eine reine Punktsingularität ist.

Die einfachste und am frühesten erkannte Kurve dieser Art ist die Neilsche Parabel[187]) für $g = 2: y = a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$. Für ihren Bogen ergibt sich

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{x}{a}}\, dx = \frac{8}{27} a \left\{ \left(1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\}.$$

Sie ist also algebraisch rektifizierbar. Abgesehen von einer interessanten mechanischen Eigenschaft ist sie auch als Evolute der Parabel bemerkenswert[188]) (vgl. Nr. 267, Beisp. 3).

241. Wir wollen nun in Gleichung (1) den Exponenten n im allgemeinen als irrational voraussetzen. Dann stellt die Gleichung transzendente Kurven[189]) dar, deren Näherungskurven die bisher besprochenen algebraischen Kurven sind. So ist z. B. für die Kurve $y x^{\sqrt{2}} =$ konst. die algebraische Kurve $y x^{1,41} =$ konst. eine Näherungskurve. Es ist dies die sogenannte »Adiabate«, die für zweiatomige Gase (z. B. Luft) das Poissonsche Gesetz $p v^k =$ konst. veranschaulicht. Legen wir dann die drei Seiten des Fundamentaldreiecks ins Endliche, so können wir die Kurven schreiben $x_1^p x_2^q = \varkappa x_3^{p+q}$ oder

$$x_1^p x_2^q x_3^r = \varkappa, \tag{14}$$

mit der Bedingung $p + q + r = 0$, die ohne weiteres durch die Homogeneität der Koordinaten geboten ist. Diese allgemeinen Kurven nun spielen eine bedeutende Rolle in der Lehre von den projektiven Transformationen. Wir wollen dies dem Leser wenigstens in den Grundzügen klar zu machen suchen.

---

[187]) Neils Entdeckung wurde 1659 von Wallis veröffentlicht. Dasselbe fanden ungefähr zu gleicher Zeit Fermat und Heuraet.

[188]) Den Übergang von den Evoluten der Mittelpunktskegelschnitte zur Parabelevolute hat der Verf. genauer studiert. S. Zeitschr. math. nat. Unterr. **37**, 1906, 249/52.

[189]) Von Leibniz wurden Funktionen mit der Variablen als Basis, aber einem irrationalen Exponenten, als »interszendent« bezeichnet. Die fraglichen Kurven heißen daher auch »interszendente Parabeln und Hyperbeln«.

Denken wir uns einen Punkt $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ einer Ebene A, auf die wir eine projektive Transformation $\mathfrak{T}$ ausüben, durch welche P in P_1 übergeht. Dann können wir von P aus nach vor- und rückwärts eine unendliche Kette (»Iterationsfolge«) von Punkten[190]) konstruieren, die durch beliebig oftmalige Anwendung von $\mathfrak{T}$ nur unter sich vertauscht werden. Denn während P in P_1 überging, ging zu gleicher Zeit P_1 in P_2, P_2 in P_3 usw. über. P entstand andererseits aus einem Punkte P_{-1}, P_{-1} aus einem Punkte P_{-2} usw. Diese Kette wird sich im allgemeinen nicht schließen, d. h. wenn nicht besondere Umstände obwalten, wird für positives oder negatives ganzzahliges λ P_λ nicht mit P_1, also auch mit keinem anderen Punkte der Kette zusammenfallen. Andererseits können die Punkte P_i auch nicht die ganze Ebene erfüllen. Denn durch die projektive Transformation wird jedem Punkte nur eine Fortschreitungsrichtung zugeordnet. Von jedem Punkte Q der Ebene, der nicht gerade mit einem der Punkte P_i zusammenfällt, nimmt also eine neue Kette ihren Ausgang. All diese Ketten werden durch die Transformation $\mathfrak{T}$ und ihre Wiederholungen in sich übergeführt.

242. Nun gibt es fünf Klassen von linearen Transformationen in der Ebene[191]), wobei 1. die drei Seiten und Ecken eines wirklichen Dreiecks unverändert bleiben, 2. wo zwei Seiten und damit auch zwei Ecken des genannten Dreiecks zusammenfallen und also nur eine (Doppel-) Gerade und auf ihr ein (Doppel-) Punkt sowie noch ein Punkt auf der Geraden und eine Gerade durch den Punkt fest bleiben, 3. wo ein (dreifacher) Punkt und eine durch ihn gehende (dreifache) Gerade die festen Elemente sind, 4. wo ein isolierter Punkt und eine Punktreihe (Zentrum und Achse der Perspektivität) unverändert

---

[190]) Siehe F. London *„Über eine besondere Art konvergenter Punktfolgen“.* Jhrsb. Dtsch. Math.-V. **11**, 1902, 274/80.

[191]) S. für das folgende die grundlegende Arbeit von F. Klein und S. Lie *„Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen“*, Math. Ann. **4**, 1871, 50—84, sowie die ausführlichere Darstellung in Lie-Scheffers *„Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen“*, Leipzig 1893, von S. 22 an, bes. § 4 des III. Kapitels.

bleiben, 5. wo ein Punkt und eine ihn enthaltende Punktreihe fest sind.

Nimmt man im ersten Falle das Dreieck der Doppelelemente zum Fundamentaldreieck, so kann die Transformation geschrieben werden

$$x_1' = \alpha\,\xi_1\,, \quad x_2' = \beta\,\xi_2\,, \quad x_3' = \gamma\,\xi_3\,.$$

Hier sind x_1', x_2', x_3' die Koordinaten des aus $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ entstehenden Punktes P_1. Wendet man nun dieselbe Transformation noch einmal an, so werden die Koordinaten des aus P_1 hervorgehenden Punktes P_2

$$x_1'' = \alpha^2\,\xi_1\,, \quad x_2'' = \beta^2\,\xi_2\,, \quad x_3'' = \gamma^2\,\xi_3\,.$$

Durch λ-malige Wiederholung kommt man so zu dem Punkte P_λ, dessen Koordinaten wir einfach x_1, x_2, x_3 nennen wollen. Es ist

$$(15) \qquad x_1 = \alpha^\lambda\,\xi_1\,, \quad x_2 = \beta^\lambda\,\xi_2\,, \quad x_3 = \gamma^\lambda\,\xi_3\,.$$

Diese Gleichungen stellen die ganze Kette dar, die den Punkt P enthält, wenn man nur für λ alle positiven und negativen ganzzahligen Werte (0 eingeschlossen) einsetzt. Nun kann man aber aus den Gleichungen (15) λ eliminieren, indem man beachtet, daß nur die Verhältnisse der Koordinaten eintreten dürfen. Dann ergibt sich

$$\log\frac{x_1}{x_3} - \log\frac{\xi_1}{\xi_3} = \lambda\log\frac{\alpha}{\gamma}\,, \qquad \log\frac{x_2}{x_3} - \log\frac{\xi_2}{\xi_3} = \lambda\log\frac{\beta}{\gamma}\,,$$

und wenn man $\log\alpha = \alpha_1$, $\log\beta = \alpha_2$, $\log\gamma = \alpha_3$ setzt

$$(\alpha_2 - \alpha_3)\log\frac{x_1}{x_3} - (\alpha_1 - \alpha_3)\log\frac{x_2}{x_3}$$
$$= (\alpha_2 - \alpha_3)\log\frac{\xi_1}{\xi_3} - (\alpha_1 - \alpha_3)\log\frac{\xi_2}{\xi_3}\,,$$

woraus

$$\log\frac{(x_1/x_3)^{\alpha_2-\alpha_3}}{(x_2/x_3)^{\alpha_1-\alpha_3}} = \log\frac{(\xi_1/\xi_3)^{\alpha_2-\alpha_3}}{(\xi_2/\xi_3)^{\alpha_1-\alpha_3}}$$

und schließlich

$$(16) \qquad x_1^{\alpha_2-\alpha_3}\,x_2^{\alpha_3-\alpha_1}\,x_3^{\alpha_1-\alpha_2} = \xi_1^{\alpha_2-\alpha_3}\,\xi_2^{\alpha_3-\alpha_1}\,\xi_3^{\alpha_1-\alpha_2} = \varkappa$$

folgt, welche Gleichung in der Tat mit (14) übereinstimmt. Wir haben also eine Kurve der schon erläuterten Art, die Projektion einer interszendenten binomischen Kurve,

als Ort für alle Punkte der durch (15) dargestellten Kette. Aber diese Kurve enthält auch alle Punkte, die den nichtganzzahligen Werten von λ entsprechen, alle Punkte, die aus (15) hervorgehen, wenn wir λ stetig die Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lassen. Die Gleichung (15) stellt dann ein System von linearen Transformationen dar, das die Eigenschaft hat, daß irgend zwei Transformationen des Systems (die z. B. den Exponenten λ_1, λ_2 entsprechen) in beliebiger Reihenfolge ausgeführt, immer dieselbe ebenfalls dem Systeme angehörende Transformation (vom Exponenten $\lambda_1 + \lambda_2$) ergeben. Nach den Lieschen Begriffsbestimmungen heißt dieses System von Transformationen die »kontinuierliche eingliedrige projektive Gruppe«.

243. In (15) ist auch eine Transformation enthalten, die den Punkt P nur unendlich wenig verschiebt. Wir erhalten sie, wenn wir λ unendlich klein annehmen, also etwa gleich $d\lambda$ setzen. Da nun z. B. $x_1 = \xi_1 \cdot e^{d\lambda \log\alpha} = \xi_1(1 + d\lambda \log\alpha + \ldots)$, so wird

$$(17)\quad d\xi_1 = d\lambda \log\alpha \cdot \xi_1\,,\quad d\xi_2 = d\lambda \log\beta \cdot \xi_2\,,\quad d\xi_3 = d\lambda \log\gamma \cdot \xi_3$$

und es ergibt sich die Differentialgleichung

$$(17^*)\qquad \frac{d\xi_1}{\xi_1 \log\alpha} = \frac{d\xi_2}{\xi_2 \log\beta} = \frac{d\xi_3}{\xi_3 \log\gamma}\,,$$

deren Integralkurven gerade wieder die Kurven (16) sind. Indem wir die unendlich kleine Transformation der Gruppe zugrunde legen, die man durch (17) definiert denken kann und diese unendlich oft auf den Punkt P wirken lassen, geht unsere ursprüngliche Kette in die stetige Bahnkurve (16) über, wo $\varkappa$ vom Ausgangspunkte abhängt. Wir können also sagen, indem wir für die Kurven (16) gleich den Namen W-Kurven, der in Nr. 248 erläutert werden wird, einführen: *Die W-Kurven sind die Bahnkurven der eingliedrigen kontinuierlichen projektiven Transformationsgruppe.*

Führt man in (17) rechtwinklige Koordinaten ein: $x = \xi_1/\xi_3$, $y = \xi_2/\xi_3$, so geht die Differentialgleichung über in die folgende

$$(18)\qquad \frac{dx}{x \log(\gamma/\alpha)} = \frac{dy}{y \log(\gamma/\beta)}\,.$$

Diese ist ein Spezialfall der Jakobischen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung[192])

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ x & y & 1 \\ L & M & N \end{vmatrix} \equiv L\,dy - M\,dx + N(y\,dx - x\,dy) = 0\,,$$

wo L, M, N lineare Ausdrücke in x, y sind. Der Unterschied zwischen (18) und (19) ist nur der, daß in (18) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ die Seiten des Fundamentaldreiecks sind, während diese in (19) noch linear von L, M, N abhängen. Da aber eine beliebige lineare Transformation unsere infinitesimale Transformation nur wieder in eine andere derselben Art überführt, genügt es (18) zu integrieren und die erhaltenen (binomischen) Kurven beliebig zu projizieren, um die allgemeinen *W*-Kurven (16) zu erhalten.

244. Über den Verlauf dieser allgemeinen *W*-Kurven müssen wir uns aber doch erst näher informieren. Dazu können wir die Gleichung (16) benutzen, wenn wir nur über die Größenverhältnisse der α_i eine Voraussetzung machen. Es sei nun in (15) $\alpha > \beta > \gamma$, also in (16) $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$, dann kann man die Gleichung schreiben, indem man nur positive Exponenten anwendet

$$(20)\qquad x_1^{\alpha_2 - \alpha_3}\, x_3^{\alpha_1 - \alpha_2} = \varkappa\, x_2^{\alpha_1 - \alpha_3}\,.$$

Die Kurve geht also durch die Ecken $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ und da nach unserer Voraussetzung der rechtsstehende Exponent größer ist als die beiden linksstehenden, sind $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$ die Tangenten in den beiden Ecken. Dieser Schluß ist berechtigt, da er für die beliebig genau zu nehmenden algebraischen Näherungskurven gilt. Ist $\varkappa$ positiv, der ursprüngliche Punkt $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ also im Innern des Fundamentaldreiecks, so wird die Kurvengleichung (20) bei irrationalen Werten der Exponenten für negative Koordinatenwerte nicht erfüllt sein, denn $(-1)^\mu = e^{\mu\pi i} = \cos(\mu\pi) + i\sin(\mu\pi)$ kann nur für ganzzahlige Werte von μ reell werden. Die *W*-Kurven endigen also im allgemeinen in den beiden

---

[192]) Journ. f. Math. **24**, 1842, 1—4.

Koordinatenecken A_1, A_3 (vgl. Fig. 172). Es ist das der Zug, der dem im ersten Quadranten liegenden der algebraischen binomischen Kurven entspricht. Der andere entsprang ja auch lediglich daraus, daß wir einer Wurzel ein doppeltes Vorzeichen beilegten oder die Potenz einer negativen Basis bildeten. Das erste verbietet sich hier, da die Exponentialfunktion eindeutig genommen werden muß.

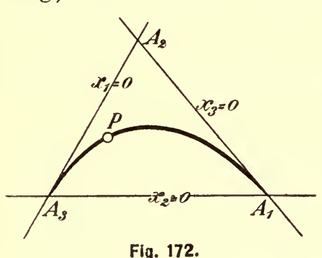


Fig. 172.

So können für alle reellen Werte λ von $-\infty$ bis $+\infty$ aus (15) nur positive Koordinatenwerte hervorgehen, und zwar entspricht $\lambda=+\infty$ der Ecke A_1, $\lambda=-\infty$ der Ecke A_3. Die beiden Punkte heißen Grenzpunkte der Iterationsfolge $PP_1\ldots$.

Zusatz. Wir müßten nur sehen, ob negative Koordinaten, also Punkte der Kurve außerhalb des Dreiecks A_1, A_2, A_3, nicht etwa für komplexe Werte von λ auftreten können. Dies ist in der Tat der Fall. Es zeigt sich aber, daß dann die Kurven algebraisch sein müssen. Die außerhalb liegenden Zweige erhält man aus dem der Fig. 172, indem man diesen von A_1 oder A_3 (wenn die Ordnung ungerade), bzw. von A_2 (wenn die Ordnung gerade) aus mit der zugehörigen Gegenseite als Achse unter Zugrundelegung des Doppelverhältnisses -1 perspektiv abbildet. Nähere Ausführungen siehe bei Cesàro, S. 132/5.

245. Für den im Dreieck liegenden Zweig sind nur zwei Punkte P, P_1 zur Bestimmung nötig. Denn damit ist die den Punkt P in P_1 überführende Transformation und die ganze von P ausgehende Kette von Punkten gegeben und konstruierbar. Wir erhalten den Punkt P_2, indem wir folgende zwei Doppelverhältnisgleichheiten herstellen (Fig. 173)

$$(A_3A_2,\ A_3P_2,\ A_3P_1,\ A_3A_1) \barwedge (A_3A_2,\ A_3P_1,\ A_3P,\ A_3A_1),$$
$$(A_1A_2,\ A_1P_1,\ A_1P_2,\ A_1A_3) \barwedge (A_1A_2,\ A_1P,\ A_1P_1,\ A_1A_3).$$

Dies gelingt folgendermaßen: Man ziehe durch A_2 zwei Hilfsgerade G, Γ, verbinde A_3 mit P und P_1 und fixiere die Schnittpunkte R, R_1 auf A_1A_2 und M, M_1 auf Γ. M_1R gibt auf A_1A_3 einen Punkt O. Verbinde dann O

mit R_1 und den Schnittpunkt von OR_1 mit Γ, den Punkt M_2 mit A_3, dann enthält A_3M_2 den gesuchten Punkt P_2. Denn es ist

$$(A_3A_2, A_3M_2, A_3M_1, A_3A_1) \barwedge (OA_2, OM_2, OM_1, OA_1)$$
$$\barwedge (A_3A_2, A_3R_1, A_3R, A_3A_1).$$

Ebenso schneide man auf der anderen Seite A_2A_3 und G durch A_1P und A_1P_1 bzw. in S, S_1 und N_1, N_2, bestimme durch N_1S_1 den Punkt O' auf A_1A_3, durch $O'N_2$ den Punkt S_2 auf A_2A_3, dann liegt P_2 auf A_1S_2. Es ist klar, wie sich mittels der Punkte O, O' und der Ge-

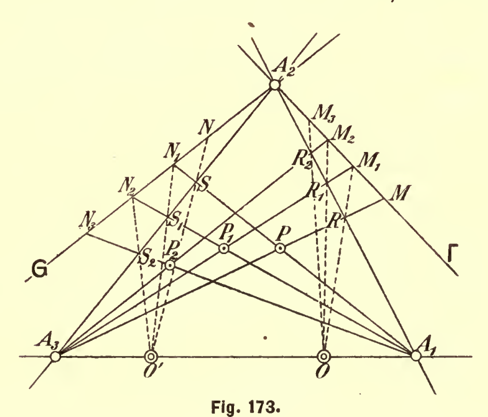


Fig. 173.

raden G, Γ die Konstruktion nach vor- und rückwärts beliebig fortsetzen läßt. Auch kann auf ganz ähnliche Weise zu jedem Punkte Q die entsprechende Kette gezeichnet werden. Es ist auch leicht zu ersehen, wie sich das Verfahren modifiziert, wenn etwa A_1 oder A_3 oder auch beide im Unendlichen liegen. Den Beweis aus der Gleichung heraus zu führen, überlassen wir dem Leser.

246. Dasselbe Verfahren gilt natürlich auch für die Konstruktion einer algebraischen höheren Parabel oder Hyperbel, wenn zwei Punkte der Kurve und das Achsensystem bekannt sind, nicht aber der Exponent. Kennt man den letzteren, so genügt es, einen Punkt $P_0(x_0, y_0)$

der Kurve anzugeben (Fig. 174). Ist der Exponent zunächst positiv ganzzahlig, so findet man durch folgende Konstruktion beliebig viele Punkte der Kurve $y/y_0 = (x/x_0)^n$. Es sei L irgend eine Parallele zur y-Achse, die der Abszisse x entspricht. Man schneide L mit OP_0 in P_1, ziehe P_1B_1 parallel zur x-Achse (alle B_i auf der Ordinate von P_0), schneide L mit OB_1 in P_2, ziehe P_2B_2, schneide L mit OB_2 in P_3 usw., so ist P_n der auf L liegende Punkt der gesuchten Kurve. Denn heißen wir y_ν die Ordinate des Punktes P_ν, so ist wegen ähnlicher Dreiecke offenbar

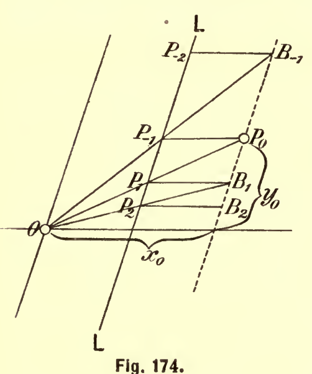


Fig. 174.

$$y_n = \frac{x}{x_0} y_{n-1} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 y_{n-2} = \cdots = \left(\frac{x}{x_0}\right)^n y_0 \,.$$

Setzen wir die Konstruktion nach oben fort, indem wir P_0P_{-1} parallel zur x-Achse ziehen (P_{-i} auf L), durch OP_{-1} auf der Ordinate von P_0 den Punkt B_{-1} bestimmen und mit B_{-1} wie mit P_0 verfahren, so ist für den so erhaltenen Punkt P_{-n}

$$y_{-n} = \frac{x_0}{x} y_{-n+1} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^2 y_{-n+2} = \cdots = \left(\frac{x_0}{x}\right)^n y_0 \,,$$

also

$$\left(\frac{y_{-n}}{y_0}\right) \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n = 1 \,,$$

d. h. P_{-n} ist ein Punkt einer binomischen Hyperbel mit dem Index $-n$.

Die Punkte der Kurven mit gebrochenem Exponenten p/q erhält man folgendermaßen. Man mache die Konstruktion wie vorhin bis zum Punkte P_p. Durch diesen ziehe man eine Parallele zur x-Achse und nehme auf ihr den Schnittpunkt mit OB_{p-q}, das ist der gesuchte Punkt $P_{p/q}$. In Fig. 175 findet der Leser ein Beispiel dargestellt. Man hat hier zunächst, wenn $\bar{x}$ die Abszisse von $P_{p/q}$ ist,

$$y_{p/q} = \left(\frac{\bar{x}}{x_0}\right) y_{p-q} \,.$$

Außerdem ist natürlich

$$y_{p-q} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{p-q} y_0\,, \qquad y_{p/q}[= y_p] = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{p} y_0\,.$$

Also ergibt sich

$$\frac{y_{p/q}}{y_0} = \left(\frac{\bar{x}}{x_0}\right)\cdot\left(\frac{x}{x_0}\right)^{p-q} = \left(\frac{\bar{x}}{x_0}\right)\cdot\left(\frac{y_{p/q}}{y_0}\right)^{\frac{p-q}{p}}$$

und schließlich

$$y_{p/q} = \left(\frac{\bar{x}}{x_0}\right)^{\frac{p}{q}} y_0\,.$$

Da dies für positive und negative q gilt, ist auch die Konstruktion für negative gebrochene Exponenten geleistet.

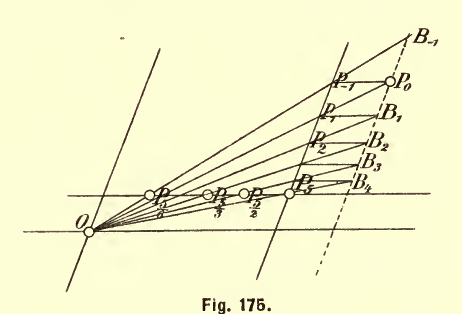


Fig. 175.

Beisp. Wenn in der Darstellung (15) der allgemeinen *W*-Kurven die Konstanten α, β, γ mit den Längen a_1, a_2, a_3 des Fundamentaldreiecks identisch sind, so kommt der Kurve des ganzen Systems (16), die durch den Einheitspunkt $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 1 : 1 : 1$ der Koordinaten geht, die geometrische Bedeutung zu, daß sie alle Punkte enthält, deren Koordinaten irgendwelchen Potenzen der Seitenlängen des Fundamentaldreiecks proportional sind. Insbesondere wurde diese Kurve für den Fall betrachtet, daß der Schwerpunkt des Grunddreiecks der Einheitspunkt ist, die Koordinaten also baryzentrische (auch Flächen- oder Arealkoordinaten genannt) sind. G. de Longchamps nannte sie »Dreieckspotentialkurve (potentielle triangulaire)«[193]. Die Kurve enthält ferner den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, für den $\lambda = 1$ ist und den Lemoineschen (oder Grebeschen) Punkt, den Schnittpunkt

[193]) Mathesis **6**, 1886, 246/8.

der Gegenmittellinien, für welchen $\lambda = 2$ ist[194]). In allen Fällen berührt die Dreieckspotentialkurve die größte und kleinste Dreiecksseite in den Endpunkten der Seite mittlerer Länge. Sie ist nur dann algebraisch, wenn die Logarithmen der Längen der Dreiecksseiten in einem rationalen Verhältnis stehen.

247. Wenn wir nun aus der Definition der W-Kurven heraus uns anheischig machen, allgemeine Sätze über dieselben abzuleiten, so ist vorauszubemerken, daß wir jedem Satze, der sich auf die Lage von Punkten bezieht, einen dualistischen gegenüberstellen können, der über die Lage gewisser Geraden etwas aussagt. Denn wir sahen schon bei den binomischen Kurven, daß sie zu sich selbst polarreziprok waren in bezug auf einen geeignet zu wählenden Kegelschnitt. Dieser Kegelschnitt geht hier in einen solchen über, der das Fundamentaldreieck zum Polardreieck hat. Suchen wir die Reziproke in bezug auf irgend einen solchen Kegelschnitt K, so wird aus der W-Kurve jedenfalls wieder eine W-Kurve desselben Systems, da sich nur die Konstante $\varkappa$ ändern kann. Wir können nun aber auch gleich behaupten: *Berührt der Kegelschnitt* K *die W-Kurve, so ist ihre Polarreziproke mit ihr selbst identisch.* Denn der Tangente des Berührungspunktes entspricht dieser Berührungspunkt selbst. Durch ihn kann aber keine zweite W-Kurve des Systems gehen außer der zu transformierenden.

Da dieser Satz natürlich für jede spezielle W-Kurve gilt, so läßt sich z. B. für jede Kubik mit Spitze (und Wendepunkt), die sich ja immer in der Form schreiben läßt $x_1^2 x_3 = \varkappa x_2^3$ (etwa für die Kissoide des Diokles), eine einfach unendliche Zahl von Kegelschnitten angeben, in bezug auf jeden von denen die Kubik zu sich selbst reziprok ist.

248. Denken wir uns nun an irgend eine der W-Kurven des Systems in einem Punkte P die Tangente T gezogen, so schneiden alle anderen W-Kurven des Systems auf T eine gewisse Punktreihe $\mathcal{P}$ aus. Lassen wir nun P vermittels der infinitesimalen projektiven Transformation in seinen benachbarten Punkt P' übergehen, T also in die benachbarte Tangente T', so wird T' von den übrigen

[194]) Über die Begriffe der neueren Dreiecksgeometrie s. z. B. das Buch von A. Emmerich, *Die Brocardschen Gebilde* usw. Berlin, G. Reimer, 1891.

W-Kurven des Systems in einer Punktreihe $\mathfrak{P}'$ geschnitten, die offenbar aus $\mathfrak{P}$ durch dieselbe Transformation entstand. Daher ist $\mathfrak{P}' \barwedge \mathfrak{P}$. Weil aber durch Wiederholung derselben Transformation T immer andere Lagen $\mathsf{T}^{(\nu)}$ einnimmt, während alle *W*-Kurven in sich übergehen, so sind alle auf $\mathsf{T}^{(\nu)}$ durch die Kurven des Systems ausgeschnittenen Punktreihen $\mathfrak{P}^{(\nu)} \barwedge \mathfrak{P}$. Zu den Punkten von $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ gehören natürlich auch die Schnittpunkte mit den drei Koordinatenseiten; denn das Fundamentaldreieck zählt als ausgeartete *W*-Kurve des Systems. Demnach erhalten wir den speziellen Satz: *Das Doppelverhältnis δ des Berührungspunktes P der Tangente T einer W-Kurve und der drei Schnittpunkte von T mit den Seiten des Fundamentaldreiecks ist konstant auf der ganzen Kurve und für jede Kurve des Systems dasselbe.* Der letztere Zusatz ergibt sich daraus, daß durch eine projektive Transformation mit demselben Fundamentaldreieck die *W*-Kurven des Systems nur unter sich vertauscht werden.

Es ist nach dem vorigen klar, daß wir auch gleich den dualistischen Satz aussprechen können: *Das Doppelverhältnis δ' einer Tangente T einer W-Kurve und der drei von ihrem Berührungspunkte P nach den Ecken des Fundamentaldreiecks gehenden Geraden ist für die ganze Kurve konstant und für alle Kurven des Systems dasselbe.* Daß außerdem $\delta' = \delta$ ist, kann man aus einer Figur sofort entnehmen[195]).

Wir wollen ferner aus unserem anfänglichen allgemeinen Ergebnis noch folgende spezielle Umkehrung herauslesen: *Bestimmt man auf jeder Tangente T einer W-Kurve einen Punkt Q, der mit den drei Schnittpunkten von T mit den Seiten des Fundamentaldreiecks ein bestimmtes Doppelverhältnis ι bildet, so beschreibt Q eine andere W-Kurve desselben Systems.* Dazu haben wir die dualistische Umformung: *Konstruiert man in jedem Punkte P einer W-Kurve zu den drei Geraden PA_1, PA_2, PA_3 eine vierte U, die mit den*

---

[195]) Die Konstanz dieses Doppelverhältnisses (= Wurf) bewog F. Klein, die Kurven *W*-Kurven zu nennen. Aus demselben Grunde wurden sie von Halphen »anharmonische Kurven« genannt (im *Appendice* zu Salmon-Chemin, *Traité de géom. anal.*[81]) S. 587). Die Konstanz dieses Doppelverhältnisses ist natürlich charakteristisch für die *W*-Kurven.

drei anderen ein bestimmtes Doppelverhältnis ι' bildet, so umhüllt U *eine W-Kurve desselben Systems.*

Aus den Sätzen dieser Nummer wollen wir nur noch einen Schluß ziehen. Legt man von irgend einem Punkte O der Ebene an das System der W-Kurven die Tangenten, und seien die Berührungspunkte B, B', B'' usw., so ist

$$(BA_1, BA_2, BA_3, BO) \barwedge (B'A_1, B'A_2, B'A_3, B'O)$$
$$\barwedge (B''A_1, B''A_2, B''A_3, B''O)$$

usw. *Also liegen alle Berührungspunkte B, B', B'' mit O und den drei Fundamentalecken in einem Kegelschnitte.* Analog ergibt sich der Satz: *Legt man in allen Schnittpunkten einer Geraden* O *mit dem System der W-Kurven die Tangenten* B, B′, B″ *usw., so umhüllen diese Tangenten einen Kegelschnitt, der* O *und die drei Fundamentalseiten berührt.*

All diese Sätze sind auch leicht aus der Gleichung des Systems der W-Kurven in Punkt- oder Linienkoordinaten abzuleiten.

249. Es ist eine der für uns interessantesten Bemerkungen F. Kleins, daß zu den W-Kurven der besprochenen Art auch die logarithmische Spirale gehört. Deswegen, weil all die merkwürdigen Selbsterzeugungen dieser Kurve als Evolute, Polarreziproke, Fußpunktskurve usw. aus ihrer Eigenschaft als W-Kurve, bzw. aus den für allgemeine W-Kurven geltenden Sätzen entspringen. Wir brauchen in der Tat nur zwei der Fundamentalpunkte in die imaginären Kreispunkte J und J' zu legen, um zu sehen, daß dann das oben δ' genannte Doppelverhältnis einer Kurventangente T und der drei Geraden PO, PJ, PJ' von ihrem Berührungspunkte P nach den Ecken des Fundamentaldreiecks gemäß der Laguerreschen projektiven Definition des Winkels[196]) übergeht in den Winkel (OP, T), die W-Kurven eines Systems also in Linien, welche die von O ausgehenden Strahlen unter konstantem Winkel durchsetzen, das sind die logarithmischen Spiralen mit konstantem Steigungswinkel μ. Der Satz ist aber so wichtig, daß wir ihn auch ohne Benutzung der Laguerreschen

---

[196]) Der Winkel ist nach Laguerre [Nouv. Ann. **12**, 1853, 57 = *Oeuvres* **2**, 6] gleich dem Produkt aus $\frac{1}{2}i$ in den Logarithmus des erwähnten Doppelverhältnisses.

Winkeldefinition aus den Formeln (17) für die infinitesimale Transformation ableiten wollen. Setzen wir $\xi_1 = x + iy$, $\xi_2 = x - iy$, $\log\alpha = u + iv$, $\log\beta = u - iv$, $\log\gamma = 1$, so wird

$$dx \pm i\,dy = d\lambda[ux - vy \pm i(vx + uy)],$$

hieraus

(21)
$$\begin{cases} dx = d\lambda(ux - vy) \\ dy = d\lambda(vx + uy), \end{cases}$$

also

$$dx^2 + dy^2 = d\lambda^2(u^2 + v^2)(x^2 + y^2)$$

oder

(22)
$$d\varrho = \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \varrho\, d\lambda .$$

Diese Gleichung für sich zeigt eine infinitesimale Ähnlichkeitstransformation mit dem Anfangspunkte als Pol an. Außerdem ist

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{vx + uy}{ux - vy}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},$$

also

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\tau - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\tau \operatorname{tg}\theta} = \frac{v}{u},$$

demnach konstant. Die Gleichungen (21) stellen also tatsächlich eine infinitesimale spiralige Transformation dar.

Aber wir können auch die kartesische Gleichung der logarithmischen Spirale ohne Schwierigkeit auf die Normalform der Gleichung der *W*-Kurven bringen. Aus der Parameterdarstellung in Nr. 157 geht hervor

$$x + iy = \frac{\varkappa\, e^{\varkappa\tau}}{1 + \varkappa^2}\left(e^{i(\frac{1}{2}\pi - \tau)} + \varkappa\, e^{-i\tau}\right) = \Lambda\, e^{(\varkappa - i)\tau},$$

$$x - iy = \frac{\varkappa\, e^{\varkappa\tau}}{1 + \varkappa^2}\left(e^{i(\tau - \frac{1}{2}\pi)} + \varkappa\, e^{i\tau}\right) = \Lambda'\, e^{(\varkappa + i)\tau}.$$

Daher ist

(23)
$$(x + iy)^{i + \varkappa}(x - iy)^{i - \varkappa} = \text{konst.}$$

die kartesische Gleichung der logarithmischen Spirale.

250. Gemäß dieser Auffassung geht die allgemeine Konstruktion der *W*-Kurven aus zwei Punkten und dem Fundamentaldreieck über in die Konstruktion der loga-

rithmischen Spirale aus zwei Punkten und dem Auge mittels ähnlicher Dreiecke.

Auch die endlichen Transformationen $\mathfrak{T}$, die das jetzt zugrunde gelegte Fundamentaldreieck unverändert lassen, sind Ähnlichkeitstransformationen mit O als Pol, verbunden mit einer Drehung um O. Wir wissen, daß durch $\mathfrak{T}$ die Kurven des Systems nur vertauscht werden. Daher sind alle logarithmischen Spiralen mit demselben Steigungswinkel ähnlich. Wir können aber $\mathfrak{T}$ so wählen, daß ein Punkt $P(\varrho)$ in einen beliebig zu wählenden Punkt $P'(\varrho')$ übergeht. Die Spirale S durch P geht dann in die Spirale S′ durch P' über. Lassen wir nun aber $P'(\varrho')$ auf S selbst rücken, so geht S infolge von $\mathfrak{T}_0$ in sich selbst über, S′ kam durch bloße Rotation mit S zur Deckung. *Jede logarithmische Spirale ist also in bezug auf das Auge zu sich selbst ähnlich so zwar, daß irgend zwei ihrer Punkte P und P' als homolog gesetzt werden können. Alle logarithmischen Spiralen mit demselben Steigwinkel sind demnach kongruent.*

Die logarithmische Spirale muß ferner zu sich selbst reziprok sein in bezug auf einen Kegelschnitt, der im Auge seinen Mittelpunkt hat und dessen unendlich ferne Punkte zu den Kreispunkten harmonisch liegen. Das kann nur sein, wenn die Asymptoten aufeinander senkrecht stehen. *In bezug auf jede sie berührende gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpunkt im Auge ist also die logarithmische Spirale zu sich selbst reziprok.*

Einen Punkt, der mit den drei Schnittpunkten einer Tangente T mit den Fundamentalseiten ein bestimmtes Doppelverhältnis bildet, finden wir hier, wenn wir von O aus eine Gerade ziehen, die mit T einen festen Winkel einschließt. *Daher sind alle (auch die schiefen) Fußpunktskurven der logarithmischen Spirale mit ihr selbst kongruent*, da sie Kurven des Systems sind. Der dualistische Satz lautet offensichtlich: *Alle Evolutoiden der logarithmischen Spirale sind mit ihr kongruent.*

Die *Berührungspunktskurve eines Punktes Q muß* ferner nach den allgemeinen Sätzen ein Kegelschnitt durch O, Q und die Kreispunkte, also *ein Kreis sein, der über OQ als Sehne den Winkel μ faßt* (Nr. 159). Neu erhalten wir den dualistischen Satz: *Schneidet man eine logarithmische*

Spirale mit einer Geraden G *und legt in allen Schnittpunkten die Tangenten an die Spirale, so hüllen diese eine Parabel ein, die* G *berührt und das Auge zum Brennpunkt hat;* denn dies ist ein Kegelschnitt, der die drei Fundamentalseiten berührt.

251. Wir haben nun allerdings erst die dem allgemeinsten Transformationstypus (1) von Nr. 242 entsprechenden *W*-Kurven besprochen. Da uns aber diese Transformationen nur so weit interessieren, als sie neue Kurven zu liefern oder wenigstens bekannte in einem neuen Lichte erscheinen zu lassen imstande sind, wollen wir gleich bemerken, daß die Transformationen (3), (4), (5) nur Kegelschnitte, Gerade und Punkte als Bahnkurven liefern. Wir wollen demnach nur noch ganz kurz dem zweiten Transformationstypus unsere Aufmerksamkeit schenken. Dieser geht aus dem allgemeinen dadurch hervor, daß zwei Ecken A_2, A_3 und damit auch zwei Seiten $(A_1 A_2, A_1 A_3)$ des Grunddreiecks zusammenfallen. Wir müssen erst versuchen, die Transformationsformeln für diesen Fall aufzustellen. Zu dem Ende schreiben wir zuerst die allgemeinen Transformationsformeln in der Weise

$$x_1' = \alpha \xi_1, \quad x_2' = \beta \xi_2 + \delta \xi_3, \quad x_3' = \gamma \xi_3,$$

daß wohl noch die Ecken A_1, A_2 und die Seiten $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ des Fundamentaldreiecks sich selbst entsprechen, während der Seite $A_1 A_3$ $(\xi_2 = 0)$ die durch A_1 gehende Gerade $\gamma x_2' - \delta x_3' = 0$ entspricht. Die dritte sich selbst entsprechende Gerade muß aber von der Form $\mu x_2' + \nu x_3' = 0$ sein. Nun ist

$$\mu x_2' + \nu x_3' = \beta \mu \xi_2 + (\delta \mu + \gamma \nu) \xi_3,$$

und es ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung $(\beta - \gamma)\nu = \delta \mu$, also die Gerade $(\beta - \gamma) x_2' + \delta x_3' = 0$. Soll nun diese mit $x_3' = 0$ zusammenfallen, so haben wir die Bedingung $\beta = \gamma$. Unsere Transformationsformeln lauten dann

$$(24) \qquad x_1' = \alpha \xi_1, \quad x_2' = \beta \xi_2 + \delta \xi_3, \quad x_3' = \beta \xi_3.$$

Sie geben nach zweimaliger Anwendung

$$x_1'' = \alpha^2 \xi_1, \quad x_2'' = \beta^2 \xi_2 + 2 \beta \delta \xi_3, \quad x_3'' = \beta^2 \xi_3$$

und λ-mal wiederholt

(25) $x_1 = \alpha^\lambda \xi_1 , \quad x_2 = \beta^\lambda \xi_2 + \lambda \beta^{\lambda-1} \delta \xi_3 , \quad x_3 = \beta^\lambda \xi_3 .$

Die Elimination von λ aus diesen Gleichungen ergibt zunächst

(26) $$\frac{x_1}{x_3} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\delta} \cdot \frac{x_2}{x_3}} \cdot \frac{\xi_1}{\xi_3} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\delta} \cdot \frac{\xi_2}{\xi_3}} .$$

Dies kann man kürzer schreiben

(26*) $$\frac{x_1}{x_3} = \nu e^{\mu \frac{x_2}{x_3}} .$$

Die W-Kurven zweiter Art sind also Projektionen der Exponentialkurve $y = \nu e^{\mu x}$. Sie gehen demgemäß durch die beiden Ecken A_1, A_2, die bei der Transformation fest bleiben und berühren dort die feste (Doppel-) Gerade A_1, A_2. Die andere feste Gerade $A_2 A_3$ wird in einem Punkte geschnitten. In A_1 und A_2 hat die Kurve Endpunkte (siehe Fig. 176).

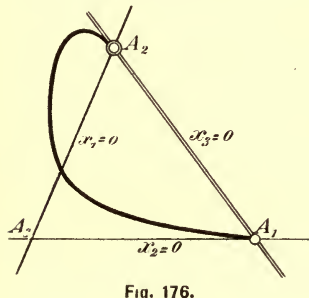


Fig. 176.

Auch hier existiert eine Invariante, entsprechend dem Doppelverhältnis bei den W-Kurven erster Art, die aber weniger einfacher Natur ist. Wir erwähnen nur, daß sie sich für den Fall der eigentlichen Exponentialkurve auf die Subtangente reduziert, deren Konstanz wir seinerzeit schon aus der Gleichung ableiteten.

Zusatz. Wir wollen die Differentialgleichung im vorliegenden Falle nur für die Exponentialkurven aufstellen. Die Transformation wird

$$x = \bar{\alpha}^\lambda \xi , \quad y = \eta + \lambda \bar{\beta} ,$$

also, wenn $d\lambda$ statt λ gesetzt wird

$$d\xi = \xi \, d\lambda \log \bar{\alpha} , \quad d\eta = \bar{\beta} \, d\lambda ,$$

so daß die Differentialgleichung lautet

$$d\xi / \xi \log \bar{\alpha} = d\eta / \bar{\beta} .$$

Diese erhält man natürlich einfacher aus der Kurvengleichung (26*). Die orthogonalen Trajektorien der Schar von Exponentialkurven werden gegeben durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\xi}{\overline{\beta}} + \frac{d\eta}{\xi \log \overline{\alpha}} = 0,$$

welche integriert gibt

$$\xi^2 = 2p(\eta + c),$$

d. i. eine Schar von kongruenten Parabeln mit gemeinschaftlicher Achse.

In gleicher Weise ist die Differentialgleichung der binomischen Kurven $y = \varkappa x^n$

$$x\,dy = n\,y\,dx\,.$$

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien lautet also

$$x\,dx + n\,y\,dy = 0\,.$$

Die Integration ergibt

$$x^2 + n\,y^2 = \text{konst.},$$

das sind konzentrische, ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen ($n > 0$) oder Hyperbeln ($n < 0$).

§ 29. Triangulär-symmetrische Kurven.

252. Die W-Kurven der ersten Art stellen einen Grenzfall einer zuerst von J. de la Gournerie[197]) betrachteten Kurvenfamile dar, welche die Gleichung hat

(1) $$\mathsf{F} \equiv \sigma_1 x_1^m + \sigma_2 x_2^m + \sigma_3 x_3^m = 0\,.$$

Diese Kurven führen den bezeichnenden Namen »triangulär-symmetrische Kurven«. Um aus ihnen die W-Kurven zu erhalten, müssen wir $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ und $m = 0$ voraussetzen. Da aber dann (1) eine Identität wird, bringen wir eine mit m verschwindende Größe an, um die Form $0 - 0$ zu erhalten und schreiben

$$\sigma_1 x_1^m + \sigma_2 x_2^m + \sigma_3 x_3^m - m\,\Lambda = 0\,.$$

Diese Gleichung läßt sich umformen in

$$\sigma_1 \frac{x_1^m - x_3^m}{m} + \sigma_2 \frac{x_2^m - x_3^m}{m} = \Lambda\,.$$

Gehen wir hier zur Grenze für $m = 0$ über, so ergibt sich

$$\log(x_1/x_3)^{\sigma_1} + \log(x_2/x_3)^{\sigma_2} = \Lambda\,,$$

[197]) Recueil des Sav. étr. 1865/66.

oder schließlich

$$x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} = \varkappa . \qquad [\varkappa = e^A]$$

Die triangulär-symmetrischen Kurven werden uns sofort noch mehr interessieren, wenn wir die weitere Bemerkung machen, daß auch die Sinusspiralen eine Unterart derselben sind. Nehmen wir wieder das Dreieck OJJ' des im Endlichen liegenden Punktes O und der beiden imaginären Kreispunkte als Fundamentaldreieck, so können wir bei passender Wahl der Koeffizienten statt (1) schreiben

$$(x + i\,y)^m + (x - i\,y)^m = 2\,a^m .$$

Die Einführung von Polarkoordinaten ergibt

$$\varrho^m (\cos m\,\theta + i \sin m\,\theta) + \varrho^m (\cos m\,\theta - i \sin m\,\theta) = 2\,a^m$$

und also

$$\varrho^m \cos m\,\theta = a^m ,$$

was für $m = -n$ sofort in die gewöhnliche Form der Gleichung der Sinusspiralen übergeht. Für $m = 0$ ergibt sich die Sinusspirale, die zu gleicher Zeit W-Kurve ist: die logarithmische Spirale; das stimmt mit einer früheren direkten Grenzbetrachtung überein (Nr. 160, Zus.).

253. Die triangulär-symmetrischen Kurven sind für irrationales m natürlich transzendent. Auf ihre verschiedenen Formen werden wir unten zu sprechen kommen. Wir möchten jetzt nur vorausschicken, daß unter ihnen für $m = 1$ die Gerade, für $m = -1$ ein dem Fundamentaldreieck umgeschriebener Kegelschnitt, für $m = \frac{1}{2}$ ein dem Grunddreieck einbeschriebener Kegelschnitt und für $m = 2$ ein Kegelschnitt enthalten ist, für den das Dreieck Polardreieck ist.

Es sei nun

$$(2) \qquad \Phi \equiv \varsigma_1 x_1^\mu + \varsigma_2 x_2^\mu + \varsigma_3 x_3^\mu = 0$$

eine andere in bezug auf dasselbe Dreieck symmetrische Kurve. Wir nehmen in bezug auf einen der Kurve F angehörenden Punkt ξ_1, ξ_2, ξ_3 die gerade Polare von Φ. Diese hat die Gleichung

$$(3) \quad \mathsf{P} \equiv \mu\,\varsigma_1\,\xi_1^{\mu-1} \cdot x_1 + \mu\,\varsigma_2\,\xi_2^{\mu-1} \cdot x_2 + \mu\,\varsigma_3\,\xi_3^{\mu-1} \cdot x_3 = 0 .$$

Heißen wir also u_1, u_2, u_3 ihre Koordinaten, so ist

$$(4) \qquad \vartheta\,u_1 = \varsigma_1\,\xi_1^{\mu-1}, \quad \vartheta\,u_2 = \varsigma_2\,\xi_2^{\mu-1}, \quad \vartheta\,u_3 = \varsigma_3\,\xi_3^{\mu-1}$$

oder

$$(5)\qquad \Theta\xi_1 = \left(\frac{u_1}{\varsigma_1}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}, \quad \Theta\xi_2 = \left(\frac{u_2}{\varsigma_2}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}, \quad \Theta\xi_3 = \left(\frac{u_3}{\varsigma_3}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}.$$

Setzt man diese Werte in (1), so erhält man die Gleichung der Einhüllenden der Polargeraden in Linienkoordinaten

$$(6)\qquad \sigma_1 \left(\frac{u_1}{\varsigma_1}\right)^{\frac{m}{\mu-1}} + \sigma_2 \left(\frac{u_2}{\varsigma_2}\right)^{\frac{m}{\mu-1}} + \sigma_3 \left(\frac{u_3}{\varsigma_3}\right)^{\frac{m}{\mu-1}} = 0.$$

Sind nun v_1, v_2, v_3 die Koordinaten einer Geraden, die der Gleichung (6) genügt, so ist die Gleichung des zu ihr gehörigen Berührungspunktes (in den laufenden Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3)

$$(7)\qquad \frac{m}{\mu-1} \sum_{1}^{3}{}_{i} \frac{\sigma_i}{\varsigma_i^{\frac{m}{\mu-1}}} v_i^{\frac{m-\mu+1}{\mu-1}} \cdot u_i = 0,$$

die Koordinaten x_1', x_2', x_3' ihres Berührungspunktes also

$$(8)\qquad \vartheta' x_i' = \frac{\sigma_i}{\varsigma_i^{\frac{m}{\mu-1}}} v_i^{\frac{m-\mu+1}{\mu-1}}.$$

Hieraus folgt

$$(9)\qquad \Theta' v_i = \tilde{a}_i \, x_i'^{\frac{\mu-1}{m-\mu+1}}.$$

Setzt man diese Werte in (6), so ergibt sich die Punktkoordinatengleichung der Enveloppe in der Form

$$(10)\qquad \tilde{a}_1 x_1^{\frac{m}{m-\mu+1}} + \tilde{a}_2 x_2^{\frac{m}{m-\mu+1}} + \tilde{a}_3 x_3^{\frac{m}{m-\mu+1}},$$

wo nur wieder x_i für x_i' gesetzt wurde. Die Einhüllende ist also wieder eine triangulär-symmetrische Kurve. Nennen wir für einen Augenblick die Exponenten der Gleichungen (6) und (10) p und q, so sehen wir, daß zwischen der Ordnung und Klasse einer triangulär-symmetrischen Kurve die umkehrbare Beziehung besteht $1/p + 1/q = 1$. Die Bezeichnungen Ordnung und Klasse sind hier in dem ersichtlichen weiteren Umfang zu nehmen. Die angeführte Beziehung ergibt sich auch direkt, wenn man in (2) $\mu = 2$

nimmt und $\varsigma_1 = \varsigma_2 = \varsigma_3 = 1$ setzt. Dann ist (6) die Polarreziproke von F in bezug auf den Kegelschnitt (2), die sich nur dadurch von F unterscheidet, daß Linienkoordinaten statt Punktkoordinaten gesetzt sind. Gleichung (10) stellt dann, wenn wir die Punkt- durch Linienkoordinaten ersetzen, die Tangentialgleichung von F dar. Sie hat den Exponenten $m/(m-1)$ und es ist in der Tat $1/m + (m-1)/m = 1$. Ist $p = 0$, so ist auch $q = 0$, wie wir bei den W-Kurven direkt bewiesen haben. Daß jede projektive, quadratische oder höhere Transformation der Form $\vartheta x_i = \beta_i \bar{x}_i^n$, die das Grunddreieck invariant läßt, die triangulär-symmetrische Kurve wieder in eine solche überführt, ist ohne weiteres evident. Ist das Dreieck der $\bar{x}_i$ ein anderes als das der x_i, so ist eben das neue Dreieck Fundamentaldreieck der neuen Kurven.

254. Um spezielle Formen der triangulär-symmetrischen Kurven zu erhalten, legen wir wieder die eine Seite ins Unendliche und führen die beiden anderen als, wenn nicht anders bemerkt, rechtwinklige Achsen ein. Dann schreibt man die Gleichung gerne in der Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1\,. \tag{11}$$

Man nennt die ganze Familie (11) dann »Lamésche Kurven«[198]) Für diese beweisen wir jetzt einen wichtigen Satz, der durch Projizieren nicht zerstört wird, also auch für die allgemeinen triangulär-symmetrischen Kurven gilt. Er bezieht sich auf die Krümmung der Kurve[199]). Es ist nach (11)

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{b}{a}\right)^m \left(\frac{x}{y}\right)^{m-1}.$$

Hieraus kann man den zweiten Differentialquotienten in der Form ableiten

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m-1}{xy} \cdot \frac{dy}{dx}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right),$$

---

[198]) Lamé, *Examen des diff. méth. etc.*, Paris 1818, 105 ff.

[199]) G. Fouret, C. R. Ac. Sc. Paris **110**, 1890. — R. Godefroy, J. Éc. polyt. cah. **62**, 1892; Nouv. Ann. (3) **5**, 1886.

und es wird folglich

$$(12) \qquad \mathcal{R}_m = \frac{xy\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{(m-1)\frac{dy}{dx}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)}.$$

Der Krümmungsradius einer Laméschen Kurve (11) ist also eine Funktion des Exponenten m, der Koordinaten des Inzidenzpunktes (x, y) und der Richtung der Tangente in diesem Punkt (dy/dx). Alle Kurven desselben Exponenten, die sich in einem Punkte P berühren, haben somit in diesem Punkte nach Größe und Richtung denselben Krümmungsradius. Legt man aber eine Lamésche Kurve vom Exponenten n durch P, die (11) dort berührt, so wird das Verhältnis der Krümmungsradien nur von den Exponenten abhängen; es ist nämlich

$$(13) \qquad \mathcal{R}_m : \mathcal{R}_n = (n-1) : (m-1).$$

Man kann daher den Krümmungsradius jeder durch einen Punkt P gehenden Laméschen Kurve konstruieren, wenn man nur den eines Kegelschnittes kennt, der zur Familie (11) gehört und durch P in derselben Richtung geht.

255. Nun existiert tatsächlich der Satz: *Das Verhältnis der Krümmungen zweier Kurven in einem Punkte, wo sie sich berühren, wird durch projektive Transformation nicht geändert*[200]. Wir wollen einen einfachen Beweis dafür beibringen. Die beiden Kurven können wir für den betreffenden Punkt P durch ihre Krümmungskreise von den Radien r und R ersetzen. Deren Gleichungen sind dann in bezug auf Tangente und Normale des Kurvenpunktes

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0, \quad x^2 + y^2 - 2Ry = 0.$$

Wir wenden nun auf diese beiden Kreise dieselbe ganz allgemeine projektive Transformation an. Es beeinträchtigt aber die Allgemeinheit nicht, wenn wir die Formeln so wählen, daß der Punkt P und die x-(ξ-)Achse sich nach der Transformation wieder decken. Dann können wir setzen

$$x = \frac{\xi + \alpha\eta}{\mu\xi + \nu\eta + \sigma}, \quad y = \frac{\eta}{\mu\xi + \nu\eta + \sigma}.$$

[200]) R. Mehmke, Zeitschr. Math. Phys. **36**, 1891, 206—13. — E. Wölffing, ebenda **38**, 1893, 237—49.

Durch diese Substitution geht etwa der erste Kreis über in den Kegelschnitt

$$\eta^2(\alpha^2 - 2r\nu + 1) + 2\xi\eta(\alpha - r\mu) + \xi^2 - 2r\sigma\eta = 0.$$

Dieser hat im Anfangspunkt die oskulierende Näherungsparabel $\xi^2 - 2r\sigma\eta = 0$, die durch die beiden letzten Glieder gegeben wird. Ihr Krümmungskreis, also auch der des Kegelschnittes, hat den Radius $r\sigma$ (vgl. Nr. 126), der Krümmungskreis des aus dem zweiten der ursprünglichen Kreise hervorgehenden Kegelschnittes gleicherweise den Radius $R\sigma$. Beide Krümmungsradien wurden also durch die projektive Transformation mit σ multipliziert. Damit ist der angegebene Satz bewiesen. Der durch Gleichung (13) ausgedrückte Satz gilt also für alle triangulär-symmetrischen Kurven, insbesondere auch für die W-Kurven $(m = 0)$. Nimmt man in diesem letzteren Falle etwa $n = 2$, so kann man sagen: *Der Krümmungsradius einer W-Kurve in einem Punkte P ist entgegengesetzt gleich dem Krümmungsradius desjenigen dem Fundamentaldreieck konjugierten Kegelschnittes, der in P die W-Kurve berührt.*

256. Die Formen der Laméschen Kurven, und damit der triangulär-symmetrischen Kurven, bieten eine große Mannigfaltigkeit dar. Wir können daher nur die typischen Gestalten angeben, ohne uns auf eine genauere Diskussion einzulassen. Zu allererst scheiden sich die Kurven in algebraische (m rational $= p/q$) und transzendente (m irrational). Die Formen sind sodann verschieden, je nachdem $m > 1$, $1 > m > 0$, $m < 0$ ist. Die Gerade $(m = 1)$ und die W-Kurve $(m = 0)$ bilden die Übergangsformen. Bei rationalem m müssen wir außerdem unterscheiden, ob p, q bzw. gerade oder ungerade sind. So ergeben sich die folgenden 12 Typen, wobei wir immer nur die am meisten charakteristische Form (sei es Lamésche oder allgemeine Kurve) angeben:

I. $m = p/q > 1$;

a) gerade/ungerade: Die Lamésche Kurve von der Gleichung (11) hat in den Punkten $x = \pm a$, $y = 0$; $x = 0$, $y = \pm b$ Flachpunkte mit $x = \pm a$, $y = \pm b$ als Tangenten und schließt sich für immer größer werden-

des m immer mehr an das Rechteck dieser vier Tangenten an. Fig. 177 stellt die Kurve $(\frac{1}{2}x)^4 + y^4 = 1$ dar.

b) ungerade/gerade: Die triangulär-symmetrische Kurve (Fig. 178) hat auf den drei Koordinatenseiten Spitzen (höherer Art), deren Tangenten durch die Gegen-

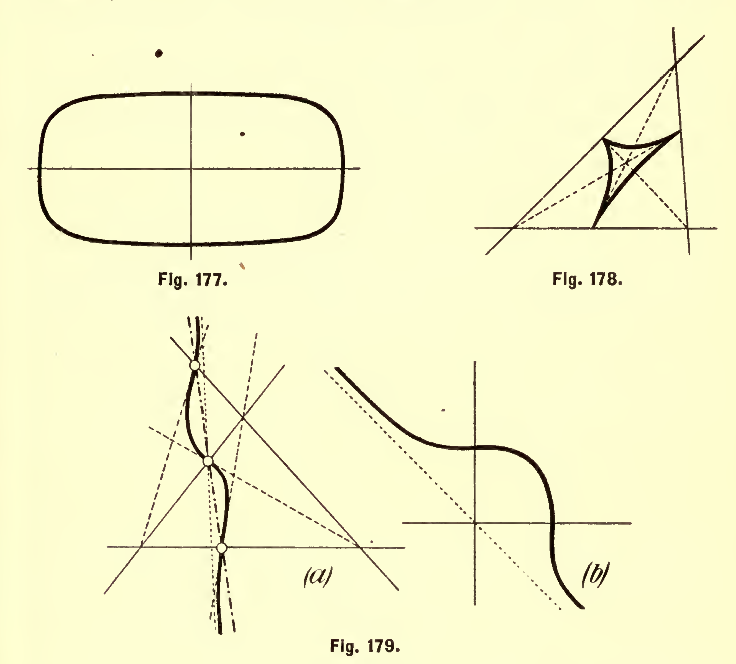


Fig. 177. Fig. 178.

Fig. 179.

ecken laufen. Die niedrigste Kurve dieser Gattung ist von der 6. Ordg. und hat die Gleichung

$$\sigma_1 x_1^{\frac{3}{2}} + \sigma_2 x_2^{\frac{3}{2}} + \sigma_3 x_3^{\frac{3}{2}} = 0\,.$$

Die zugehörigen Tangenten sind

$$\sigma_1^{\frac{2}{3}} x_1 - \sigma_2^{\frac{2}{3}} x_2 = 0\,,\quad \sigma_2^{\frac{2}{3}} x_2 - \sigma_3^{\frac{2}{3}} x_3 = 0\,,\quad \sigma_3^{\frac{2}{3}} x_3 - \sigma_1^{\frac{2}{3}} x_1 = 0\,.$$

Sie gehen jedesmal durch einen Punkt.

c) ungerade/ungerade: Die triangulär-symmetrische Kurve hat auf den drei Seiten Wendepunkte (höherer Art) mit drei Tangenten, die durch die Gegenecken laufen. Die drei Punkte liegen in einer Geraden [Fig. 179 (a)].

Die entsprechenden Laméschen Kurven haben die Gerade $x/a + y/b = 0$ als (Wende-)Asymptote. Beispiel $x^3 + y^3 = a^3$, wo die Punkte $x = a,\ y = 0;\ x = 0,\ y = a$ einfache Wendepunkte sind [Fig. 179 (*b*)].

II. $m = p/q < 1\ (>0)$;

a) gerade/ungerade: Die Lamésche Kurve hat den Charakter der Ellipsenevolute $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, die für $a = b$ in die reguläre Astroide übergeht, für schiefe Achsen eine projektive Astroide darstellt; also Spitzen in den Punkten $x = \pm a,\ y = 0;\ x = 0,\ y = \pm a$ mit den Achsen als Tangenten.

b) ungerade/gerade: Typus des dem Fundamentaldreieck einbeschriebenen Kegelschnittes $(m = \frac{1}{2})$. Die Transversalen von den Ecken nach den gegenüberliegenden Berührungspunkten laufen durch einen Punkt.

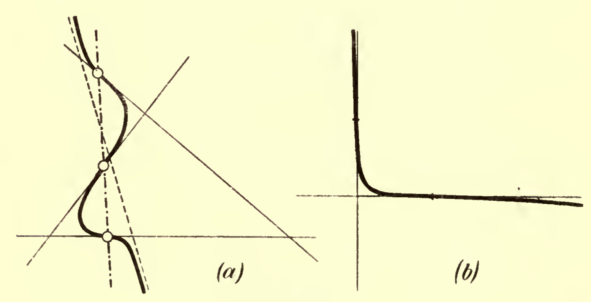


Fig. 180.

c) ungerade/ungerade: Die drei Punkte auf den Seiten des Fundamentaldreiecks sind Wendepunkte mit den Seiten als Tangenten; sie liegen in einer Geraden. Einfachstes Beispiel die Kubik, bezogen auf das Dreiseit ihrer drei reellen Wendetangenten:

$$\sigma_1 x_1^{\frac{1}{3}} + \sigma_2 x_2^{\frac{1}{3}} + \sigma_3 x_3^{\frac{1}{3}} = 0 \quad \text{[Fig. 180 } (a)\text{]}.$$

Die Kurve kann in die Lamésche Form $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$ projiziert werden. Siehe Fig. 180 (*b*) (ohne Asymptote, da die unendlich ferne Gerade Wendetangente ist).

III. $m = p/q < 0$;

a) gerade/ungerade: Kurve mit Inflexionsknoten in den drei Ecken [für $m = -2$ je nach den Koeffizienten und der Art des Fundamentaldreiecks Kreuzkurve, Kohlenspitzenkurve, Bernoullische Lemniskate; im allgemeinen die Gestalt der Sanduhrkurve (Nr. 16)].

b) ungerade/gerade: Die Kurve hat in den Koordinatenecken Spitzen. Ist das Koordinatendreieck gleichseitig, sein Schwerpunkt der Einheitspunkt der Koordinaten, so stellt

$$x_1^{-\frac{1}{2}} + x_2^{-\frac{1}{2}} + x_3^{-\frac{1}{2}} = 0$$

die Steinersche Hypozykloide dar.

Die drei Spitzentangenten laufen immer durch einen Punkt.

c) ungerade/ungerade: Typus des dem Grunddreieck umbeschriebenen Kegelschnittes ($m = -1$).

Die Kurven von der Art III entstehen aus den entsprechenden der Arten I und II durch die quadratische Transformation $\vartheta x_i = \bar{x}_i^{-1}$, was der Leser im einzelnen näher verfolgen möge[201]).

IV. m irrational.

I. $m > 1$.

Die Kurve besteht nur aus dem im ersten Quadranten liegenden Bogen der Kurven von der Art I, der gegen den Anfangspunkt konkav liegt.

II. $0 < m < 1$.

Die Kurve besteht nur aus dem im ersten Quadranten liegenden, gegen den Anfangspunkt konvexen Bogen der Kurven von der Art II.

Bei allgemein liegendem Koordinatendreieck sind es die Projektionen dieser Bögen, die allein die ganze Kurve darstellen. Wird m immer kleiner, so rücken die Enden des Bogens, der zwei Koordinatenseiten berührt, immer mehr zu den auf der dritten Seite liegenden Ecken, bis sie für $m = 0$ in diese fallen.

III. $m < 0$.

Die Kurve besteht aus einem einfachen Bogen, der zwischen zwei Koordinatenecken verläuft. Man sieht, wie

---

[201]) Vgl. hierzu des Verf. *Algebraische Kurven* § 35.

dieser aus dem der W-Kurven hervorgeht. Zwischen I und II liegt die der Geraden ($m = 1$) entsprechende Strecke.

Zusatz. Wir stellten seinerzeit die (schiefe) Astroide als Einhüllende einer Geraden und eines Systems von Kegelschnitten dar (Nrn. 22 und 88, Zus.). Diese Erzeugungen sind Spezialfälle einer ganz allgemeinen Erzeugungsweise aller Laméschen (oder triangulär-symmetrischen Kurven), die hier noch beigefügt werden soll. Die Koordinaten können im folgenden schiefwinklig angenommen werden. Wir schreiben aber nur der Bequemlichkeit wegen das Ganze in x, y; der Satz kann durch Projektion auf jede triangulär-symmetrische Kurve übertragen werden. Es sei

[1] $$\left(\frac{x}{\xi}\right)^m + \left(\frac{y}{\eta}\right)^m = 1$$

eine Lamésche Kurve, ξ und η die Abschnitte auf den Achsen, zwischen denen die Relation bestehen möge

[2] $$\left(\frac{\xi}{t}\right)^n + \left(\frac{\eta}{w}\right)^n = 1\,,$$

wo t und w feste Strecken bedeuten. Wir wollen nun die Einhüllende von [1] suchen. Durch totale Differentiation von [1] und [2] ergeben sich zwei Gleichungen, deren Zusammenbestehen durch

[3] $$\frac{\eta^{m+n}}{\xi^{m+n}} = \frac{y^m\, w^n}{x^m\, t^n}$$

bedingt ist. Statt dessen schreibt man

[3*] $$\eta = \vartheta y^{\frac{m}{m+n}} w^{\frac{n}{m+n}}\,, \qquad \xi = \vartheta x^{\frac{m}{m+n}} t^{\frac{n}{m+n}}\,.$$

Setzt man diese Werte in [1] und [2], so ergibt sich $\vartheta = 1$ und

[4] $$\left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{y}{w}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1$$

als Enveloppe. — So hüllt eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten in den Abständen d, d' zu den Koordinatenachsen parallel laufen und die immer durch den Anfangspunkt geht, eine gleichseitige Kreuzkurve ein, wenn $d^2 + d'^2 = r^2$, der Asymptotenschnittpunkt also auf einem Kreis (vom Radius r) um den Anfangspunkt bleibt.

§ 30. Die Radialen.

257. Wir kehren nun wieder zur Umdeutung von Gleichungen in andere Koordinatensysteme zurück, die uns auch auf die W-Kurven und ihre Verallgemeinerung,

die triangulär-symmetrischen Kurven, geführt hatte. Unter den natürlichen Bestimmungselementen einer Kurve wählten wir vorzugsweise $\mathcal{R}$ und s aus, um die Kurve darzustellen. Es ist uns aber schon bekannt, daß auch eine dieser beiden Größen in Verbindung mit dem von einer festen Tangente aus gezählten Tangentenwinkel τ zur Aufstellung einer die Kurve völlig charakterisierenden Gleichung verwendet werden kann. Der Übergang von einer solchen Gleichung zur gewöhnlichen natürlichen Gleichung ist vermittels der Relation $\mathcal{R}\,d\tau = ds$ jederzeit leicht möglich. Wir wollen nun zunächst die Gleichung

$$(1) \qquad \mathcal{R} = f(\tau)$$

betrachten. Was liegt näher, als sie in Polarkoordinaten umzudeuten? Wir brauchen zu dem Ende nur von einem festen Punkte O aus Strecken anzutragen, die den Krümmungsradien von (1) gleich und gleichgerichtet (»äquipollent«) sind und die dem Winkel $\tau = 0$ entsprechende Gerade als Polarachse zu nehmen. Gleichung (1) geht dann über in

$$(2) \qquad \varrho = f(\theta)\,.$$

Die so entstandene Kurve, die ein deutliches Bild von dem Verlauf der Krümmung bei der Grundkurve gibt, heißt man seit Tucker[202]) »Radiale« der gegebenen Kurve. Es ist sofort klar, daß irgendwelche Verschiebung von (1) nur eine Drehung von (2) bewirken kann, sowie daß ähnlichen Kurven ähnliche Radialen entsprechen. Bevor wir aber daran gehen, auf dem angegebenen Wege für mehrere der bekannten Kurven die Radialen aufzustellen, wollen wir einige allgemeine Eigenschaften der Radialen besprechen.

Wir bedienen uns dazu eines Verfahrens, das wir, obwohl es zur Untersuchung von allen aus einer Kurve vermittels Tangenteneigenschaften ableitbaren Kurvenfamilien (Evoluten und Evolventen, Fußpunktskurven, Brennlinien, Parallelkurven usw.) geeignet ist, doch bisher

---

[202]) Proc. Lond. Math. Soc. **1**, 1865. Vgl. ferner Loria, Rend. Circ. mat. Palermo **16**, 1902; Period. di mat. **17**, 1901, sowie eine im folgenden schon benutzte, demnächst im Arch. Math. Phys. erscheinende Arbeit von P. Ernst.

nicht systematisch verwendeten. Es sei nämlich die Tangente einer Kurve in der von W. P. HIERN »magisch« genannten[203]) Form gegeben

(3) $$\mathsf{T} \equiv x \cos\theta + y \sin\theta - p(\theta) = 0 .$$

Hier stellt θ den Winkel der Normalen gegen die x-Achse dar, der also von dem irgendwie gezählten Tangentenwinkel sich nur um eine Konstante unterscheiden kann, $p(\theta)$ die Länge des Lotes auf die Tangente T vom Anfangspunkt aus. In Polarkoordinaten ist also $\varrho = p(\theta)$ die Gleichung der Fußpunktskurve der von T eingehüllten Kurve Ψ in bezug auf den Anfangspunkt. Die Gleichung von Ψ erhält man, indem man θ aus (3) und

(4) $$\mathsf{T}' \equiv x \sin\theta - y \cos\theta + p'(\theta) = 0$$

eliminiert. Die Gerade T' schneidet T jedesmal in einem Punkte von Ψ. Da aber T' zu T senkrecht ist, so kann man (4) als Darstellung der Evolute von (3) auffassen. Bildet man ferner durch nochmalige Differentiation

(5) $$\mathsf{T}'' \equiv x \cos\theta + y \sin\theta + p''(\theta) = 0 ,$$

so erhält man eine Gerade T'', die zu T parallel ist und durch den jedesmaligen Berührungspunkt von T' geht, also durch den Krümmungsmittelpunkt von Ψ. T'' hüllt die zweite Evolute von Ψ ein. Die Länge des Krümmungsradius von Ψ ist

(6) $$\mathcal{R} = p(\theta) + p''(\theta) .$$

Faßt man hier $\mathcal{R}$, θ als Polarkoordinaten auf, so stellt (6) die Gleichung der Radialen von Ψ dar. Und wir können sagen (vgl. Nr. 2):

Die Radiale einer Kurve Ψ ist die Kissoide der Fußpunktskurve von Ψ und der Fußpunktskurve der zweiten Evolute von Ψ in bezug auf einen beliebigen Pol.

258. Diesen Satz können wir sofort benutzen, um ohne Anwendung der natürlichen Gleichung die Radialen der zykloidalen Kurven anzugeben. Wir entnehmen aus den früheren Entwicklungen, daß die zweite Evolute einer

---

[203]) The Quart, J. math. **6**, 1864, 31—38. — SERRET-SCHEFFERS, Diff.-Rechnung I. Bd. 3. Aufl. Leipzig 1906, S. 357/9.

solchen Kurve (Epi- und Hypozykloide, Para- und Hyperzykloide, logarithmische Spirale) zur Grundkurve ähnlich und ähnlich liegend ist. Die beiden Fußpunktskurven in bezug auf das Zentrum des Grundkreises sind dann ähnliche, ähnlich liegende Rhodoneen (Pseudorhodoneen, archimedische und logarithmische Spiralen). Ihre Kissoide ist also ebenfalls eine zur Fußpunktskurve ähnliche Rosenkurve. Führt man in der Tat in die Gleichung $s^2/a^2 + \mathcal{R}^2/b^2 = 1$ statt s den Tangentenwinkel τ ein, so ergibt sich $b\,\tau/a = \arccos(\mathcal{R}/b)$ und $\varrho = b \cos \frac{b}{a}\,\theta$ als Gleichung der Radiale.

Zusatz. Aus Gleichung (3) leitet man sofort ab, daß sowohl die Fußpunktskurve einer Parallelkurve zu Ψ im Abstande l, als auch die Radiale dieser Parallelkurve Konchoiden mit dem Zwischenstück l in bezug auf die Fußpunktskurve F und Radiale R der Grundkurve Ψ sind. Ist Ψ algebraisch, so entsprechen sich die Punkte von Ψ und F, sowie von Ψ und R gewiß (1,1)-deutig. Zerfällt nun etwa die Parallelkurve von Ψ, so müssen deswegen auch die Konchoiden von F und R zerfallen. Daher hat man den Satz: *Die Fußpunktskurve und Radiale einer Richtungskurve sind Kurven erster Kategorie* [vgl. Nr. 79 u. [209]]. An den algebraischen zyklischen Kurven läßt sich das sehr schön verfolgen, da diese, je nachdem die Anzahl ihrer reellen Spitzen gerade oder ungerade ist, Richtungskurven sind oder nicht, und wir auch für die Rosenkurven einen entsprechenden Satz schon aufgestellt haben (Nr. 105).

259. Wir müssen nun zuerst einen Satz über die Flächen der Fußpunktskurven[204]) einschalten, um diesen dann sofort auf die Fläche der Radiale anzuwenden. Die Fläche der Fußpunktskurve von Ψ ist

$$\mathcal{F} = \tfrac{1}{2}\int p^2(\theta)\, d\theta\,.$$

Diese Fläche ist, wenn man das Integral über die ganze Kurve erstreckt, endlich, soferne nur die ganze Fußpunktskurve im Endlichen liegt, Ψ also von der unendlich fernen Geraden nicht reell berührt wird. Nur ist eventuell der erweiterte Flächenbegriff in Anwendung zu bringen (Nr. 8). Die Fläche der Fußpunktskurve der ersten Evolute von Ψ, die auch oft »Gegenfußpunktskurve« genannt wird, ist

$$\mathcal{F}_1 = \tfrac{1}{2}\int p'^2(\theta)\, d\theta\,.$$

[204]) E. Catalan, Mém. Soc. Liége (2) **13**, 1886, 230. — Vgl. ferner K. Tsuruta, The Mess. math. (2) **23**, 1894 und verschiedene Antworten im Int. math. **2**, 1896, 107/9 u. 344/5.

Diese Fläche ist, auf die ganze Kurve erstreckt, endlich, wenn die Evolute nicht von der unendlich fernen Geraden berührt wird. Das ist nur dann nicht der Fall, wenn Ψ überhaupt nicht durchs Unendliche geht[205]. Man hat nun nach dem obigen

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_1 = \tfrac{1}{2}\int [p^2(\theta) - p'^2(\theta)]\, d\theta\,.$$

Diese Differenz ist also gewiß endlich, wenn nur Ψ sich im Endlichen schließt. Wir wollen nun aber auch die Fläche von Ψ selbst, die wir $\mathcal{F}_\psi$ nennen wollen, durch θ auszudrücken suchen. Diese Fläche ist, wenn wir die Polarkoordinaten der Punkte von Ψ mit $\tilde{\varrho}$, $\tilde{\omega}$ bezeichnen,

$$\mathcal{F}_\psi = \tfrac{1}{2}\int \tilde{\varrho}^2\, d\tilde{\omega}\,.$$

Aber man hat

$$p = \tilde{\varrho}\cos(\theta - \tilde{\omega})\,, \qquad -p' = \tilde{\varrho}\sin(\theta - \tilde{\omega})\,,$$

also

$$\tilde{\varrho}^2 = p^2 + p'^2\,.$$

Ferner

$$\theta - \tilde{\omega} = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{p'}{p}\right), \qquad d\theta - d\tilde{\omega} = \frac{p'^2 - p\,p''}{p^2 + p'^2}\, d\theta\,,$$

demnach

$$d\tilde{\omega} = \frac{p^2 + p\,p''}{p^2 + p'^2}\, d\theta\,,$$

also

$$\mathcal{F}_\psi = \tfrac{1}{2}\int (p^2 + p\,p'')\, d\theta\,,$$

das Integral über die ganze Kurve genommen. Nun erhält man durch partielle Integration

$$\int p\,p''\, d\theta = p\,p' - \int p'^2\, d\theta\,.$$

Es ist aber nach (3) und (4)

$$(7) \qquad -p\,p' = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)\sin 2\theta - x\,y\cos 2\theta\,,$$

und dieser Ausdruck muß um die ganze Kurve herum genommen werden. Wenn nun etwa θ beständig zunimmt, so kann man den Ausdruck einfach zwischen den Grenzen $\theta = 0$ und $\theta = 2\nu\pi$ nehmen und er verschwindet offensichtlich. Setzen wir daher noch weiter voraus, daß Ψ

[205] Vgl. über die Charaktere der Evoluten, Fußpunktskurven usw. algebraischer Kurven Salmon-Fiedler, *Höhere Kurven,* 2. Aufl. Leipzig 1882, Kap. III, insbes. S. 119.

keine Wendepunkte habe (wohl aber eventuell Doppelpunkte und Spitzen), dann ist

$$\mathcal{F}_\psi = \tfrac{1}{2}\int [p^2(\theta) - p'^2(\theta)]\, d\theta\,,$$

somit

(8) $$\mathcal{F}_\psi = \mathcal{F} - \mathcal{F}_1\,,$$

d. h. mit Worten: *Die Differenz der Flächen der Fußpunktskurve und Gegenfußpunktskurve einer im Endlichen geschlossenen Kurve Ψ ohne Wendepunkte ist gleich der Fläche der Kurve Ψ selbst.*

260. Kehren wir zur Radiale R der Kurve Ψ zurück. Hat Ψ die eben näher bezeichneten Eigenschaften, so ist auch R im Endlichen geschlossen. Dann ist die Gesamtfläche von R, wenn man über die ganze Kurve integriert, nach (6)

(9) $$\begin{aligned}\mathcal{F}_r &= \tfrac{1}{2}\int [p(\theta) + p''(\theta)]^2\, d\theta\,.\\ &= \tfrac{1}{2}\int p^2\, d\theta + \tfrac{1}{2}\int p''^2\, d\theta + \int p\,p''\, d\theta\,.\\ &= \tfrac{1}{2}\int p^2\, d\theta + \tfrac{1}{2}\int p''^2\, d\theta + p\,p' - \int p'^2\, d\theta\,.\end{aligned}$$

Es kommt nun wieder darauf an, daß $p\,p'$ über die ganze Kurve Ψ genommen verschwinde. Genügt also Ψ den oben gegebenen Bedingungen, so wird

(9*) $$\mathcal{F}_r = \tfrac{1}{2}\int [p^2 - p'^2]\, d\theta - \tfrac{1}{2}\int [p'^2 - p''^2]\, d\theta\,.$$

Nach Satz (8) können wir also sagen: *Die Fläche der Radiale einer im Endlichen geschlossenen Kurve Ψ ohne Wendepunkte ist gleich der Differenz aus den Flächen der Kurve und ihrer Evolute.*

Es sei nun die Radiale von Ψ wieder in der Form (1) $\mathcal{R} = f(\tau)$ gegeben. *Dann ist ihre Fläche*

(10) $$\mathcal{F}_r = \tfrac{1}{2}\int \mathcal{R}^2\, d\tau\,.$$

Dies ist zu gleicher Zeit die Fläche zwischen der Kurve und ihrer Evolute. Denn das Elementardreieck hat in Fig. 181 den Inhalt $\frac{1}{2}\mathcal{R}(\mathcal{R} + d\mathcal{R})\, d\tau$, was in der Grenze in $\frac{1}{2}\mathcal{R}^2\, d\tau$ übergeht. Ferner ist die Mannheimsche Kurve M von Ψ dargestellt durch die Gleichungen (vgl. Nr. 162)

Fig. 181.

$$y = \mathcal{R}\,, \quad x = \int \mathcal{R}\, d\tau\,.$$

Die Fläche der Mannheimschen Kurve ist also

(11) $$\mathcal{F}_m = \int y\,dx = \int \mathcal{R}^2\,d\tau\,.$$

Demnach ist die Fläche der Mannheimschen Kurve einer Kurve Ψ *doppelt so groß wie die entsprechende Fläche der Radiale von* Ψ.

Auch zwischen den Bogenlängen von M und R besteht eine einfache Beziehung. Es ist

(12) $$s_r = \int \sqrt{\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}'^2}\,d\tau$$

und

(13) $$s_m = \int \sqrt{d\,\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^2\,d\tau^2} = \int \sqrt{\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}'^2}\,d\tau\,.$$

D. h. *die entsprechenden Bogen der Mannheimschen Kurve und der Radiale einer Kurve* Ψ *sind gleich lang.* Beide Beziehungen wurden von MANNHEIM[206]) selbst angegeben.

261. Wir wollen nun die Radialen mehrerer Kurvengattungen aufstellen; dabei werden sich einige merkwürdige Zusammenhänge zwischen Kurven verschiedener Art ergeben. Für die Zykloidalen aller Art stellten wir schon oben fest, daß ihre Radialen Rhodoneen aller Arten sind. Es erübrigt noch zu sagen, daß die Radiale der gewöhnlichen Zykloide ein Kreis ist mit dem größten Krümmungsradius der Zykloide als Durchmesser. Dies geht aus der in Nr. 258 angegebenen Gleichung $\varrho = b\cos\frac{b}{a}\theta$ für $b = a$ hervor. Die Radiale eines Kreises ist natürlich ein kongruenter Kreis.

Aus der Gleichung $\mathcal{R} = s^2/p + q$ der Kettenlinien (Nr. 204) erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d\,\mathcal{R}\sqrt{p}}{\mathcal{R}\sqrt{\mathcal{R} - q}} = 2\,d\tau$$

und daraus

$$\sqrt{\frac{p}{q}}\arccos\sqrt{\frac{q}{\mathcal{R}}} = \tau\,,$$

was man besser in der Form

(14) $$\mathcal{R}\cos^2\left(\tau\sqrt{\frac{q}{p}}\right) = q$$

---

[206]) *Géom. ciném.* S. 501.

schreibt. Diese Kurve, in Polarkoordinaten gedeutet, ist algebraisch, wenn $\sqrt{q/p}$ eine rationale Zahl ist, in allen anderen Fällen transzendent. Sie wird besonders einfach im Falle der gemeinen Kettenlinie $(q = p)$. Wir wissen, daß $\varrho \cos^2 \theta = p$ die Gleichung der Kampyla des EUDOXUS ist (Nr. 45).

Die Evolventen der Kettenlinien vom Scheitel aus (Traktrizen) haben die allgemeine Gleichung (Nr. 208) $\mathcal{R} = \sqrt{p\,q(e^{2s/p} - 1)}$. Hieraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}^2 + p\,q} = \frac{d\tau}{p},$$

die als Lösung hat

$$\mathcal{R} = \sqrt{p\,q} \cdot \operatorname{tg}\left(\tau \sqrt{\frac{q}{p}}\right). \tag{15}$$

Hier gilt dieselbe Bemerkung wie vorhin. Im Falle der gewöhnlichen Traktrix $(q = p)$ wird die Polargleichung der Radialen $\varrho = p \operatorname{tg} \theta$; dadurch wird die Kappakurve dargestellt (Nr. 55).

Wir fügen hier noch die Kettenlinie gleichen Widerstandes mit der natürlichen Gleichung $\mathcal{R} = \frac{1}{2} a(e^{s/a} + e^{-s/a})$ an. Schon in Nr. 226 sahen wir, daß hieraus $\mathcal{R} \cos \tau = a$ hervorgeht. Die Polargleichung $\varrho \cos \theta = a$ stellt aber eine Gerade $(x = a)$ dar. Also ist die Radiale der Kettenlinie gleichen Widerstandes eine Gerade. Hieraus ist nach den Sätzen der vorigen Nummer wieder ersichtlich, daß die gemeine Kettenlinie (als Mannheimsche Kurve der Kettenlinie gleichen Widerstandes) elementar quadrierbar und rektifizierbar ist.

262. Aus der natürlichen Gleichung der Kegelschnitte (Nr. 126) erhält man sofort

$$d\tau = \frac{d\mathcal{R}}{3\mathcal{R}\sqrt{\left[1 - \left(\frac{b\mathcal{R}}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] \cdot \left[\left(\frac{a\mathcal{R}}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]}}.$$

Der Ausdruck rechter Hand ist elementar integrierbar; man formt ihn am besten um in

$$d\tau = \frac{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} d\mathcal{R}}{3\mathcal{R}^{\frac{5}{3}}\sqrt{\left[\left(\frac{a^2}{b\mathcal{R}}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]\left[1 - \left(\frac{b^2}{a\mathcal{R}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}}$$

und setzt nun

$$\left(\frac{a^2}{b\,\mathcal{R}}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = u\,,$$

woraus

$$\mathcal{R} = \frac{a^2}{b(1+u)^{\frac{3}{2}}}\,, \quad d\mathcal{R} = -\frac{3\,a^2\,du}{2\,b\,(1+u)^{\frac{5}{2}}}\,,$$

so daß die Gleichung übergeht in

$$d\tau = -\frac{b\,du}{2\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{u\left(1-\frac{b^2}{a^2-b^2}\,u\right)}}\,.$$

Substituiert man hier nochmals $\frac{b^2}{a^2-b^2}\,u = z$, so wird

$$\tau = \arccos\sqrt{z} = \arccos\frac{b\sqrt{u}}{\sqrt{a^2-b^2}}\,.$$

Indem man den Wert von u einführt, ergibt sich schließlich die Gleichung in $\mathcal{R}$ und τ

(16) $$\left(\frac{a^2}{\mathcal{R}}\right)^2 = \frac{(a^2\cos^2\tau + b^2\sin^2\tau)^3}{b^4}\,.$$

Deutet man diese in Polarkoordinaten um und führt rechtwinkelige Koordinaten ein, so hat man die Gleichung der Radiale in der Form

(17) $$(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = a^4b^4(x^2+y^2)^2\,.$$

Das ist also eine algebraische Kurve 6. Ordg. mit Spitzen in den unendlich fernen Punkten. Die Richtungen nach diesen Punkten sind um $\frac{1}{2}\pi$ gegen die Asymptotenrichtungen des Kegelschnittes gedreht. Spitzentangente ist die unendlich ferne Gerade selbst. Es gibt demnach keine Asymptote. Der Anfangspunkt ist ein vierfacher isolierter Punkt, dessen Tangenten die isotropen Geraden sind. Die Formen der Radialen der Ellipse ($b^2 > 0$) und Hyperbel ($b^2 < 0$) sind aus den Fig. 182 und 183 zu ersehen.

Die Radiale der Parabel erhalten wir aus (17), indem wir mit a^6 dividieren, $\lim\frac{b^2}{a^2} = 0$, aber $\lim\frac{b^2}{a} = p$ setzen, in der Form

$$x^6 = p^2(x^2+y^2)^2\,,$$

die sich sofort in

(18) $$x^3 = \pm p(x^2 + y^2)$$

spaltet, wovon für eine bestimmte Lage der Parabel nur ein Vorzeichen gilt. Die Kurve ist 3. Ordg., hat einen

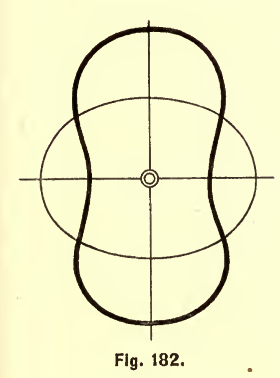


Fig. 182.

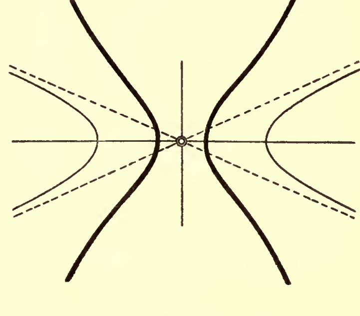


Fig. 183.

isolierten Punkt im Ursprung und einen Wendepunkt im unendlich fernen Punkte der y-Achse. Die beiden Wendepunkte von (18) sind das Grenzgebilde, das entsteht, wenn die zwei Spitzen auf der unendlich fernen Geraden zusammenrücken.

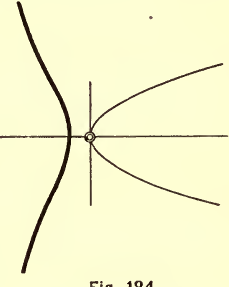


Fig. 184.

Zusatz. Die Polargleichung der Radiale der Parabel $\varrho = p/\cos^3\theta$ zeigt, daß sie zu einer Kurvenfamilie

[1] $$\varrho = a\cos^n\theta$$

gehört, deren Konstruktion aus dem Kreise $\varrho = a\cos\theta$ für positives und negatives ganzzahliges n aus der Gleichung sofort ersichtlich ist. Wir kennen außerdem von dieser Familie die Kurven für $n = 2$ (Doppeleilinie, Nr. 46), $n = 3$ (Einblatt, Nr. 108), $n = -1$ (Gerade). Die Radiale der Parabel ist die Inverse des Einblattes. Wie dieses, wurde sie auch von G. de Longchamps von einem anderen Gesichtspunkte aus aufgestellt[207]) und, da sie zur Würfelverdoppelung bequem ist, »kubische Duplikatrix« genannt. Aus einem ähnlichen Grunde heißen die allgemeinen Kurven [1] »Multiplikatrixkurven«.

[207]) *Essai sur la géom. de la règle etc.*, S. 92/4.

263. Wir erinnern uns, daß die Gleichung jeder n^{ten} Kreisevolvente in $\mathcal{R}$ und τ lautete (Nr. 191)

$$\mathcal{R} = c_0 \tau^n + c_1 \tau^{n-1} + \ldots + c_n .$$

Die zugehörigen Radialen sind daher algebraische Spiralen höherer Ordnung; indessen sind sie für $n > 1$ nicht ähnlich zu den entsprechenden Fußpunktskurven, da diese andere Koeffizienten haben (Nr. 192). Z. B. konnten wir die Fußpunktskurve der Sturmschen Spirale in die Form bringen $\varrho = a\,\tilde{\omega}^2 - a$, während die Radiale, da der Kurve die Gleichung $\mathcal{R} = a(\tau^2 + 2\tau + 2)$ zugehört, in die Form $\varrho = a\,\tilde{\omega}^2 + a$ gebracht werden kann. Das ist auch geometrisch sofort verständlich, weil die Sturmsche Spirale keine reellen Spitzen hat.

Die Umformung der Gleichung $\mathcal{R} = a^{1-n} s^n$ der Pseudospiralen (Nr. 231) ergibt

$$\mathcal{R} = (1-n)^{\frac{n}{1-n}}\, a\, \tau^{\frac{n}{1-n}}, \tag{19}$$

also bestimmte höhere parabolische oder hyperbolische Spiralen. Gleichung (19) stellt höhere Hauptevolventen des Kreises dar, wenn $n/(1-n)$ gleich einer ganzen Zahl g ist, n also die Form $g/(g+1)$ hat.

Anschließend wollen wir auch die Radialen der binomischen Kurven $y = a^{1-n} x^n$, wo aber x, y rechtwinkelige Koordinaten seien, aufstellen, eine genauere Diskussion für die verschiedenen Arten des Exponenten n jedoch dem Leser überlassen. Der in Nr. 234 (4) angegebene Wert von $\mathcal{R}$ wird für $\omega = \frac{1}{2}\pi$

$$\mathcal{R} = \frac{[1 + n^2 a^{2(1-n)} x^{2(n-1)}]^{\frac{3}{2}}}{n(n-1)\, a^{1-n} x^{n-2}} .$$

Außerdem ist

$$ds = [1 + n^2 a^{2(1-n)} x^{2(n-1)}]\, dx .$$

Setzt man hier $ds = \mathcal{R}\, d\tau$ und substituiert aus der vorigen Gleichung den Wert von $\mathcal{R}$, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d\tau}{n(n-1)\, a^{1-n}} = \frac{x^{n-2}\, dx}{1 + n^2 a^{2(1-n)} x^{2(n-1)}} .$$

Durch die Substitution $n\, a^{1-n} x^{n-1} = u$ wird diese zu

$$d\tau = du/(1+u^2) ,$$

woraus $n a^{1-n} x^{n-1} = \operatorname{tg}\tau$ folgt. Setzt man den hieraus entspringenden Wert von x in den obigen Ausdruck von $\mathcal{R}$ ein, so kommt die Polargleichung der Radiale einer binomischen Kurve beliebiger Art in der Form

$$(20) \qquad \mathcal{R} = \frac{a}{n^{\frac{1}{n-1}}(n-1)\cos^3\tau(\operatorname{tg}\tau)^{\frac{n-2}{n-1}}}.$$

Hieraus geht sofort die kartesische Gleichung hervor:

$$(20^*) \qquad y^{n-2}x^{2n-1} = c^{n-1}(x^2+y^2)^{n-1},$$

wo c die Konstante von (20) ist. Für rationales n ist also die Radiale wie die Grundkurve algebraisch.

Entweder mittels der Gleichung in $\mathcal{R}$, τ oder auch mittels der magischen Gleichung der Tangente kann man das Problem lösen, eine Kurve zu suchen, zu welcher eine gegebene Kurve die Radiale ist. Der Leser mag so die von uns gegebenen Beispiele umkehren. Man findet natürlich für die Gerade als »Antiradiale« die Kettenlinie; für den Kreis bei beliebigem Pol ist das Problem schwieriger. Mit Hilfe der Vektorenrechnung gelang C. Mineo die Aufstellung einer Parameterdarstellung und Diskussion der betreffenden Kurven[208]).

§ 31. **Arcuiden.**

264. Wir hätten nun auch noch die Gleichungsform

$$(1) \qquad s = \Phi(\tau)$$

einer Umdeutung in ein anderes Koordinatensystem zu unterziehen. Man könnte hierzu verschiedenes vorschlagen, insbesondere auch wieder Polarkoordinaten einführen. Man erhielte dann nach der Bem. in Nr. 225, Zus. die Radiale einer Evolvente von (1). Diese Tatsache wird uns weiter unten von Nutzen sein. Hier wollen wir eine andere Umdeutung von großer Tragweite besprechen, die von E. Köstlin[209]) gegeben wurde. Es sei

$$x + vy - w = 0$$

---

[208]) S. Rend. Circ. mat. Palermo **24**, 1907, 258—265. — Bez. der angewandten Methode Burali-Forti, ibid. **16**, 1902, 185—191.
[209]) Diss. Tübingen 1907.

die Gleichung einer Geraden, diese also durch die Linienkoordinaten v, w bestimmt. Von diesen Größen ist w der Abschnitt, den die Gerade auf der x-Achse macht, $v = \operatorname{tg} \varphi$ die Tangente des Winkels φ, den das Lot vom Anfangspunkt auf die Tangente mit der positiven x-Achse einschließt. Die Koordinaten w, φ, die z. B. bei SALMON-FIEDLER[210]) mehrfach verwendet werden und von denen AOUST[113]) einen ausgedehnten Gebrauch macht, nennt man zweckmäßig »axiale Linienkoordinaten«. Ersetzt man nun in der natürlichen Gleichung (1) s, τ durch die axialen Linienkoordinaten w, φ, so ergibt sich eine Kurve B

$$w = \Phi(\varphi) = \Phi(\operatorname{arc} \operatorname{tg} v)\,, \tag{2}$$

die sich aus der Grundkurve, die wir wieder Ψ nennen wollen, durch folgende Konstruktion ableiten läßt: Man nehme die Tangente von Ψ, für welche $\tau = 0$ ist, als x-Achse und trage auf ihr, von einem beliebig zu wählenden Anfangspunkt O aus, die Strecken $OQ = w = s$ auf, wo s die auf Ψ von einem festen Punkte A bis zu dem laufenden Punkte P gemessene Bogenlänge bedeutet. Durch Q ziehe man jedesmal die Parallele N zu der Kurvennormale in P. Die Enveloppe von N ist die Kurve B. Diese wollen wir mit E. KÖSTLIN die »Arcuide«[211]) von Ψ nennen.

265. Wir geben nun zunächst eine Darstellung der Arcuide B in kartesischen Koordinaten, um daraus einige allgemeine Folgerungen zu ziehen, sodann mehrere bemerkenswerte Beispiele. Bezüglich alles weiteren müssen wir auf ein genaueres Studium der oben zitierten Dissertation verweisen. Es seien x, y die laufenden Koordinaten von Ψ, wenn Ψ mit B auf dasselbe rechtwinklige System bezogen wird, ξ, η die von B. Dann ist B als Einhüllende der Geraden

$$\xi + \eta \operatorname{tg} \tau - s = 0$$

oder

$$\xi + \eta y' - \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 0 \tag{3}$$

---

210) *Höhere Kurven,* 2. Aufl. Leipzig 1882, Nrn. 13, 69, 74, 118, 122.

211) S. Mitt. math.-nat. V. Württ. (2) **9**, 21—30, bes. S. 27. — Dort ist die Benennung »Bogenevolute« gebraucht. Wir führen die Bezeichnung »Arcuide« auf persönlichen Vorschlag von Herrn KÖSTLIN ein.

zu bestimmen. Wir haben also (3) partiell nach x zu differenzieren. Dies ergibt sogleich

(4) $$\eta = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y''} = \frac{\mathcal{R}}{1+y'^2} = \mathcal{R}\cos^2\tau$$

und hierauf mit Hilfe von (3)

(5) $$\xi = \int\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'}{y''}\sqrt{1+y'^2} = s - \mathcal{R}\sin\tau\cos\tau\,.$$

Die Gleichungen (4) und (5) geben eine Parameterdarstellung von B, wenn nur die Gleichung von Ψ in kartesischen oder natürlichen Koordinaten gegeben ist.

Jetzt bestimmen wir das Bogenelement von B. Dabei bezeichnen wir die Elemente von B mit $\mathcal{R}_b$ und s_b, die der Evolute von Ψ durch einen Strich über den Koordinaten; $\bar{x}$, $\bar{y}$ sind also die Koordinaten des Krümmungszentrums des Punktes P auf Ψ. Man erhält

$$d\xi = \sin\tau(2\,ds\sin\tau - d\mathcal{R}\cos\tau)$$

$$d\eta = -\cos\tau(2\,ds\sin\tau - d\mathcal{R}\cos\tau)$$

und hieraus

(6) $$ds_b = 2\,ds\sin\tau - d\mathcal{R}\cos\tau\,.$$

Nun ist aber $ds\sin\tau = dy$ und, wie man leicht erkennt, $d\mathcal{R}\cos\tau = d\bar{y}$, also

(6*) $$s_b - s_0 = 2y - \bar{y}\,.$$

Setzt man ferner in (6) $ds_b = \mathcal{R}_b \cdot d\tau_b$ und bemerkt, daß $\tau_b = \tau + \frac{1}{2}\pi$, also $d\tau_b = d\tau$, so bekommt man

(7) $$\mathcal{R}_b = 2\frac{ds}{d\tau}\sin\tau - \frac{d\mathcal{R}}{d\tau}\cos\tau$$

oder

(7*) $$\mathcal{R}_b = 2\mathcal{R}\sin\tau - \overline{\mathcal{R}}\cos\tau\,.$$

Die Gleichungen (6) und (7) geben eine Darstellung von B in natürlichen Koordinaten.

Beisp. Um sofort die Brauchbarkeit der gegebenen Formeln darzutun, werde die Arcuide des Kreises $\mathcal{R} = r$ $(s = r\tau)$ gleich hier aufgestellt. Es ergibt sich $s_b = -2r\cos\tau$, $\mathcal{R}_b = 2r\sin\tau$, also $s_b^2 + \mathcal{R}_b^2 = (2r)^2$, d. i. eine Zykloide, die durch Rollen eines Kreises vom Durchmesser r von einem Punkte dieses Kreises beschrieben wird. Die Konstruktion der Arcuide führt aber

direkt auf die Chaslessche Erzeugung (Nr. 147), bei welcher ein Durchmesser des rollenden Kreises vom Radius r die Zykloide umhüllt.

266. Die Arcuide B mit der Gleichung

$$w = \Phi(\operatorname{arc} \operatorname{tg} v)$$

ist offenbar dann eine algebraische Kurve, wenn Ψ durch eine in s und $v = \operatorname{tg}\varphi$ rationale Gleichung darstellbar ist, die $\Psi(s, \operatorname{tg}\varphi) = 0$ lauten möge. Ist außerdem Ψ etwa selbst eine algebraische Kurve mit der kartesischen Gleichung $f(x, y) = 0$, so hat man noch die Beziehung $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \operatorname{tg}\varphi = 0$. Setzt man nun den hieraus zu entnehmenden Wert von $\operatorname{tg}\varphi$ in $\Psi = 0$ ein, so ergibt sich eine Gleichung $\Psi_1(s, x, y) = 0$, die in s, x und y rational ist. Ψ ist also dann, wie man sagt, »algebraisch rektifizierbar«. Es folgt aber auch umgekehrt durch Elimination von x und y aus $f(x, y) = 0$, $\Psi_1(s, x, y) = 0$ und $f_x + f_y \operatorname{tg}\varphi = 0$ eine rationale Gleichung $\Psi(s, \operatorname{tg}\varphi) = 0$, so daß wir sagen können: *Die Arcuide B einer algebraischen Kurve Ψ ist dann und nur dann selbst algebraisch, wenn Ψ algebraisch rektifizierbar ist.* Nach einem von G. Humbert zum ersten Male rein analytisch bewiesenen Satze[212]), der geometrisch leicht verständlich ist, *muß Ψ dann immer die Evolute einer algebraischen Kurve sein.*

Wir wollen nun über Ψ eine andere Voraussetzung machen. Die Kurve Ψ genüge einer Differentialgleichung erster Ordnung

(8) $$\mathcal{D}(y, y') = 0,$$

wo also $\mathcal{D}$ eine ganze rationale Funktion in y, y' ist. Diese Bedingung erfüllt nicht nur jede algebraische Kurve, da aus $f(x, y) = 0$ und $f_x + f_y \cdot y' = 0$ sich durch Elimination von x eine Gleichung der Form (8) ergibt, sondern sie umschließt auch noch eine große Anzahl von transzendenten Kurven. Es läßt sich dann beweisen, daß auch B eine Gleichung derselben Art $\mathcal{D}_1(\eta, \eta') = 0$ erfüllt und daß außerdem eine in s_b und η rationale Gleichung $\Delta(s_b, \eta) = 0$ besteht.

---

212) S. die Abhdlg. „*Sur les courbes algébriques planes rectifiables*", Journ. de math. (4) **4**, 1888, S. 133—152.

Man hat in der Tat die Gleichungen

$$\mathcal{D}(y\,,\,y') = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial y'} \cdot y'' = 0$$

und nach Nr. 3 und 4

$$\eta' \cdot y' + 1 = 0 \quad \text{und} \quad \eta^2 - \frac{1 + y'^2}{y''} = 0\,.$$

Aus diesen vier Gleichungen muß sich wirklich durch Elimination von y, y', y'' eine rationale Gleichung $\mathcal{D}_1(\eta\,,\eta') = 0$ ergeben.

Außerdem ist bekanntlich

$$\bar{y} = y + \frac{1 + y'^2}{y''}\,,$$

so daß Gleichung (6*) wird

$$s_b - s_0 = y - \frac{1 + y'^2}{y''}\,.$$

Die Elimination von $y\,,\ y',\ y''$ aus dieser Gleichung und drei von den vier oben benützten ergibt die rationale Bedingung $\Delta(s_b\,,\,\eta) = 0$. Wir können also sagen:

Jede Kurve Ψ, *die einer Differentialgleichung erster Ordnung* $\mathcal{D}(y\,,\,y') = 0$ *genügt, hat zur Arcuide* B *eine Kurve derselben Art, die außerdem algebraisch rektifizierbar ist.*

267. Ist nun aber Ψ selbst algebraisch und algebraisch rektifizierbar, so hat B noch eine besondere Eigenschaft. Dreht man nämlich die Kurve Ψ um den Winkel φ_0 gegen das Koordinatensystem, zählt aber die Bogen auf Ψ von demselben Punkte aus wie vorher, so erhält man die entsprechende Arcuide B_0, indem man alle Tangenten von B um ihre bezüglichen Schnittpunkte mit der x-Achse um den konstanten Winkel φ_0 dreht und deren Einhüllende in der neuen Lage bestimmt[213]. Die Gleichung $\Psi(s\,,\,\mathrm{tg}\varphi) = 0$ geht dann über in $\Psi(s\,,\,\mathrm{tg}(\overline{\varphi} - \varphi_0)) = 0$ und die Tangentialgleichung $\Psi(w\,,\,v) = 0$ in $\Psi\left(w\,,\,\frac{v - v_0}{1 + v\,v_0}\right) = 0$. Auch die neue Kurve ist algebraisch und algebraisch rektifizierbar, wenn nur Ψ es ist. Denn Ψ erfüllt eine Differential-

[213]) Diese Transformation hat E. Köstlin genauer studiert in den Mitt. math. V. Württ. (2) 8, 1906, 72—99.

gleichung $\mathcal{D}(y, y') = 0$. Durch die Drehung geht diese über in $\mathcal{D}_0(\bar{y}, \bar{y}') = 0$, eine Gleichung, die man erhält, wenn man in $\mathcal{D}$ die Substitution $x = \bar{x}\cos\varphi_0 - \bar{y}\sin\varphi_0$, $y = \bar{x}\sin\varphi_0 + \bar{y}\cos\varphi_0$ vornimmt und dann $\bar{x}$ wieder mit Hilfe der ebenso transformierten Gleichung von Ψ eliminiert. Ist aber Ψ transzendent und erfüllt in einer bestimmten Lage eine Differentialgleichung $\mathcal{D}(y, y') = 0$, so wird dies nach der Drehung nicht mehr der Fall sein, da die vorhin geschilderte Elimination von $\bar{x}$ dann, wenn sie überhaupt möglich ist, nicht zu einer rationalen Beziehung $\mathcal{D}(\bar{y}, \bar{y}') = 0$ führen kann.

Die x-Achse heißt »Rektifikationsachse« der Kurven B_0. Alle Kurven B_0 sind, da sie vermittels ihrer Tangenten (1,1)-deutig aufeinander bezogen werden, von demselben Geschlecht und haben die nämlichen Brennpunkte, da die isotropen Geraden jeder Drehung gegenüber invariant sind.

Beisp. 1. Ein sehr glückliches Beispiel für das eben Dargelegte bieten die Epi- und Hypozykloiden. Sie sind (Nr. 258) durch die Gleichung $\mathcal{R} = b\cos\frac{b}{a}\tau$ dargestellt, die sofort zu der anderen $s = a\sin\frac{b}{a}\tau$ führt. Beginnen wir die Zählung der Bogen bei $\tau = \tau_0$, legen also die Gleichungen zugrunde

[1] $$s = a\sin\frac{b}{a}(\tau - \tau_0)\,, \quad \mathcal{R} = b\cos\frac{b}{a}(\tau - \tau)\,,$$

so hat man für B die Darstellung in axialen Linienkoordinaten

[2] $$v = \operatorname{tg}\tau\,, \quad w = a\sin\frac{b}{a}(\tau - \tau_0)\,.$$

Ist b/a ein rationales Verhältnis, so sind die Zykloidalen rationale algebraische Kurven und die Arcuiden desgleichen, wie man aus [2] erkennt. Wir wissen ferner, daß die Kurven [1] auch algebraisch rektifizierbar sind [Nr. 138 (4)]. Also müssen es auch die Kurven [2] sein und zwar für jeden Wert von τ_0. Mittels (6) erhält man in der Tat für $b/a \gtrless 1$

[3] $$s_b - s_0 = -\tfrac{1}{2}b\left\{\frac{2a+b}{a+b}\cos\left[\frac{a+b}{a}\tau - \frac{b}{a}\tau_0\right] + \frac{2a-b}{a-b}\cos\left[\frac{a-b}{a}\tau + \frac{b}{a}\tau_0\right]\right\}.$$

Hieraus geht wegen $\operatorname{tg}\tau = -f_y/f_x$ wirklich eine algebraische Gleichung zwischen s_b, x und y hervor.

Der Fall $b = a$ (gewöhnliche Zykloide) ist für sich zu betrachten. Hier ist die Grundkurve transzendent, genügt in der gewöhnlichen Lage einer Gleichung $\mathcal{D}(y, y') = 0$ und ist durch

eine andere Gleichung $\Delta(s, y) = 0$ algebraisch rektifizierbar. In der Tat geht aus

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \quad y = r(1 - \cos\varphi)$$

hervor $dy/dx = \sqrt{(2r - y)/y}$, also die Differentialgleichung

$$y y'^2 + y - 2r = 0.$$

Ferner ergibt sich $s = 2\sqrt{2r(2r - y)}$, so daß also $s^2 + 8ry - 16r^2 = 0$ ist. Trotzdem sind die Arcuiden der Zykloide nur für $\tau_0 = 0$, also für die spezielle Lage algebraisch rektifizierbar, wenn sie auch für jede Lage algebraisch sind.

Man erhält hier mittels (6)

[4] $$s_b - s_0 = \tfrac{1}{2} a \left(\tau \sin\tau_0 - \tfrac{3}{2}\cos(2\tau - \tau_0)\right),$$

was die eben ausgesprochene Behauptung bestätigt. Schon aus [4] ist erkennbar, daß die Arcuide für $\tau_0 = 0$ eine reguläre Astroide, für jeden anderen Wert von τ_0 die Parallelkurve einer solchen ist. Die Gleichungen [2] geben auch sofort die Gleichung in Linienkoordinaten in der Form

[5] $$w^2(u^2 + v^2) = a^2 u^2 (v\cos\tau_0 - u\sin\tau_0)^2,$$

wo nur noch die homogenisierende Variable u eingeführt wurde. Diese Gleichung [5] stimmt noch nicht mit (5*) in Nr. 76 überein. Machen wir aber die Drehung $u = \bar{u}\cos\frac{1}{2}\tau_0 - \bar{v}\sin\frac{1}{2}\tau_0$, $v = \bar{u}\sin\frac{1}{2}\tau_0 + \bar{v}\cos\frac{1}{2}\tau_0$, so geht [5] über in

[5*] $$\begin{cases} \bar{w}^2(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) = a^2(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - \bar{u}\bar{v}\sin\tau_0)(\bar{u}\sin\frac{1}{2}\tau_0 - \bar{v}\cos\frac{1}{2}\tau_0)^2 \\ \qquad = a^2(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - \bar{u}\bar{v}\sin\tau_0)^2. \end{cases}$$

Das ist die frühere Form.

Beisp. 2. Des weiteren betrachten wir die gewöhnliche Kettenlinie. Ihre Gleichung in s, τ ist

[6] $$s = p\,\mathrm{tg}(\tau - \tau_0).$$

Die Arcuide für die spezielle Lage $\tau_0 = 0$ hat die Gleichung in Linienkoordinaten $pv - w = 0$; diese stellt den Punkt F mit den Koordinaten $x = 0$, $y = p$ dar. Dreht man jede der durch diesen Punkt gehenden Geraden um ihren Schnittpunkt mit der x-Achse, so entsteht für jedes τ_0 eine Parabel, die die x-Achse berührt und F als Brennpunkt hat. Diese Arcuiden sind also in der Tat bloß algebraisch, aber nicht auch algebraisch rektifizierbar. Ihre Gleichung ist

$$w = pu \cdot \frac{v - uv_0}{u + vv_0}.$$

Beisp. 3. Nicht jede algebraische, algebraisch rektifizierbare Kurve besitzt eine Rektifikationsachse in dem angegebenen Sinne. Wir sahen dies schon im 1. Beispiel bei der Astroide. Kurven

mit Rektifikationsachse sind z. B. die algebraisch rektifizierbaren höheren Parabeln mit der Gleichung $y^{2n+1} = a x^{2n}$; ihre Rektifikationsachse ist parallel zur x-Achse. Für $n = 1$ ergibt sich die Neilsche Parabel, deren Rektifikationsachse von ihrer Spitze dreimal so weit entfernt ist als von ihrem Brennpunkt. Näheres bei E. Köstlin a. a. O. S. 89 ff. Andere Kategorien werden wir in der nächsten Nummer und in Nr. 275 kennen lernen.

268. Der in der vorigen Nummer bewiesene Satz über die Arcuiden aller algebraischen, algebraisch rektifizierbaren Kurven Ψ führt zu einer charakteristischen Eigenschaft der Radialen algebraischer Kurven. Der Bogen s der Kurve Ψ ist gleich dem Krümmungsradius $\mathcal{R}$ einer Evolvente von Ψ. Ist also $\Psi(s, \tau) = 0$ die Gleichung von Ψ, so ist nach dem Satz von Humbert (Nr. 266) $\Psi(\varrho, \theta) = 0$ die Gleichung der Radiale einer ganz beliebigen algebraischen Kurve. Daher hat man den Satz:

Trägt man auf einer beliebigen Geraden G *durch den Pol O der Radiale* R *einer algebraischen Kurve* C *jedesmal eine Strecke OQ ab gleich dem Radiusvektor OP von* R *und fällt die Gerade* T *durch Q senkrecht zu OP, so ist die Einhüllende von* T *eine algebraische, algebraisch rektifizierbare Kurve mit* G *als Rektifikationsachse.*

Diesen Satz wollen wir gleich benützen, um den Beweis zu liefern, daß die durch die Gleichung in axialen Linienkoordinaten

$$w = a \cos^{2n}\varphi \tag{9}$$

bestimmte Kurvenfamilie, über die wir unten noch einiges mitteilen wollen, unendlich viele Gerade, und zwar alle ihre eigenen Tangenten zu Rektifikationsachsen hat (n eine ganze positive Zahl). Wir müssen zu diesem Zwecke nur Gleichung (9) auf eine beliebige Tangente als Achse transformieren, die neue Gleichung $w' = \Omega(\varphi')$ in Polarkoordinaten deuten und zeigen, daß zu der Kurve $\varrho = \Omega(\theta)$ als Grundkurve eine algebraische Kurve als Antiradiale gehört.

269. Es seien w_0, φ_0 die Koordinaten einer beliebigen Tangente der Kurve (9), die wir als neue Achse nehmen wollen. Ihr Schnittpunkt O' mit der alten Achse sei Anfangspunkt für die neuen Koordinaten w', φ'. Schneidet eine variable Tangente diese Achse in Q', so ist $O'Q' = w'$

und der spitze Winkel bei Q' gleich $\frac{1}{2}\pi - \varphi'$. Man erhält dann laut Fig. 185 die Transformationsformeln

$$w' = (w - w_0)\frac{\sin(\varphi' + \varphi_0)}{\cos\varphi'}, \quad \varphi' = \tfrac{1}{2}\pi + (\varphi - \varphi_0).$$

Kehrt man diese um und setzt in (9) ein, so ergibt sich als transformierte Gleichung, da $w_0 = a\cos^{2n}\varphi_0$

(9*) $$w' = a\{\sin^{2n}(\varphi' + \varphi_0) - \cos^{2n}\varphi_0\}\frac{\sin(\varphi' + \varphi_0)}{\cos\varphi'}.$$

Ersetzen wir hier w' durch $\mathcal{R}$, φ' durch τ, so haben wir die Kurve $\mathcal{R} = \Omega(\tau)$, die Antiradiale von $\varrho = \Omega(\theta)$. Diese Antiradiale hat in kartesischen Koordinaten die Parameterdarstellung

(10) $$x = \int w' \cos\varphi'\, d\varphi', \quad y = \int w' \sin\varphi'\, d\varphi',$$

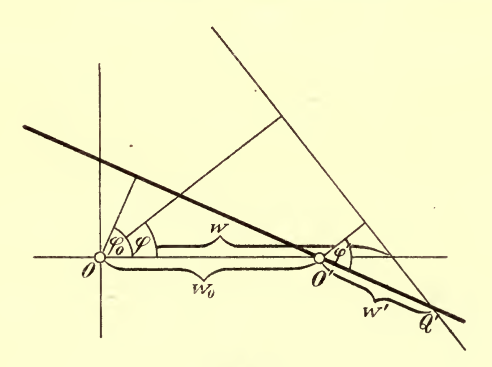


Fig. 185.

und es ist nur nötig, daß diese Integrale algebraische Funktionen von $\sin\varphi'$, $\cos\varphi'$ seien; dann ist die Kurve (10) sicher algebraisch.

Nun ist leicht zu erkennen, daß die geschweifte Klammer auf der rechten Seite von (9*) den Faktor $\cos\varphi'$ enthält; denn setzt man $\varphi' = \frac{1}{2}(2\varkappa + 1)\pi$, so verschwindet die Klammer. Daher ist diese rechte Seite eine ganze rationale Funktion von $\sin\varphi'$ und $\cos\varphi'$. Desgleichen stehen in (10) unter dem Integralzeichen nur Aggregate von Gliedern der Form $A\sin^m\varphi'\cos^n\varphi'$, wo $m + n$ ungerade. Es ist bekannt, daß die Integration jedes solchen

Gliedes eine rational ganze Funktion von $\sin\varphi'$, $\cos\varphi'$ ergibt[214]). Die Integrale in (10) sind also selbst rational ganze Funktionen von $\sin\varphi'$, $\cos\varphi'$, also (10) eine algebraische Kurve. Daraus können wir nun nach Nr. 268 schließen, daß die Kurve (9) algebraisch rektifizierbar ist und alle ihre Tangenten zu Rektifikationsachsen hat.

270. In Plückerschen Linienkoordinaten ist die Gleichung von (9)

$$w(u^2 + v^2)^n = a\,u^{2n+1}\,. \tag{11}$$

Hieraus sieht man gleich, daß die Kurve die unendlich ferne Gerade nur in den Kreispunkten berührt, also ganz im Endlichen liegt. Auch erkennt man die x-Achse ($u = 0$, $w = 0$) als singuläre Tangente. Mit Hilfe der magischen Form der Tangentengleichung

$$\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi = a \cos^{2n+1}\varphi$$

erhält man (durch Differentiation) für den Berührungspunkt

$$\tag{11*} \left\{ \begin{aligned} \xi &= a[(2n+1) - 2n\cos^2\varphi]\cos^{2n}\varphi\,, \\ \eta &= -2an\sin\varphi\cos^{2n+1}\varphi \end{aligned} \right.$$

und hieraus

$$\tag{12} \left\{ \begin{aligned} d\xi &= 2an[1 - 2(n+1)\sin^2\varphi]\cos^{2n-1}\varphi\sin\varphi\,d\varphi\,, \\ d\eta &= -2an[1 - 2(n+1)\sin^2\varphi]\cos^{2n-1}\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,. \end{aligned} \right.$$

Demnach ist die singuläre x-Achse im Anfangspunkt Tangente ($\cos\varphi = 0$). Der Punkt hat nach (11*) für jedes n den Charakter einer Spitze. Des weiteren hat die Kurve noch in den durch $\sin\varphi = \pm 1/\sqrt{2(n+1)}$ bestimmten Punkten einfache Singularitäten, die sich durch genauere Betrachtung als Spitzen ausweisen. Die Kurve kann ja auch gar keine Knoten haben, da nach (9) jedem Winkel φ nur ein Wert von w entspricht. Die beiden Spitzen liegen, wie die ganze Kurve, zur x-Achse symmetrisch. Alle Kurven der betrachteten Familie bestehen also aus drei Bögen, die in Spitzen aneinander schließen. Sie gehören somit zu den sogenannten »dreieckigen Kurven«, auf die Euler stieß, als er das allgemeine Problem zu lösen

---

214) S. z. B. Serret-Scheffers, *Diff.- u. Integr.-R.* 3. Aufl., Leipzig 1907, S. 104/5.

suchte: „Gegeben ein leuchtender Punkt P; gesucht eine Kurve C derart, daß ein von P ausgehender Lichtstrahl nach zweimaliger Reflexion an C zu P zurückkehrt“[215]).

Betrachtet man eine Kurve (9) als Arcuide, so ist die Grundkurve nach unseren früheren Sätzen ebenfalls algebraisch und algebraisch rektifizierbar und zwar für jede der durch (9) bestimmten Lagen. Den einfachsten Fall erhält man natürlich mittels (9) selbst. Für die Grundkurve Ψ ist dann

$$(13) \qquad s = a \cos^{2n}\tau \,.$$

Hieraus ergibt sich

$$(13^*) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2n}{2n+1}\, a \cos^{2n+1}\tau \\ y = 2na \displaystyle\int \cos^{2n-1}\tau \sin^2\tau \, d\tau \,. \end{cases}$$

Zwischen der Abszisse x und dem Bogen s besteht also die Gleichung

$$(13^\dagger) \qquad \frac{s}{a} = \left(\frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{x}{a}\right)^{\frac{2n}{2n+1}} .$$

Solche Kurven, deren Bogen einer Potenz der Abszisse proportional ist, sind schon öfters Gegenstand der Untersuchung gewesen. Wir werden in Nr. 277 auf sie zurückkommen.

271. Setzen wir in (9), (9*), (11) oder (11*) $n = 1$, so erhalten wir eine Steinersche Hypozykloide. Denn die Kurve ist vierter Klasse und hat die unendlich ferne Gerade als isolierte Doppeltangente mit den Kreispunkten als Berührungspunkten; sie hat ferner drei Spitzen, deren Tangenten Winkel von 120^0 miteinander bilden ($\sin\varphi = \pm\frac{1}{2}$). *Die Steinersche Hypozykloide ist sonach die Arcuide einer Kurve mit der Gleichung* $s = a\cos^2\tau$. Da hieraus $\mathcal{R} = -2a\sin\tau\cos\tau$, so lautet die natürliche Gleichung dieser Kurve $\mathcal{R}^2 = 4s(a-s)$, die sofort in die Form $\mathcal{R}^2 + 4\bar{s}^2 =$ konst. gebracht werden kann, *also eine reguläre Astroide darstellt.*

---

215) Siehe P. H. Fuss *„Corr. math. et phys. de quelques célèbres géom. du 18e Siècle“*, St. Petersburg, 1843, I. Bd. S. 314, 341—54; Act. Erud. 1746; Act. Ac. Petrop. 1778, pars posterior, Petersburg 1781. — Die speziellen Kurven (11) hat Euler aber nicht betrachtet.

Wir wissen aus dem obigen, daß, wenn wir jede Tangente der Steinerschen Hypozykloide um ihren Schnittpunkt mit einer festen Tangente um den Winkel χ drehen, eine neue algebraische Kurve entsteht, die ebenfalls algebraisch rektifizierbar ist. Es ist von Interesse zu sehen, was für eine Kurve das ist. Setzen wir in (9*) $n = 1$, so kann man die Gleichung leicht auf die Form bringen

$$w = a[\sin\varphi \sin 2\varphi_0 - \cos\varphi \cos 2\varphi_0] \sin(\varphi + \varphi_0),$$

oder schließlich

(14) $$w = -a[\sin(2\varphi + 3\varphi_0) - \sin\varphi_0].$$

Machen wir hier die Substitutionen $\varphi = \overline{\varphi} - \chi$ und $3\varphi_0 - 2\chi = 3\overline{\varphi}_0$, so wird

(15) $$w = -a[\sin(2\overline{\varphi} + 3\overline{\varphi}_0) - \sin\overline{\varphi}_0] + c.$$

Die Konstante $c = a(\sin\varphi_0 - \sin\overline{\varphi}_0)$ bedeutet nur eine Verschiebung des Anfangspunktes für die Zählung von w; also stellt Gleichung (15) dieselbe Steinersche Hypozykloide dar wie (14), und wir haben den Satz von LAGUERRE[216]: *Dreht man jede Tangente einer Steinerschen Hypozykloide um ihren Schnittpunkt mit einer beliebigen festen Tangente* T *um denselben Winkel, so entsteht eine der ursprünglichen kongruente Steinersche Hypozykloide, die auch* T *zur Tangente hat.*

272. Wir wollen noch der Arcuide der logarithmischen Spirale $\varrho = c\,e^{\varkappa\theta}$ $(\varkappa = \operatorname{ctg}\mu)$ für kurze Zeit unsere Aufmerksamkeit schenken. Wir können diese Kurve auch aus der Radiale der Spirale, die mit dieser kongruent ist, also auf dieselbe Polargleichung gebracht werden kann, ableiten. Die Gleichung der fraglichen Kurve ist also in axialen Linienkoordinaten

(16) $$w = c\,e^{\varkappa\varphi}.$$

In Fig. 187 ist die Kurve gezeichnet, indem $OA = w = \varrho$, $\sphericalangle BAQ = \varphi + \frac{1}{2}\pi = \theta$ gemacht wurde. Eine Rotation der logarithmischen Spirale um 90^0 würde die in (16) angewendete Substitution $\varphi = \theta$ veranschaulichen. Da es auch von allgemeinerem Interesse ist, wollen wir hier an-

[216]) S. die Abhdlg. *„Sur quelques propr. de l'Hypocycloïde à trois points de rebr.“*, Bull. soc. math. France, 1879 (*Oeuvres* II, S. 580).

geben, wie aus (16) direkt die natürliche Gleichung abgeleitet werden kann. Dazu müssen wir erst die Länge $QP = t$ der Tangente (s. Fig. 186) ausdrücken. Es ist $(t + dt) : dw = \cos\varphi : d\varphi$, also

$$t = \frac{dw}{d\varphi} \cos\varphi \,. \tag{17}$$

Ferner hat man

$$(t - ds) : (t + dt) = (\cos\varphi - \sin\varphi\, d\varphi) : \cos\varphi$$

und hieraus

$$ds = -dt + dw \sin\varphi \,. \tag{18}$$

Wendet man dieses Verfahren auf (16) an, so ergibt sich

$$\left\{ \begin{aligned} ds &= \varkappa w (2 \sin\varphi - \varkappa \cos\varphi)\, d\varphi \,, \quad \text{oder} \\ \mathcal{R} &= \varkappa w (2 \sin\varphi - \varkappa \cos\varphi) \,. \end{aligned} \right. \tag{19}$$

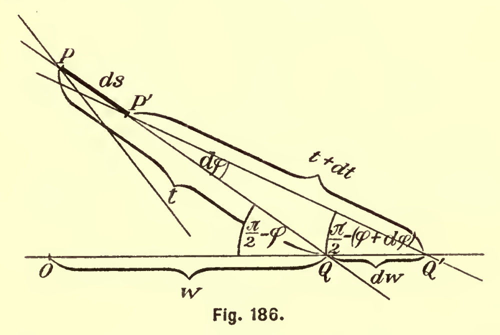


Fig. 186.

Hieraus wäre ohne Schwierigkeit auch die natürliche Gleichung in $\mathcal{R}$, s abzuleiten. Es genügt aber das Vorhandene zur Diskussion.

Wir bemerken zuerst, daß die Kurve bei $w = 0$ in O für $\varphi = -\infty$ beginnt und sich bis ins Unendliche erstreckt für $\varphi = +\infty$. Für zwei Punkte P, P_1, deren Winkel φ, φ_1 sich um π unterscheiden, erscheinen sowohl w, als auch t mit $e^{\varkappa\pi}$ multipliziert, letzteres allerdings negativ; aber man sieht, daß für $\frac{1}{2}(4\lambda + 3)\pi > \varphi > \frac{1}{2}(4\lambda + 1)\pi$ die Richtung der Tangente von Q aus nach abwärts zeigt, t aber zwischen denselben Grenzen negativ ist. Also befindet sich die ganze Kurve oberhalb der Achse. Die Punkte P, P_1 liegen also in einer Geraden mit O und die Kurve be-

steht aus unendlich vielen zueinander ähnlichen, in bezug auf O ähnlich gelegenen Bogen. Da t für endliches φ immer endlich ist, ist die ganze Kurve zwischen zwei von O ausgehenden Halbgeraden Ξ und Σ enthalten. An die Achse Ξ treten die Bogen berührend heran, an die Gerade Σ mit Spitzen. Nennen wir ψ den Winkel (Ξ, Σ), so findet man aus (19) wegen $\mathcal{R} = 0$ $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}\varkappa$. Im Zusammenhalt mit (17) ergibt sich also die einer Spitze entsprechende Tangentenlänge $QS = t_s = 2\,w_s \sin\frac{1}{2}\psi$, d. h. es ist $OS = OQ$ (Fig. 187). Die Bogen, aus denen die Kurve besteht, reduzieren sich schließlich, immer kleiner werdend, auf den Punkt O, wo in der Tat $\mathcal{R} = 0$ wird.

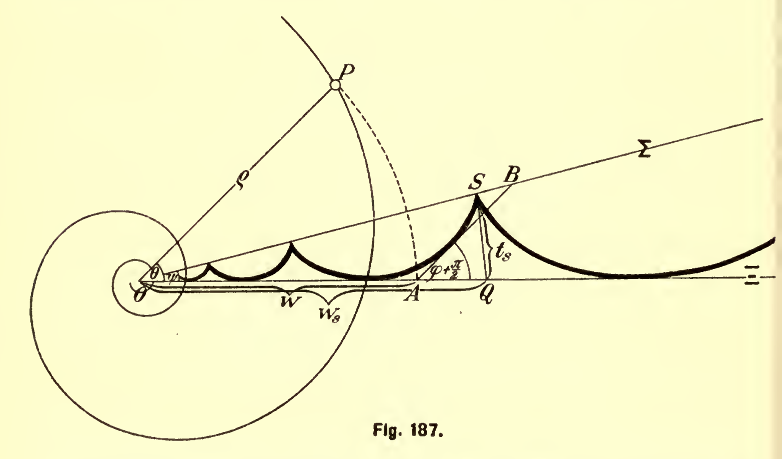


Fig. 187.

273. Diese Arcuide der logarithmischen Spirale ist nun deshalb sehr interessant, weil sie eine unmittelbare Verallgemeinerung der gemeinen Zykloide ist[217]). In der Tat sahen wir schon, daß die letztere die Arcuide eines Kreises darstellt, der ja aus der logarithmischen Spirale $\varrho = c\,e^{\varphi \operatorname{ctg}\mu}$ für $\mu = \frac{1}{2}\pi$ $(\varkappa = 0)$ hervorgeht. Um aus (16) direkt die Zykloide abzuleiten, beachte man, daß

$$\frac{dw}{d\varphi} = w \cdot \operatorname{ctg}\mu \tag{20}$$

---

[217]) Von diesem Standpunkte aus wurde sie von E. Köstlin zuerst aufgestellt. S. Mitt. math. V. Württ. (2) **9**, 1907, 21—30 und eine zweite, erst angekündigte Abhandlung desselben Verfassers.

und lasse nun O ins Unendliche rücken, gleichzeitig aber $\mu = \frac{1}{2}\pi$ werden, so daß $\lim w \cdot \operatorname{ctg} \mu = a$ wird. Dann ergibt sich durch Integration die uns schon bekannte Gleichung $w = a(\varphi - \varphi_0)$ der Zykloide. Die Form dieser Gleichung sagt aus: *Dreht man jede Tangente der Zykloide um ihren Schnittpunkt mit der Scheitelgeraden, so tritt nur eine Verschiebung der Zykloide längs dieser Geraden ein.* Ersetzen wir w und φ durch ϱ und θ, so sehen wir, daß die Zykloide sich aus der archimedischen Spirale ableiten läßt wie die »Logarithmoide« — so wollen wir jetzt die neue Kurve nennen —, aus der logarithmischen Spirale. Die Verschiebbarkeit der Zykloide, die übrigens aus der Chaslesschen Erzeugung auch ohne weiteres einleuchtet, entspricht der Eigenschaft der archimedischen Spirale, mit jeder Konchoide kongruent zu sein. Ersetzen wir in (16) φ durch $\varphi - \varphi_0$, drehen also jede Tangente der Logarithmoide um ihren Schnittpunkt mit der Achse Ξ um den Winkel φ_0, so entsteht die Kurve $w = c' e^{\varkappa \varphi}$ $(c' = c\, e^{-\varkappa \varphi_0})$, die zur ursprünglichen in bezug auf O homothetisch ist. Diese Eigenschaft ist derjenigen der logarithmischen Spirale analog, daß für diese jede Ähnlichkeitstransformation vom Pol aus mit einer bloßen Drehung identisch ist.

274. Aber die Analogie der Logarithmoide und Zykloide ist noch viel weitergehend. Betrachten wir die Länge von t

(21) $t = w \operatorname{ctg} \mu \cdot \cos \varphi$,

so sehen wir sofort die Richtigkeit folgender Konstruktion des Berührungspunktes P einer Tangente T ein (Fig. 188): Man errichte im Schnittpunkte Q von T mit Ξ das Lot auf Ξ und schneide dieses mit der Geraden H, die durch O geht und mit Ξ den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \mu$ einschließt, in dem Punkte Q_1. Das Lot $Q_1 P$ auf T gibt den Berührungspunkt P. Wir können auch sagen, P liege auf dem Kreise mit dem Durchmesser $QQ_1 = w \operatorname{ctg} \mu$. Die Einhüllende aller entsprechenden Kreise ist die Gerade Σ. Denn fällt

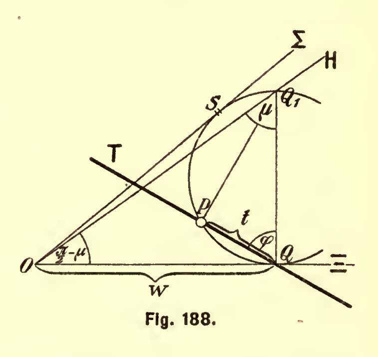


Fig. 188.

P mit dem Berührungspunkt S der zweiten von O an den Kreis gezogenen Tangente zusammen, so ist $OS = OQ$, was wir für die Spitzen charakteristisch fanden. Es ergibt sich auch direkt $\sphericalangle SOQ = \psi$.

Nun denken wir uns eine logarithmische Spirale S auf H rollend. Ihr momentaner Berührungspunkt sei Q_1, ihr Pol liege in Q. Dann ist bekanntlich OQ_1 gleich der Länge des Bogens von Q_1 bis zum Pol. Die Bewegung begann also in O und der Pol beschrieb die Gerade Ξ. Ist T eine durch den Pol von S gehende, in der Ebene von S feste Gerade, so ist der vorhin konstruierte Punkt P der momentane Berührungspunkt mit ihrer Enveloppe. Wir können demnach sagen: *Rollt eine logarithmische Spirale auf einer Geraden, so hüllt jede durch ihren Pol gehende Gerade eine Logarithmoide ein.* Für $\mu = \frac{1}{2}\pi$ wird $\psi = 0$, H und Σ fallen zusammen und werden parallel Ξ; die vorige Erzeugung geht in die Chaslessche der Zykloide über.

Wir sehen weiter aus (20), wenn wir w und φ als Funktionen der Zeit (ς) auffassen, daß $\frac{dw}{d\varsigma} : \frac{d\varphi}{d\varsigma} = \varkappa w$. Daher können wir die Erzeugung auch folgendermaßen aussprechen: *Bewegt sich ein Punkt Q auf einer Geraden Ξ mit der Geschwindigkeit σ_w und dreht sich dabei eine Gerade T um Q mit der Winkelgeschwindigkeit σ_φ, so umhüllt T eine Logarithmoide, wenn in jedem Augenblick der Quotient σ_w/σ_φ proportional dem Wege w von Q ist.* Auch diese Erzeugung geht in der Grenze in die Chaslessche über.

Zusatz. Indem man (20) anders deutet, läßt sich auch eine der gewöhnlichen Punkterzeugung der Zykloide analoge Erzeugung der Logarithmoide angeben. Ferner möchten wir noch darauf hinweisen, daß, wie die Zykloide eine Parallelprojektion der Loxodrome des Kreiszylinders (Schraubenlinie) ist, die Logarithmoide eine Parallelprojektion der Loxodrome des Kreiskegels (vgl. Nr. 179, Zus.) darstellt, müssen aber bezüglich genauerer Ausführungen zu beiden Angaben auf die Originalabhandlung verweisen.

275. Als letztes Beispiel in der Richtung der zur Diskussion stehenden Untersuchungen mögen die Katakaustiken der binomischen Kurven $y = \varkappa x^n$ für parallel zur y-Achse einfallende Lichtstrahlen behandelt werden. Fallen die Strahlen parallel zur x-Achse ein, so muß nur der Exponent reziprok genommen werden. Bedeutet τ,

wie immer, den Tangentenwinkel, der zum Inzidenzpunkte M (x, y) gehört, so ist die Gleichung des reflektierten Strahles in den laufenden Koordinaten ξ, η

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = -\operatorname{ctg} 2\tau\,, \tag{22}$$

da dieser mit der x-Achse den Winkel $(2\tau - \frac{1}{2}\pi)$ einschließt (s. Fig. 189). Nun ist $\operatorname{tg}\tau = \varkappa n x^{n-1}$, also

$$\operatorname{tg} 2\tau = 2\varkappa n x^{n-1}/(1 - \varkappa^2 n^2 x^{2n-2})\,.$$

Die Gleichung des Strahles (22) kann folglich geschrieben werden

$$2\varkappa n x^{n-1}(\eta - \varkappa x^n) = (\xi - x)(\varkappa^2 n^2 x^{2n-2} - 1)\,. \tag{22*}$$

Diese Gleichung wäre nach x zu differentiieren und dann x zwischen beiden Gleichungen zu eliminieren, was jedenfalls zu einer längeren, unübersichtlichen Rechnung Anlaß gäbe. Man hilft sich hier, indem man die Länge l von M bis zum Berührungspunkt C_1 des reflektierten Strahles mit der Enveloppe bestimmt. Hierfür gibt es einen allgemeinen, schon von Tschirnhausen in seinem Briefwechsel mit Leibniz angewendeten Satz (seit 1681). Erinnern wir uns an die Konstruktion des Punktes C_1 für einen im Endlichen liegenden Lichtpunkt P (Fig. 88, S. 192) und lassen dort P auf MP ins Unendliche rücken, so wird $FC_1 \parallel PM$, demnach, da $GM = \mathcal{R}\cos\tau$, $FM = \mathcal{R}\cos^2\tau$, $MC_1 (= FC_1) = \frac{1}{2}\mathcal{R}\cos\tau$. Wir haben also

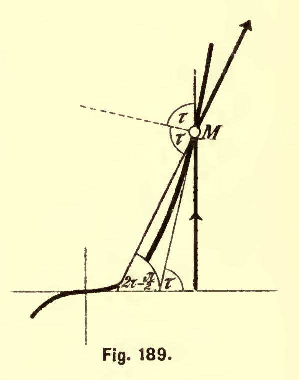


Fig. 189.

$$l = \tfrac{1}{2}\mathcal{R}\cos\tau\,. \tag{23}$$

Wenden wir dies in unserem Falle an, so erhält man zunächst

$$\begin{cases} x - \xi = \frac{1}{2}\mathcal{R}\cos\tau\sin 2\tau \\ y - \eta = \frac{1}{2}\mathcal{R}\cos\tau\cos 2\tau \end{cases} \tag{24}$$

und wenn man $\mathcal{R} = (1 + \varkappa^2 n^2 x^{2n-2})^{\frac{3}{2}}/\varkappa n(n-1)x^{n-2}$ setzt und die Funktionen von τ durch $\operatorname{tg}\tau$ ausdrückt, schließlich

$$\xi = \frac{n-2}{n-1}x\,, \qquad \eta = \frac{\varkappa^2 n(n-2)x^{2n-2} + 1}{2\varkappa n(n-1)x^{n-2}}\,. \tag{24*}$$

Die Gleichung der gesuchten Enveloppe kann man alsdann in der Form schreiben

$$(24^\dagger) \qquad \eta = \tfrac{1}{2}\left[A\,\xi^n + \frac{\xi^{2-n}}{A\,n(n-2)}\right],$$

wo $A = \varkappa(n-1)^{n-1}/(n-2)^{n-1}$ gesetzt ist. Für rationales n ist also auch die Katakaustik algebraisch. Zu jeder Katakaustik von der Form $(24^\dagger)$ gehören aber offenbar zwei binomische Kurven als reflektierende Kurven mit den Gleichungen $y = \varkappa x^n$ und $y = \varkappa' x^{2-n}$. Man erhält eine Relation zwischen $\varkappa$ und $\varkappa'$, wenn man den Koeffizienten $A = \varkappa(n-1)^{n-1}/(n-2)^{n-1}$ gleich dem in $\varkappa'$ geschriebenen Koeffizienten von ξ^{n-2} setzt, wo zu gleicher Zeit n durch $2-n$ zu ersetzen ist. So ergibt sich

$$(25) \qquad \varkappa\varkappa' = \frac{(n-2)^{n-2}}{n^n}.$$

Beisp. Suchen wir die Katakaustiken für die Parabel $y = \varkappa x^{\frac{1}{2}}$ und die Neilsche Parabel $y = \varkappa' x^{\frac{3}{2}}$, deren Exponenten sich zu 2 ergänzen, so erhalten wir die beiden Kurven

$$\eta = \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{6\varkappa\sqrt{3}}(9\varkappa^2 - 4\xi) \quad \text{und} \quad \eta = \frac{i\,\xi^{\frac{1}{2}}}{6\varkappa'}(4 + 3\varkappa'^2\xi).$$

Die Bedingung (25) aber ergibt $\varkappa\varkappa' = 4i/3\sqrt{3}$. Benutzen wir diese, so ergibt sich die völlige Identität der beiden Katakaustiken. Führt man die Gerade $4\xi - 9\varkappa^2 = 0$ als neue y-Achse ein, so erhalten die Gleichungen die Form

$$4\xi'^3 + 9\varkappa^2(\xi'^2 - 3\eta^2) = 0$$

und *wir erkennen die Tschirnhausensche Kubik* (Nr. 34) *als Katakaustik der gewöhnlichen und der Neilschen Parabel.*

276. Wir bestimmen nun die Bogenlänge der Katakaustik $(24^\dagger)$. Man erhält

$$ds = \tfrac{1}{2}\left(A\,n\,\xi^{n-1} + \frac{1}{A\,n}\xi^{1-n}\right)d\xi,$$

also

$$(26) \qquad s - s_0 = \frac{1}{2A\,n(n-2)}\left(A^2 n(n-2)\,\xi^n - \xi^{2-n}\right).$$

Hieraus folgt, für nicht ganzzahliges n bei Hinzunahme von (6): *Jede Katakaustik einer binomischen Kurve für Strahlen parallel zu einer Achse ist rational rektifizierbar, d. h. eine Richtungskurve.* Für die Kurve des vorhin gegebenen Beispiels, die Tschirnhausensche Kubik, wurde diese Eigenschaft schon in Nr. 95 festgestellt.

Ferner denken wir jetzt von der Katakaustik ($24^\dagger$) die Arcuide gebildet und bestimmen deren Bogenlänge nach der Formel (6*): $s_b - s_0' = 2\eta - \bar{\eta}$. Für $\bar{\eta}$ ist die Formel in Nr. 266 angegeben. Es ist demnach

$$s_b - s_0' = 2\eta - \bar{\eta} = \eta - \frac{1 + \eta'^2}{\eta''}.$$

Nicht ohne Mühe errechnet man hieraus den Ausdruck

$$(27) \qquad s_b - s_0' = \frac{-A^2 n(n-2)\xi^n + \xi^{2-n}}{2An(n-1)(n-2)},$$

aus dem man im Vergleich mit (26) sofort sieht, daß

$$(28) \qquad s_b - s_0' = \frac{1}{1-n}(s - s_0).$$

Der Bogen der Arcuide unserer Katakaustik ist also dem entsprechenden Bogen der Katakaustik selbst proportional. Außerdem ist jede Tangente gegen die entsprechende Tangente der Katakaustik um $\frac{1}{2}\pi$ gedreht. *Daher ist die Katakaustik zu ihrer Arcuide ähnlich.* Nach unseren obigen Sätzen hat die Arcuide die x-Achse zur Rektifikationsachse, die Katakaustik selbst also die y-Achse. Dies ist bei der Tschirnhausenschen Kubik die Scheiteltangente der Kurve. Da ferner für die Arcuide $w = s - s_0 = (1-n)(s_b - s_0')$ ist, so hat die Katakaustik dieselbe Eigenschaft in bezug auf die y-Achse und wir können sagen: *Die Tangenten der in Rede stehenden Katakaustiken schneiden auf ihrer Rektifikationsachse vom Anfangspunkt aus gerechnet Stücke ab, die den von einem beliebigen Punkt an gemessenen Kurvenbogen proportional sind.* Wächst w um w', s_b um s_b', so ist $w' = (1-n)s_b'$. Der Zuwachs von w ist also wirklich dem Zuwachs des Bogens proportional. Dies führt uns auf einen neuen Begriff, über den wir einige Worte sagen müssen.

Denken wir uns auf der y-Achse einen Herrn mit einer gewissen Geschwindigkeit spazieren gehend, dem sein Hund, der aber eine $(1-n)^{-1}$-mal so große Geschwindigkeit hat, zuläuft, so daß er ihn immer im Auge behält, so beschreibt der Hund gerade eine Kurve wie die Katakaustik ($24^\dagger$), die nur je nach dem Ausgangspunkt von

Herr und Hund eventuell in der Richtung der y-Achse zu verschieben ist. Nur bei gleicher Geschwindigkeit ($n=0$) versagt die Gleichung. Die direkte Inangriffnahme des Problems ergibt dann eine uns nicht weiter interessierende transzendente Kurve.

Die Kurven (24†) heißen daher auch »Verfolgungskurven der Geraden«. Auch der aus dem angezogenen Beispiel hervorgegangene Name »Hundskurve« ist in Gebrauch[218]). Die Tschirnhausensche Kubik tritt auf, wenn der Hund mit doppelt so großer Geschwindigkeit auf den Herrn zu oder von ihm weg läuft ($n=\frac{1}{2}$ oder $n=\frac{3}{2}$). Geht der Herr in einer anderen Kurve, so beschreibt der Hund eine allgemeinere Verfolgungskurve. Jedoch ist die Integration der aus dem Problem entspringenden Differentialgleichung zweiter Ordnung nur im Falle der Geraden vollständig durchführbar.

277. Zum Schlusse dieses Paragraphen wollen wir noch kurz die Transformation besprechen, durch welche man aus den binomischen Kurven $y = a^{1-n} x^n$ die schon in Nr. 270 berührte Kurvenfamilie mit der Gleichung

(29) $$s = a^{1-n} x^n$$

erhält. Es besteht diese einfach darin, daß man in der kartesischen Gleichung

(30) $$y = f(x)$$

einer Kurve die Ordinate y durch die Bogenlänge s ersetzt. Die Koordinaten s, x nennt man »Bogenkoordinaten«[219]). Es ist ein sog. »halbnatürliches« Koordinatensystem. Der Übergang zur natürlichen Gleichung in $\mathcal{R}$, s ist nicht schwer. Da

(31) $$s = f(x),$$

---

218) Nach S. Günther (*Studien z. Gesch. d. math. u. phys. Geographie*, Halle 1878) soll schon Lionardo da Vinci sich mit dem Problem beschäftigt haben. Die erste eigentliche Lösung ist von Bouguer (Mém. Ac. Paris 1732).

219) Die Koordinaten wurden schon von Euler (Comm. Ac. Petr. **6**, 1738, 28—36) angewendet. S. bei E. Wölffing[113]). Die Kurvenfamilie (29) behandelten insbesondere C. R. Fleischer, Progr. Grimma 1840; M. Cantor, Diss. Frankfurt a. M. 1851, und Rich. Müller, Progr. Berlin 1889. Man sehe auch B. Tortolini, Journ. f. Math. **26**, 1843, 288—310.

so hat man $ds^2 = f'^2(x)\,dx^2 = dx^2 + dy^2$, also durch nochmalige Differentiation nach x

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ds}{dx}\cdot\frac{d^2s}{dx^2} = f'(x)\cdot f''(x)\,,$$

während $dy/dx = \sqrt{f'^2(x)-1}$ ist. So ergibt sich aus der Formel $\mathcal{R} = \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 \Big/ \frac{d^2y}{dx^2}$ hier

$$\mathcal{R} = \frac{f'^2(x)\sqrt{f'^2(x)-1}}{f''(x)}\,. \tag{32}$$

Die Elimination von x aus (31) und (32) führt zur natürlichen Gleichung.

278. Wendet man die Formel (32) auf Gleichung (29) an, so ergibt sich ohne Mühe

$$\mathcal{R} = \frac{n}{n-1}\,s\sqrt{n^2\left(\frac{s}{a}\right)^{\frac{2(n-1)}{n}} - 1} \tag{33}$$

als natürliche Gleichung der Kurven, deren Bogen einer Potenz der Abszisse proportional ist. E. Cesàro fand nun[220], daß diese Kurven die Evoluten der Ribaucourschen Kurven seien. Für diese hat man in der Tat [Nr. 214 (56*)]

$$ds = \frac{\nu+1}{\nu-1}\,\frac{d\mathcal{R}}{\sqrt{\left(\frac{\mathcal{R}}{b}\right)^{2\frac{\nu+1}{\nu-1}} - 1}}\,.$$

Setzt man hier (vgl. Nr. 81) $ds = \mathcal{R}\,d\mathcal{R}/\overline{\mathcal{R}}$ und $\mathcal{R} = \bar{s}$, wo $\overline{\mathcal{R}}$, $\bar{s}$ die Elemente der Evolute seien, so erhält man sofort

$$\overline{\mathcal{R}} = \frac{\nu-1}{\nu+1}\,\bar{s}\sqrt{\left(\frac{\bar{s}}{b}\right)^{2\frac{\nu+1}{\nu-1}} - 1} \tag{34}$$

als Gleichung der Evolute einer Ribaucourschen Kurve. Diese ist aber mit (33) identisch, wenn man nur dort n^2 in die Konstante a einbezieht und $n = \frac{1}{2}(1-\nu)$ setzt. So erhalten wir folgende bekannte Kurven als Repräsentanten der Kurvenfamilie (29):

---

[220]) Nouv. Ann. math. (3) **13**, 1894.

$\nu = 0$; $n = \frac{1}{2}$; gemeine Zykloide,

$\nu = -2$; $n = \frac{3}{2}$; Neilsche Parabel,

$\nu = -3$; $n = 2$; Evolute der Kettenlinie,

$\nu = -\frac{1}{3}$; $n = \frac{2}{3}$; reguläre Astroide.

279. Wir können auch noch den Grenzfall $n = 0$ ins Auge fassen. Damit aber dann die Gleichung (29) einen Sinn behalte, subtrahieren wir rechts a, d. h. wir zählen die Bogen von einem anderen Punkte aus und multiplizieren links mit n, d. h. wir ersetzen a durch a/n. Dann wird

(35) $$s = a \cdot \lim_{n=0} \frac{(x/a)^n - 1}{n} = a \log \frac{x}{a}.$$

Vermittels (32) erhält man

(36) $$\mathcal{R} = -\frac{a}{x}\sqrt{a^2 - x^2}$$

und dann die natürliche Gleichung

(37) $$\mathcal{R} = -a\sqrt{e^{-2s/a} - 1}.$$

Im Grenzfalle $n = 0$ stellt also (29) eine Traktrix dar.

Wir erwähnen ferner noch, daß der Gleichung, die derjenigen der gleichseitigen Hyperbel analog ist

(38) $$x^2 - s^2 = a^2$$

eine gewöhnliche Kettenlinie entspricht. Denn es ergibt sich $\mathcal{R} = -x^2/a$, also $\mathcal{R} = \hat{a} + s^2/\hat{a}$ $(\hat{a} = -a)$. Bezüglich weiterer Eigenschaften der Evoluten der Ribaucourschen Kurven verweisen wir auf LORIA S. 604/6 und die dort angezogenen Arbeiten[221]).

§ 32. Einteilung der transzendenten Kurven.

280. Wir haben in diesem Buche, das sich wesentlich mit metrischen Eigenschaften spezieller Kurven beschäftigte, die übliche Trennung in algebraische und transzendente Kurven nicht durchgeführt. In der Tat sahen wir auch, daß viele Familien je nach der Wahl des In-

[221]) HÂTON DE LA GOUPILLIÈRE, Journ. Éc. polyt. Cah. **43**, 1870. — O. WERTH, Progr. Celle 1874.

dex algebraische oder transzendente Individuen lieferten. Andererseits ist uns nicht unbekannt, daß die algebraischen Kurven ein geschlossenes System bilden, dessen Eigenschaften durch die Eigenschaften der algebraischen Formen, durch das Verhalten gegenüber projektiven und höheren Transformationen bedingt werden. Eine ähnliche Theorie existiert für transzendente Kurven bis heute nicht. Ja es gibt für diese letzteren, trotz ihrer vielfachen Beziehungen untereinander, noch gar kein Einteilungsprinzip. Allerdings wurde in dieser Richtung schon ein nicht unbedeutender Schritt getan durch G. Loria. Dieser faßte alle transzendenten Kurven, die einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung μ^{ten} Grades

$$(1) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \equiv \sum_0^{\mu} f_i(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^i = 0$$

genügen, in eine Klasse zusammen, die er »panalgebraische Kurven« nennt[222]). Der Name ist sofort daraus verständlich, daß natürlich alle algebraischen Kurven selbst einer Differentialgleichung von der Form (1) genügen, also eine Unterabteilung der panalgebraischen Kurven bilden. Ob nun eine gegebene Kurve eine solche Gleichung befriedigt, erkennt man ohne weiteres an dem Ausdruck für dy/dx.

Die Differentialgleichung (1) stellt aber dann nicht bloß die eine, sondern ein ganzes System von Kurven dar. Setzt man statt x, y die Koordinaten eines festen Punktes (x_0, y_0) ein, so resultiert eine Gleichung μ^{ten} Grades in dy/dx. D. h. durch jeden Punkt der Ebene gehen μ Kurven des Systems. Die dualistische Zahl ν, die angibt, von wieviel Kurven des Systems eine Gerade berührt wird, erhält man durch den Grad der Gleichung, die entsteht, wenn man $y = \varkappa x + a$, $dy/dx = \varkappa$ setzt. Die Zahl ν ist dann die höchste vorkommende Ordnungszahl eines der Ausdrücke $f_i(x, y)$[223]).

281. Ziehen wir nun von einem Punkte $P(x_0, y_0)$ an alle Kurven des Systems die Tangenten, so werden deren

[222]) Ber. böhm. Ges. Prag 1901 = Le mat. pur appl. **2**, 1902.

[223]) Solche Systeme untersuchte näher Fouret, Bull. Soc. math. France **2**, 1874, 72–83, 96—100. — Vgl. auch Clebsch-Lindemann. *Vorlesungen über Geom.* I, Leipzig 1876, 962—978.

Berührungspunkte einen Ort erfüllen, der immer eine algebraische Kurve ist, die in P einen μ-fachen Punkt hat. Die Ordnung der Kurve ist leicht festzustellen. Denn legen wir durch P eine beliebige Gerade L, die nicht mit einer der μ Tangenten in P zusammenfällt, so wird diese noch von ν Kurven des Systems berührt, und es liegen also auf L $\mu + \nu$ Schnittpunkte des gesuchten Ortes. Dieser ist also eine Kurve $(\mu + \nu)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dualistisch umhüllen die Tangenten in allen Punkten, wo eine Gerade G die Kurven des Systems schneidet, eine Kurve $(\mu + \nu)^{\text{ter}}$ Klasse mit G als ν-facher Tangente. Ist nun die Grundkurve transzendent, so hat diese selbst schon unendlich viele Tangenten durch P und unendlich viele Punkte auf G, wenn auch oft nur wenige oder auch gar keines dieser Elemente reell sind. Es genügt also, den Ort der Berührungspunkte von P an die Kurve zu kennen, um beide »Charakteristiken« μ und ν angeben zu können. Z. B. fanden wir bei den Zykloidalen als Berührungspunktkurve die Fußpunktskurve eines Kegelschnittes mit dem Doppelpunkt in P (Nr. 150). Es ist also $\mu + \nu = 4$ und $\mu = 2$, also $\nu = 2$. Jede eigentliche Zykloidale ist also panalgebraisch mit den Charakteristiken (2,2). Die gemeine Zykloide hat die Charakteristiken $\mu = 2$, $\nu = 1$, da ihre Berührungspunktkurve eine Kubik mit Doppelpunkt in P ist. Ihr »Tangentenort«, wie wir das dualistische Gebilde nennen wollen, ist also eine Kurve 3. Klasse mit G als Tangente. Es ist nicht ohne Interesse, diesen Ort direkt aufzustellen.

Nach Nr. 273 ist die Differentialgleichung der Zykloide in axialen Linienkoordinaten $dw/d\varphi = a$, oder, da $\varphi = \operatorname{arc\,tg} v$, also $d\varphi = dv/(1 + v^2)$

$$\frac{dw}{dv} = \frac{a}{1 + v^2}. \tag{2}$$

Nun ist die Gleichung des Berührungspunktes einer Tangente (w, v) der Kurve in $\bar{w}$, $\bar{v}$ als laufenden Koordinaten

$$\frac{\bar{w} - w}{\bar{v} - v} = \frac{dw}{dv} = \frac{a}{1 + v^2}. \tag{3}$$

Soll dieser Berührungspunkt auf G (w_0, v_0) liegen, so muß (3) für $\bar{w} = w_0$, $\bar{v} = v_0$ erfüllt sein. Die w, v sämt-

licher Tangenten der Zykloide, die diese und alle Kurven des durch (2) gegebenen Systems in den Punkten von G berühren, erfüllen also die Gleichung

$$(4)\qquad (u - u_0)(u^2 + v^2) = a\,u^2(u\,v_0 - v\,u_0)\,.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Enveloppe, wo nur mit u homogenisiert und $w = 1$ gesetzt wurde. Die durch (4) dargestellte Kurve 3. Klasse berührt die unendlich ferne Gerade doppelt in den Kreispunkten, und wir können daher sagen: *Die Tangenten einer Zykloide in allen Punkten, wo sie von einer Geraden* G *geschnitten wird, berühren eine Steinersche Hypozykloide*[211]).

282. Wir erinnern uns ferner für Berührungspunktkurve und Tangentenort bei den W-Kurven je einen Kegelschnitt durch P oder mit G als Tangente gefunden zu haben (Nr. 248). Die W-Kurven sind also die einfachsten Kurven von diesem Gesichtspunkte aus; sie haben die Charakteristiken (1,1). Außerdem geben wir unten noch das Beispiel der Traktrix, da auch hier bemerkenswerte Kurven sich ergeben. G. Loria hat in seinem Buche bei jeder panalgebraischen Kurve die Charakteristiken angegeben, die auf die oben angedeutete Weise meist leicht zu bestimmen sind. Es genügt daher für uns zu wissen, welche von uns behandelten Kurven nicht panalgebraisch sind. Es sind das nur die Klothoide, die Kettenlinie gleichen Widerstandes und die allgemeinen Cesàroschen Kurven.

Zusatz. Von den vielen Sätzen, die G. Loria über die panalgebraischen Kurven in Analogie mit Sätzen über algebraische Kurven aufgestellt hat, sei wenigstens einer noch erwähnt, da wir für ihn eine direkte Bestätigung haben. Man weiß aus der Theorie der Differentialgleichungen[224]), daß die Elimination von y' aus den beiden Gleichungen

$$f(x\,,\,y\,,\,y') = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y'} f(x\,,\,y\,,\,y') = 0$$

die Gleichung des Ortes der Spitzen der Integralkurven von (1) ergibt. Diese Elimination ergibt nun für algebraische und panalgebraische Kurven eine algebraische Gleichung. Daher liegen auch die Spitzen jeder einzelnen panalgebraischen Kurve auf einer algebraischen Kurve. Zur Bestätigung dürfen wir nur an die Zykloidalen erinnern, deren Spitzen auf einem Kreise (ev. einer Geraden) liegen.

[224]) Darboux, Bull. math. **4**, 1873.

Beisp. 1. Bei einer gewöhnlichen Traktrix besteht das zu derselben Differentialgleichung gehörige System aus allen durch Verschiebung längs der Asymptote A und Umklappung um diese hervorgehenden Kurven. Legen wir nun an dieses System von einem Punkte P aus die Tangenten, so ist klar, daß auf jeder Tangente von ihrem Schnittpunkt mit A bis zum Berührungspunkt die konstante Strecke a abgeschnitten wird. *Die Berührungspunktkurve der Traktrix ist also eine Konchoide des Nikomedes.* Ist ferner G eine beliebige Gerade, Q irgendein Punkt auf ihr, so sind die Tangenten der durch Q gehenden Traktrizen des Systems durch die beiden Punkte U, U' auf A bestimmt, die von Q die Entfernung a haben. Wandert Q auf G, so umhüllt QU bzw. QU' eine (schiefe) Astroide mit G und A als Leitlinien. *Der Tangentenort einer Traktrix ist daher eine (schiefe) Astroide.* Steht G $\perp$ A, so wird die Astroide regulär. Diese einfachen Ergebnisse möge der Leser selbst analytisch nachprüfen.

Beisp. 2. Die Berührungspunktkurve der gewöhnlichen Kreisevolvente für einen Punkt P ist eine Pascalsche Schnecke mit P als Doppelpunkt; wenn P auf dem Grundkreise K liegt, eine Kardioide (Nr. 150). Zur Kreisevolvente ist in bezug auf den Basiskreis polarreziprok die hyperbolische Spirale (Nr. 183). Daher ist der Tangentenort einer Geraden G für die hyperbolische Spirale die zur Pascalschen Schnecke dualistische Kurve. *Das ist, wenn* G *den Basiskreis* K *berührt,* die Polarreziproke der Kardioide, *eine Maclaurinsche Trisektrix* (Nr. 99, Zus.).

Hieran mag noch eine sehr einfache Klassenerzeugung der letzteren Kurve geschlossen werden (E. Köstlin): *Berührt eine Gerade* G *einen Kreis* K *vom Mittelpunkte O und ist Q ein auf* G *beweglicher Punkt, AB der zu OQ senkrechte Durchmesser, so hüllen QA und QB eine Maclaurinsche Trisektrix ein.* Denn ist B der Berührungspunkt von G und K, und F der Fußpunkt des von B auf die Tangente in A gefällten Lotes, so ist Q der Pol von BF und folglich AQ die Polare von F in bezug auf K. F beschreibt aber die Kardioide.

BERICHTIGUNGEN UND ZUSÄTZE.

Zu S. 12, Z. 1 v. o. — Lies statt „O“ „den Mittelpunkt“. Entsprechend i. d. Fußnote [8]): „Statt des Mittelpunktes tritt i. allg. d. sog. K. ein.“

Zu S. 10, Z. 6—8 v. o. — Hier ist natürlich vorausgesetzt, daß in der Gleichung $F(x, y) = 0$ das Glied $(x^2 + y^2)^n$ keinen konstanten Faktor hat.

Zu S. 71. — Nach einer Bemerkung von Herrn E. Köstlin läßt sich die Kampyla als »Selbstkissoide« einer Parabel in bezug auf den Brennpunkt (O') erzeugen, indem man die Fokalsehnen von diesem Punkte aus als Radienvektoren anträgt. In der Tat sind die beiden von O' ausgehenden Vektoren einer Parabel für den Winkel θ

$$\varrho_1 = \frac{\frac{1}{2}a}{1 - \cos\theta}, \qquad \varrho_2 = -\frac{\frac{1}{2}a}{1 + \cos\theta}$$

[vgl. Nr. 59 (3) und Nr. 71], so daß

$$\varrho = \varrho_1 - \varrho_2 = a/\sin^2\theta\,.$$

Zu S. 79. — Sei in Fig. 39 PC (C auf OA) die Tangente der Kappakurve, $\sphericalangle CPO = \mu$, so ist $OC = \varrho\,\mathrm{tg}\,\mu = \varrho^2/\varrho' = b\sin^2\theta$; daher ist $CA = b\cos^2\theta$ und man erhält den Punkt C, indem man von dem Punkte B, wo PA die Polarachse schneidet, auf OA das Lot fällt. Damit ist eine einfache Tangentenkonstruktion gegeben.

Zu S. 136 [96]). — Eine Ergänzung von R. C. Archibalds Diss. bildet die Abh. „*The Cardioid and Tricuspid: Quartics with three Cusps*“ [Ann. of Math. (2) **4**, 1903, 95—104).

Zu S. 148, Mitte. — Lies $\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle APB'$.

Zu S. 151, vor **Zus.** — Von „so sieht man . . . bis . . . halbiert wird“ zu streichen.

Zu S. 152, **Zus.** — PQ muß natürlich $\perp SS'$ sein.

Zu S. 175, Fig. 80. — Zwischen P und P' soll $d\bar{s}$ stehen. Links davon lies im Text $\vartheta + d\vartheta$ statt $\vartheta\, d\vartheta$.

Zu S. 183, Z. 5 des Textes v. u. — Lies $\mathfrak{R}_\lambda$ statt $\overline{\mathfrak{R}}_\lambda$.

Zu S. 185, Z. 6 v. o. — Lies $M_1 C_u'$ statt $M_1 C_u$.

Zu S. 202, Z. 1 v. u. — Lies $\frac{R+r}{r}\omega$ statt $\frac{R+r}{R}\omega$.

Zu S. 241, **Zus.** — Die Kurve $\varrho \sin \frac{1}{3}\theta = m$ ist die Trisekante. Vgl. S. 81/82.

Zu S. 242, Z. 3 v. u. — Lies „der Geraden LN".

Zu S. 248. Z. 17 v. o. — Lies $\mathcal{R} = \varrho^2/(\varrho - R)$.

Zu S. 254/55. — Das Krümmungszentrum des Punktes Q der Traktrix complicata liegt auf der Verlängerung von MO, da die Mittelpunkte zweier inversen Kreise auf einer Geraden durch den Pol liegen.

Zu S. 281 (30). — Diese Eigenschaft benutzte R. Schimmack zur Konstruktion eines Katenographen (Zeitschr. Math. Physik **52**, 1905). Bei etwas anderer Anordnung wird durch den Apparat auch jede andere Ribaucoursche Kurve beschrieben (vgl. Nr. 214).

Zu S. 293 ff. (Nrn. 210—13). — Die Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter Krümmung sind ausführlich, aber von einem anderen Gesichtspunkte aus, behandelt bei G. Scheffers „*Einf. i. d. Theorie der Kurven*", Leipzig 1901, S. 97—105.

Zu S. 390, **Beisp.** — Die Tschirnhausensche Kubik ist Katakaustik der Parabel für in beliebiger Richtung parallel einfallende Lichtstrahlen. Dieser von Laguerre (Nouv. Ann. math. 1883, S. 27 = *Oeuvres*, II, S. 645) stammende Satz wurde neuerdings bewiesen von E. Stübler in dem Aufsatze „*Über Brennlinien durch Reflexion*" (Zeitschr. math. Unterr. **39**, 1908, 121—144).

SACH-INDEX.

Die beigesetzten Zahlen bedeuten die Seiten des Buches. Ist die Zahl kursiv, so kommt der betr. Gegenstand oder Autor auf der angegebenen Seite in einer Fußnote vor.